

# Адаптивное управление ликвидацией лесных пожаров

*Колтаков Василий Федорович*  
*Московский городской психолого-педагогический университет*  
*Москва, Россия, v.kolpakov53@mail.ru*

В статье рассматривается один из подходов синтеза оптимального, в некотором смысле, управления тушением лесного пожара, базирующийся на использовании метода обратных задач динамики. Данный метод, в свою очередь, предполагает наличие достоверной динамической модели развития лесного пожара. Результаты исследования могут быть использованы для оценки пожарной обстановки и выдачи адекватных рекомендаций по привлечению сил и средств для реализации необходимых темпов локализации пожара.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, лесные пожары, динамическая модель, метод обратных задач динамики, алгоритм управления.

## Введение

Современные исследования показывают, что тяжелые последствия от пожаров во многом обусловлены недостаточностью ресурсов противопожарной службы, обеспечивающей пожаротушение, большим радиусом обслуживания в районах выезда подразделений Государственной противопожарной службы и другими факторами объективного и субъективного характера.

Успешное решение этих проблем возможно на основе широкого использования современных методов математического моделирования и прогнозирования. Органы власти нуждаются в информационной поддержке принятия решений, основанной на получении, обработке и представлении многофакторных данных о различных показателях административно-территориальных единиц. В настоящее время налицо нехватка адекватных моделей и методов обработки данных и отсутствие информационного обеспечения принятия решения в сфере пожарной безопасности.

Всё выше отмеченное предопределяет необходимость поиска новых подходов к совершенствованию методов управления пожарной безопасностью, учитывающих различные показатели и состояние обстановки с пожарами. Недостаток ресурсного потенциала вызывает необходимость более эффективного использования выделяемых средств органами власти.

Действенным инструментом решения проблемы пожарной безопасности различных административно-территориальных единиц являются

методы математического моделирования и прогнозирования с последующим применением полученных результатов при разработке соответствующих управленческих решений. Вместе с тем к настоящему времени как научные, так и практические аспекты использования методов математического моделирования и оптимального управления, применения современных информационных технологий в сфере управления и мониторинга пожарной обстановки проработаны не в достаточной степени. Поэтому разработка моделей, методов и средств информационной поддержки принятия решений в сфере управления и мониторинга пожарной обстановки являются актуальными.

В работе рассматривается один из подходов синтеза оптимального управления при ликвидации лесного пожара, использующего реальные и модельные параметры развития пожарной ситуации.

В теории оптимального управления динамическими системами существует два основных направления.

Первое направление объединяет вариационные методы, принцип максимума и динамическое программирование. Здесь решение задачи синтеза оптимального управления, удовлетворяющего заданному критерию качества, связано с необходимостью решения краевой задачи. Однако ряд прикладных задач управления динамическими системами не может быть сведен к оптимизации определенного функционала качества. Особенно это относится к объектам, параметры которых имеют значительные неопределенности. Кроме того, в последнее время в связи с усложнением объектов управления появилось много задач, в которых требуется сначала рассчитать желаемый закон изменения управляемого процесса (программное движение), а затем построить закон управления, обеспечивающий точное или приближенное осуществление этого процесса. Решению указанных задач посвящено другое направление оптимального управления, базирующееся на так называемых обратных задачах динамики [3]–[5].

Работа посвящена выбору оптимального, в некотором смысле, управления тушения лесного пожара с использованием метода обратных задач динамики. Рассмотрим основные положения метода.

### **Метод обратных задач динамики**

*Прямая и обратная задачи динамики.* Пусть объект управления определен дифференциальным оператором в форме Коши

$$y'(t) = f(y, u, t), \quad (1)$$

где  $y(t) = [y_1(t), \dots, y_n(t)]^T$  – вектор координат состояния;

$u(t) = [u_1(t), \dots, u_m(t)]^T$  – вектор управления.

*Прямая задача.* Известна математическая модель (1) движения системы и ее состояние в начальный момент времени

$$y(0) = y_0. \quad (2)$$

Управление  $u(t)$  задано. Требуется найти траекторию движения системы  $y(t), t \geq 0$ .

Решение сводится к интегрированию дифференциального уравнения (1) с начальными условиями (2). Эта задача легко разрешается или аналитически или численно с помощью компьютерных технологий.

*Обратная задача.* Известна математическая модель (1) с начальными условиями (2). Задана желаемая траектория движения системы  $y_{жс}(t), t \geq 0$ .

Необходимо найти такое управление (желаемое)  $u_{жс}(t)$ , чтобы обеспечить  $y(t) = y_{жс}(t)$ . Другими словами, в математическом отношении содержание обратной задачи динамики составляет синтез алгоритма управления, при котором управляемая система обладает требуемыми динамическими характеристиками.

### *Синтез алгоритмов управления в форме обратных связей*

Управление линейным объектом. Рассмотрим метод обратных задач динамики применительно к динамическому объекту, описываемому дифференциальным уравнением первого порядка

$$y'(t) = a_0 y(t) = b_0 u(t), \quad (3)$$

Требуется найти такое управление  $u_{жс}(t)$ , которое обеспечивает изменение выходной координаты  $y(t)$  (3) по заданной траектории  $y_{жс}(t)$ . При этом предполагается, что выходная координата  $y(t)$  измеряется.

Так как по разным причинам [3]; [4] добиться абсолютного совпадения траекторий  $y(t)$  и  $y_{жс}(t)$  невозможно, решение этой задачи будем осуществлять из условия стремления к нулю ошибки управления  $F(y(t), y_{жс}(t))$  при неограниченном увеличении времени. Причем характер «списания» ошибки определяется динамическими свойствами объекта, т. е. если объект описывается уравнением первого порядка, то и изменение  $F(y(t), y_{жс}(t))$  должно осуществляться по такой же траектории

$$F'(y, y_{жс}) + \lambda \cdot F(y, y_{жс}) = 0, \quad (4)$$

где  $\lambda$  — коэффициент, определяющий заданную динамику приближения  $y(t)$  к  $y_{жс}(t)$ ;  $F'(y, y_{жс}) = y(t) - y_{жс}(t)$ .

Траектория  $F(y(t), y_{жс}(t))$  в соответствии с (4) будет иметь экспоненциальный вид

$$F(t) = c \cdot e^{-\lambda t}, \quad (5)$$

где  $c$  определяется из условия  $F(0)$ , в нашем случае  $c = y(0) - y_{жс}(0)$ .

Заданную управляющую функцию  $u_{жс}(t)$ , обеспечивающую (4), можно получить, подставив (3) в (4):

$$b_0 u_{жс}(t) - a_0 y(t) - y'_{жс}(t) + \lambda (y(t) - y_{жс}(t)) = 0, \quad (6)$$

откуда

$$u_{жс}(t) = b_0^{-1} (y'_{жс}(t) + \lambda y_{жс}(t) + (a_0 - \lambda) y(t)). \quad (7)$$

В практических задачах, как правило,  $y'_{ж}(t) = 0$ . Тогда желаемое управление

$$u_{ж}(t) = b_0^{-1} \lambda y_{ж}(t) + (a_0 - \lambda) y(t). \quad (8)$$

обеспечит траекторию управляемого процесса в виде:

$$y'(t) + \lambda y(t) = \lambda y_{ж}(t). \quad (9)$$

*Управление нелинейным объектом.* Важная особенность рассматриваемого подхода состоит в том, что для синтеза алгоритмов управления могут использоваться полные нелинейные уравнения движения без их линеаризации. Полученные при этом алгоритмы также являются нелинейными. Их структура адекватна структуре математических моделей управляемых процессов, а параметры алгоритмов определяются параметрами математических моделей назначенных траекторий движения.

Пусть модель объекта управления описывается нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка

$$y'(t) = f(y, u, t) \quad (10)$$

Эталонное движение задается линейным уравнением (4). Тогда для его реализации необходимо разрешить уравнение

$$f(y, u, t) - y'_{ж}(t) + \lambda (y(t) - y_{ж}(t)) = 0, \quad (11)$$

относительно  $u(t)$ .

Если это возможно осуществить аналитически, то получим алгоритм управления в явном виде

$$u_{ж}(t) = \varphi(y(t), y'_{ж}(t), y_{ж}(t)). \quad (12)$$

Если аналитическое решение найти не удастся, то для нахождения  $u_{ж}(t)$  к нелинейному уравнению (12) можно применить известные градиентные численные методы, имеющие готовые конструкции, например, в Mathcad [6].

### *Повышение адаптивных свойств управляющей функции*

Эффективность управления, полученного на основе обратных задач динамики (8), (12), в основном определяется достоверностью математических моделей. К сожалению, математические модели всегда отличаются от их истинных операторов. В этом случае в результате управления могут возникать ошибки управления как в переходной стадии, так и в установившемся режиме. Для решения этой проблемы можно было бы использовать идентификацию параметров модели в реальном времени, что представляет большие трудности, особенно для слабо структурированных динамических систем. Другим путем является разработка более грубой («робастной») системы управления, обеспечивающей движение системы не по эталонной траектории, а в ее окрестности.

Рассмотрим на примере объекта, описываемого дифференциальным управлением второго порядка

$$y''(t) = a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t), \quad (13)$$

с известным начальным состоянием:  $y_0, y'_0$ .

*Формулировка задачи:* необходимо синтезировать такой алгоритм управления, при котором управляемый объект переходит из произвольного начального состояния в окрестность стационарного состояния

$$y_{жс} = const, y'_{жс} = 0 \quad (14)$$

и остается в этой окрестности бесконечно долго. При этом требуется, чтобы переходный процесс  $y(t)$  с заданной степенью приближения следовал за переходным процессом эталонной модели

$$F''(t) + \lambda_1 F'(t) + \lambda_0 F(t) = 0. \quad (15)$$

Или с учетом (13) и обозначив траекторию эталонной модели через  $x(t)$ , получим уравнение эталонной траектории в виде:

$$x''(t) + \lambda_1 x'(t) + \lambda_0 x(t) = \lambda_0 y_{жс}(t). \quad (16)$$

с начальными условиями  $x_0 = y_0, x'_0 = y'_0$ .

Физический смысл сформулированной задачи заключается в синтезе такого управления, чтобы изменение состояния исходной системы удовлетворяло условию

$$|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon, t \geq 0, \quad (17)$$

характеризующему степень приближения процесса  $y(t) \rightarrow y_{жс}(t)$  в проектируемой системе к эталонному процессу  $x(t) \rightarrow y_{жс}(t)$  с заданной точностью  $\varepsilon$ .

Так как, в силу вышеназванных причин, в процессе управления полное соответствие  $y(t)$  с  $x(t)$ , а следовательно и их производных невозможно, то структуру и параметры алгоритма управления будем определять из условия минимума функционала

$$J(u) = 0,5 (x''(t) - y''(t, u))^2, t \geq 0. \quad (18)$$

Для придания системе грубых свойств: нахождение в окрестности экстремума-минимума, необходимо желаемую управляющую функцию определять из уравнения:

$$\frac{du(t)}{dt} = \mu \frac{\partial J(u)}{\partial u}, \quad \mu = const \quad (19)$$

которое соответствует градиентной схеме поиска экстремума.

С учетом (13)

$$\frac{\partial J(u)}{\partial u} = -b_0(x''(t) - y''(t)). \quad (20)$$

Тогда

$$\frac{du}{dt} = k(x''(t) - y''(t)), \quad (21)$$

где  $k = b_0 \mu$ .

С учетом (16) и концепцией обратных задач динамики:  $x'(t) = y'(t)$ ,  $x(t) = y(t)$  получим

$$x''(t) = \lambda_0 (y_{жс}(t) - y(t)) - \lambda_1 y'(t), \quad (22)$$

и подставив его в (21), получим окончательное уравнение для управляющей силы

$$\frac{du}{dt} = k(\lambda_0 (y_{жс}(t) - y(t)) - \lambda_1 y'(t) - y''(t)). \quad (23)$$

Особенностью алгоритма (23) является то, что для его реализации необходимо иметь информацию (измерять) о состоянии координаты и обеих ее производных.

В [3] показано, что для коэффициента усиления  $k$  должно выполняться правило знаков

$$\text{sing}(k) = \text{sing}(b_0).$$

В [3] также показано, что для устойчивости процесса управления необходимо, чтобы быстродействие контура управления ( $k$ ) должно быть существенно выше быстродействия эталонной модели, определяемого коэффициентами  $\lambda_0, \lambda_1$ .

*Синтез алгоритма управления тушением лесного пожара с использованием метода обратных задач динамики*

Математическая модель лесного пожара имеет следующий вид [1]; [2]:

$$S'(t) = \alpha \cdot S^{1/2}(t) - k \cdot u(t), \quad (24)$$

где  $\alpha$  – интенсивность распространения пожара;

$S(t)$  – площадь возгорания;

$k$  – коэффициент усиления при управлении;

$u(t)$  – управление (длина заградительной полосы).

В соответствии с методом обратных задач динамики естественным является выбор эталонной траектории «списания» ошибки управления

$$F'(t) + \lambda F(t) = 0, \quad (25)$$

где  $F(t) = S(t) - S_{жс}(t)$ .

Однако специфика задачи такова, что  $S_{жс}(t)$  неизвестна. Из здравого смысла следует, что желаемая площадь пожара,  $S_{жс}(t)$  чем меньше, тем лучше, но в силу того что она неизвестна, назначить желаемую траекторию (25) мы не можем.

Здесь предлагается в качестве  $F(t)$  использовать функцию

$$F(t) = S'(t) - S'_{жс}(t), \quad (26)$$

в которой желаемая интенсивность распространения пожара известна и равна  $S'_{жс} = \text{const} = 0$ .

В соответствии с (26) эталонная траектория будет иметь вид:

$$S''(t) + \lambda \cdot S(t) = 0. \quad (27)$$

Для реализации (27) продифференцируем (24)

$$S''(t) = 0,5 \alpha \cdot S^{1/2}(t) \cdot S'(t) - k \cdot u'(t), \quad (28)$$

Подставим выражение (24) и (28) в (27)

$$0,5 \alpha^2 - 0,5 k \cdot S^{1/2}(t) \cdot u(t) - k \cdot u'(t) + \lambda \alpha \cdot S^{1/2}(t) - \lambda k \cdot u(t).$$

Откуда найдем уравнение для вычисления управляющей силы  $u(t)$

$$u'(t) + \beta(t) \cdot u(t) = q(t), \quad (29)$$

где  $\beta(t) = \lambda + \alpha(t) / (2 S^{1/2}(t))$ ;

$q(t) = \alpha(0,5 \alpha + \lambda S^{1/2}(t)) / k$ .

Реализация (29) может быть осуществлена на компьютере с использованием разностной схемы

$$u(t_{i+1}) = u(t_i) + (-\beta(t_i) \cdot u(t_i) + q(t_i)) \cdot \Delta t, \quad (30)$$

где  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$  — шаг интегрирования.

Эффективность управления с использованием алгоритма (30) была проверена с помощью численного моделирования в среде Mathcad. Результаты моделирования управления тушением пожара (на примере пожара в Иркутской области, 2007 г.) представлены на рис. 1, 2.

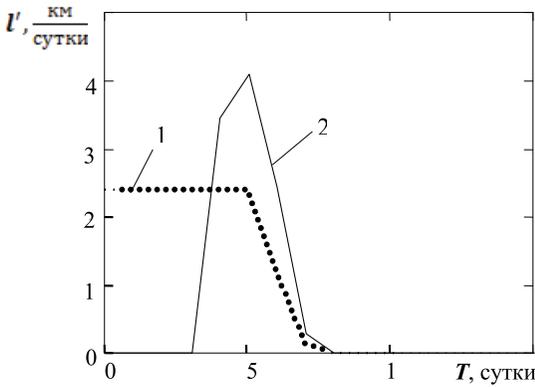


Рис. 1. Темпы изменения периметра пожара (1) и создания заградительной полосы (управление) (2)

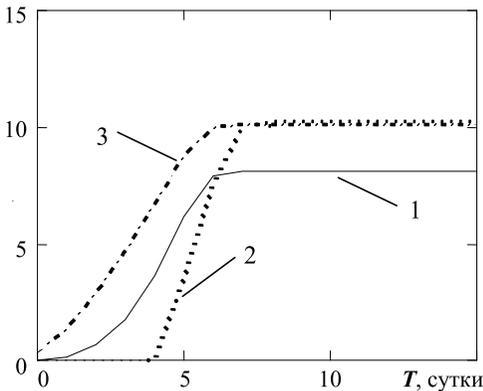


Рис. 2. Динамические характеристики ликвидации лесного пожара:  
1 — площадь пожара, км<sup>2</sup>; 2 — длина заградительной полосы, км;  
3 — длина периметра пожара, км

В эксперименте желаемая (эталонная) интенсивность распространения пожара формировалась в соответствии с уравнением (27) при заданном параметре  $\lambda$  (рис. 3). В примере была выбрана величина  $\lambda = 0,4$ , что соответствует заданному времени тушения пожара, равному 5–6 суток, при начальной интенсивности распространения пожара  $S'(0) = 1,1 \text{ км}^2 / \text{сутки}$ , которая соответствует реальным данным на момент начала тушения.

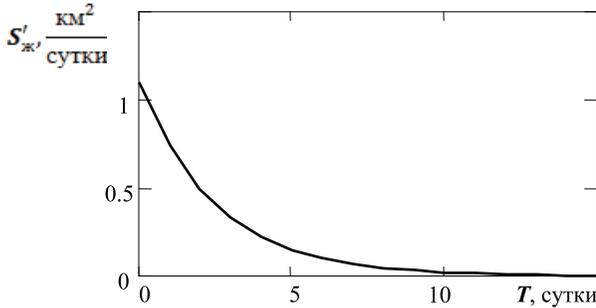


Рис. 3. Заданная интенсивность распространения пожара

Из рис. 1 видно, что для решения поставленной задачи максимальная величина интенсивности работ по созданию заградительной полосы должна быть  $u'_{ж\ max}(t) = 4,2 \text{ км} / \text{сутки}$ .

В случае ограничений на управление

$$u'(t) \leq u'_{огр}$$

характер тушения пожара, естественно, будет иным. Так, например, при возможности обеспечить максимальный темп создания заградительной полосы  $u'_{огр} = 3 \text{ км} / \text{сутки}$  пожар будет ликвидирован за 7 суток, в отличие от планируемого времени (5–6 суток) и площадь выгорания при этом увеличивается до  $9 \text{ км}^2$  (рис. 4).

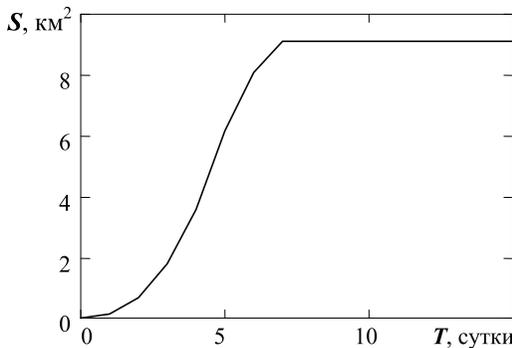


Рис. 4. Динамика тушения пожара при ограничении на управление

Далее проведем исследования адаптивных свойств алгоритма управления (30).

На рисунке 5 представлены переходные процессы, когда интенсивность реального пожара  $\alpha$  была ниже «модельной» на 50 %, а на рис. 6 — выше «модельной» на 50 %.

Из рисунков видно, что алгоритм управления чувствителен к изменению параметров пожара (различие относительно модели) и характер процесса тушения отличается от ситуации, когда модель «точно» описывает реальный процесс (рис. 1, 2). В случае когда реальный темп распространения пожара меньше заявленного в модели (рис. 5), управление тушением будет даже более эффективным — это и понятно, здесь управление ориентировано на худший вариант развития пожара по сравнению с реальной ситуацией. Хуже обстоит дело, когда реальный темп пожара будет больше модельного (рис. 6). Из рисунка видно, что в этом случае управление становится неэффективным и не справляется с тушением пожара, т. е. рекомендуемые темпы создания заградительной полосы будут ниже темпа распространения реального пожара.

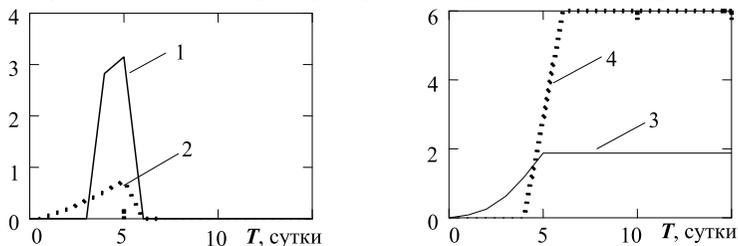


Рис. 5. Динамические характеристики тушения пожара при интенсивности реального пожара ниже модельной: 1 — темп создания заградительной полосы (управление), км/сутки; 2 — темп изменения площади пожара, км<sup>2</sup> /сутки; 3 — площадь пожара, км<sup>2</sup>; 4 — длина заградительной полосы, км

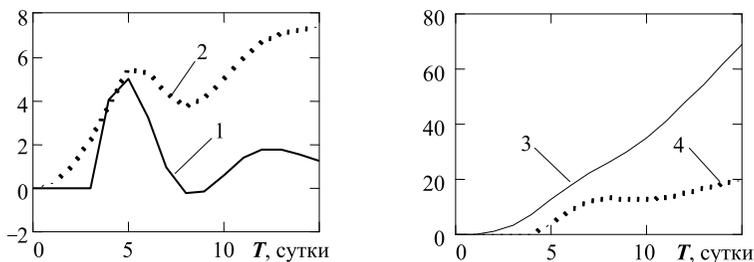


Рис. 6. Динамические характеристики тушения пожара при интенсивности реального пожара выше модельной: 1 — темп создания заградительной полосы (управление), км/сутки; 2 — темп изменения площади пожара, км<sup>2</sup> /сутки; 3 — площадь пожара, км<sup>2</sup>; 4 — длина заградительной полосы, км

Для повышения адаптивных свойств алгоритма управления применим технологию сочетания метода обратных задач динамики с минимизацией локального функционала качества.

Функционал качества (18) для данной задачи выберем в виде

$$J(u) = 0,5 \cdot (S'_s(t) - S'(t))^2, \quad (31)$$

где  $S'_s(t)$  — эталонная траектория изменения площади пожара, вычисляемая решением уравнения

$$S''_s(t) + \lambda S'_s(t) = 0. \quad (32)$$

Тогда в соответствии с (19) и (20) получим

$$\frac{du(t)}{dt} = \mu \frac{\partial J(u)}{\partial u}, \quad (33)$$

$$\frac{\partial J(u)}{\partial u} = k(S'_s(t) - S'(t)). \quad (34)$$

Объединим (33) и (34):

$$\frac{du(t)}{dt} = k^* (S'_s(t) - S'(t)), \quad (35)$$

где  $k^* = -k \cdot \mu$ .

Величина  $S'_s(t)$  может быть найдена из уравнения (32). Для этого его необходимо проинтегрировать и согласно концепции обратных задач динамики сделать замену:  $S_s(t) = S(t)$ :

$$S'_s(t) = \lambda \cdot (S(t) - S_0), \quad (36)$$

где  $S_0$  — площадь, охваченная пожаром перед началом его тушения.

Итак, окончательный алгоритм вычисления управления примет вид:

$$\frac{du(t)}{dt} = k^* (-\lambda \cdot S(t) - S'(t)). \quad (37)$$

Из (37) следует, что для реализации «оптимального» управления необходимо измерять текущую площадь пожара и скорость ее нарастания.

Результаты численного моделирования ликвидации пожара при обеспечении темпа работ по созданию заградительной полосы в виде алгоритма (37) представлены на рис. 7.

Видно, что управление в виде рис. 7 обеспечивает достаточно эффективный процесс тушения пожара: локализованная площадь сгоревшего леса составляет 8,2 км<sup>2</sup>, при максимальном темпе работ по созданию заградительной полосы 5 км/сутки.

При увеличении темпа распространения пожара на 50 % по сравнению с модельными характеристиками процесса тушения пожара представлены на рис. 8.

Из рисунка 8 видно, что процесс тушения пожара носит устойчивый характер по сравнению с алгоритмом управления (30) (рис. 6). При

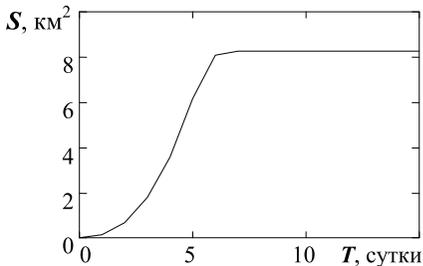
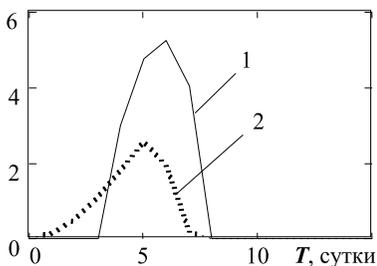


Рис. 7. Динамические характеристики тушения пожара при реализации адаптивного алгоритма управления: 1 — темп создания заградительной полосы (управление), км / сутки; 2 — темп изменения площади пожара, км<sup>2</sup> / сутки

этом обеспечивается заданная интенсивность тушения пожара, определяемая параметром  $\lambda$ , соответствующая заданному времени тушения: 5–6 суток. Однако для ликвидации такого пожара требуются значительные управляющие воздействия, максимальное значение которых равно 11 км/сутки, при этом итоговая площадь сгоревшего леса составит 17,5 км<sup>2</sup>.

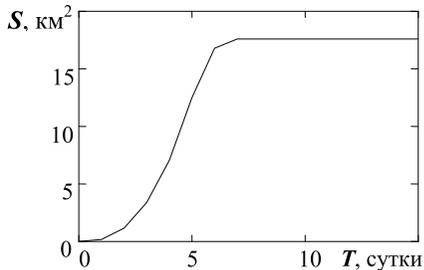
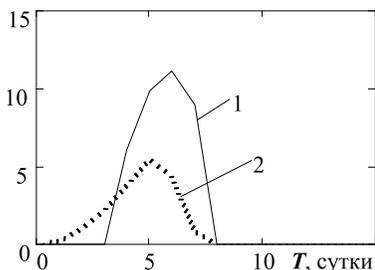


Рис. 8. Динамические характеристики адаптивного управления тушением пожара при интенсивности реального пожара выше модельной: 1 — темп создания заградительной полосы (управление), км / сутки; 2 — темп изменения площади пожара, км<sup>2</sup> / сутки

### Заключение

В заключение хотелось бы высказать практические рекомендации при использовании алгоритмов управления вида (30) и (37). Алгоритм (30) предпочтительнее использовать на начальной стадии тушения пожара, когда необходимо осуществить предварительный прогноз тенденции развития пожара и необходимых затрат сил и средств для его локализации в заданные сроки. Причем следует отметить, что эти прогнозы носят достаточно примерный характер. Алгоритм же (37), адаптированный к изменению параметров пожара, желательно использовать в качестве рекомендаций заданных темпов работ по созданию заградительной полосы в ходе ту-

шения в реальном времени. Как видно из (37), интенсивность работ (управление  $u'(t)$ ) будет являться функцией площади пожара  $S(t)$  и его скорости изменения  $S'(t)$ . Естественно, от точности измерения этих параметров пожара будет зависеть точность и эффективность управления.

### *Литература*

1. Колтаков В.Ф. Один из подходов моделирования лесных пожаров с целью повышения эффективности их ликвидации // Безопасность жизнедеятельности. 2011. № 4. С. 43–47.
2. Колтаков В.Ф. Параметрическая идентификация модели лесных пожаров // Безопасность жизнедеятельности 2012. № 5. С. 39–44.
3. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики в теории автоматического управления. Цикл лекций: учебное пособие для вузов. М.: Машиностроение, 2004.
4. Петров Б.Н., Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: линейные модели // Известия АН СССР. Техн. кибернетика, 1980. № 4.
5. Петров Б.Н., Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: нелинейные модели // Известия АН СССР. Техн. кибернетика, 1980. № 5.
6. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе MATHCAD: учебное пособие. 2-е изд. Испр. и доп. СПб.: Лань, 2008.

## **Adaptive management of forest fires extinguishing**

*Kolpakov Vasily*

*Moscow State University of Psychology and Education  
Moscow, Russia, v.kolpakov53@mail.ru*

Author considers an approach synthesizing optimum in some extent management of fire extinguishing, based on inverse dynamic problems technique. This technique in turn assumes credible dynamic model of forest fire development. Results of study may be used for estimation of fire situation and deriving adequate recommendations for implementation of necessary rate of fire localization.

**Keywords:** numerical simulation, forest fires, dynamic model, the method of inverse dynamics control algorithm.

### *References*

1. Kolpakov V.F. Odin iz podkhodov modelirovaniya lesnykh pozharov s tsel'yu povysheniya effektivnosti ikh likvidatsii // Bezopasnost' zhiznedeyatel'nosti. 2011. № 4. S. 43–47.

2. *Kolpakov V.F.* Parametricheskaya identifikatsiya modeli lesnykh požarov // *Bezopasnost' zhiznedeyatel'nosti* 2012. № 5. S. 39–44.
3. *Krut'ko P.D.* Obratnye zadachi dinamiki v teorii avtomaticheskogo upravleniya. Tsikl leksiy: uchebnoe posobie dlya vuzov. M.: Mashinost-roenie, 2004.
4. *Petrov B.N., Krut'ko P.D.* Obratnye zadachi dinamiki upravlyaemykh sistem: lineynye modeli // *Izvestiya AN SSSR. Tekhn. kibernetika*, 1980. № 4.
5. *Petrov B.N., Krut'ko P.D.* Obratnye zadachi dinamiki upravlyaemykh sistem: nelineynye modeli // *Izvestiya AN SSSR. Tekhn. kibernetika*, 1980. № 5.
6. *Okhorzin V.A.* Prikladnaya matematika v sisteme MATHCAD: uchebnoe posobie. 2-e izd. Ispr. i dop. SPb.: Lan', 2008.