ты», для успешного выполнения которого необходимо владеть понятием нуля. При этом к концу обучающего эксперимента трудностей с применением нуля для описания действий персонажей картинки у учащихся не наблюдалось. Но поскольку истинного понимания нуля у учащихся не возникло, трудности с выполнением диагностического задания «Вертолеты» проявились снова в повторном тестировании.

Остается вопрос о том, насколько сам факт выполнения дополнительных заданий повлиял на результаты экспериментальной группы. Можно утверждать, что важнее было влияние содержания заданий, а не дополнительное время, проведенное за решением задач: ученики контрольной группы дома тоже решали задачи, выполняя домашние задания, в том числе с помощью родителей.

Разработанные в данном обучающем эксперименте задачи могут быть положены в основу проектирования развивающих образовательных ситуаций в начальной школе на уроках математики.

3.4. ФОРМИРОВАНИЕ У МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ ОБЩЕГО СПОСОБА ДЕЛЕНИЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ В ПРОЦЕССЕ РЕАЛИЗАЦИИ ДЕЯТЕЛЬНОСТНОЙ МОДЕЛИ ОСВОЕНИЯ НАУЧНЫХ ПОНЯТИЙ

Л.К. Максимов, Л.В. Максимова

В современной педагогической психологии достигнуты значительные результаты в реализации деятельностного подхода к обучению школьников. Они получены в рамках научных направлений, дающих различную содержательную трактовку такого подхода, путей его реализации.

В психологической теории поэтапного формирования умственных действий (П.Я. Гальперин, Н.Ф. Талызина и др.) деятельностное усвоение понятий предполагает, *во-первых*, специальную работу над содержанием учебного материала по выделению ориентировочной основы действий (ООД); *во-вторых*, особую организацию деятельности учащихся по его усвоению (Н.Г. Салмина, В.П. Сохина, И.А. Володарская, Л.С. Георгиев и др.). Специально подобранный учебный материал разбивается на самостоятельные разделы.

Критерием такого разбиения выступает *действие*, имеющее внутри этого материала самостоятельный продукт. Оно описывается в виде логически связанных операций (звеньев), определяющих алгоритм его выполнения. Для описания действия используются специально разработанные учебные карты (И.П. Калошина, Н.А. Добровольская и др.). Особую роль при работе с материалом играет этап создания ООД, т. к. «судьба будущего действия, в частности умственного, в значительной мере определяется в самом начале обучения» [Гальперин, 1959, с. 449]. На этом этапе учащиеся разбираются в содержании усваиваемого действия, в свойствах его предмета, в составе и порядке выполнения исполнительных операций. Здесь важно усвоить и как можно более полно понять содержание усваиваемого учебного материала. В зависимости от степени полноты (полная – неполная), меры обобщенности (обобщенная – конкретная), способа получения (самостоятельно или в готовом виде) выделяют основные типы ориентировочной основы действий.

Усвоение понятий происходит в процессе собственной, специально организованной, деятельности школьников. Этот процесс включает несколько этапов: мотивации, уяснения схемы ориентировочной основы действия, выполнения действия в громкой речи, в речи про себя, в умственной форме.

Деятельностное усвоение понятий в психологической теории учебной деятельности (Д.Б. Эльконин, В.В. Давыдов) предполагает *особое построение учебного материала в форме учебных задач,* определяющих обобщенные способы действий в различном предметном материале. Учебная задача требует «анализа фактического материала с целью построения содержательной абстракции и содержательного обобщения; выведения на их основе частных отношений данного предметного материала и их объединения в некоторый целостный объект; овладения … общим способом построения изучаемого объекта» [Давыдов, 1986, с. 151–152]. Такое построение содержания учебного предмета предполагает *особую организацию деятельности учащихся* по овладению обобщенными способами, включающую выполнение следующих учебных действий: преобразование условий задачи с целью обнаружения всеобщего отношения изучаемого объекта; моделирование выделенного отношения в предметной, графической или буквенной форме; преобразование модели отношения для изучения его свойств в «чистом» виде; построение системы частных задач, решаемых общим способом; контроль за выполнением действий; оценка усвоения общего способа действия как результата решения данной учебной задачи (В.В. Давыдов, Д. Б. Эльконин).

Специальные исследования (А.З. Зак, В.Т. Носатов, В.Х. Магкаев, Я.А. Пономарев и др.) показали, что систематическое решение школьниками учебных задач, выполнение учебных действий при освоении научных понятий приводят к возникновению у них теоретической формы мышления, предполагающей исследование природы самих понятий, что свидетельствует об эффективности обучения в условиях специально организованной учебной деятельности.

Реализация таких подходов к формированию понятий, несомненно, важна в рамках теории деятельности. Однако на современном этапе исследований по построению деятельностных моделей формирования понятий *содержание понятий* оказалось как бы *отделенным* от самой деятельности по их усвоению. Генетически исходные отношения, например, разворачиваются как описания содержания понятий, а только затем организуется деятельность по их усвоению, т. е. учебная деятельность осуществляется параллельно содержанию понятий. При этом считается, что деятельностные структуры и содержание понятий изоморфны.

С нашей точки зрения, проблема деятельностного подхода в обучении состоит не только в том, чтобы по определенным законам организовать деятельность учащихся по усвоению научных понятий, но и в том (и прежде всего в этом!), что *само содержание усваиваемых понятий,* их генетические отношения должны быть описаны и развернуты *в виде деятельностных схем и моделей.*

Логико-психологической основой деятельностного описания научных понятий «является представление содержания генетически исходного отношения как системы взаимосвязанных преобразований “действие–операция”, в которой ее операционная часть последовательно реализует цель задаваемого действия (деятельностные модели описания содержания)» [Максимов, 1987, с. 6–7].

Психолого-педагогической основой деятельностного усвоения содержания научных понятий является проектирование обучения как системы моделей, задающих необходимость выполнения взаимообратимых трансформаций «действие – операция»; последовательность выполнения этих преобразований самим ребенком обеспечивает освоение им связи между операционными компонентами действия (обобщенный способ действия) и содержанием самого понятия. Такой способ обучения представляет собой *новую технологию освоения содержания научных понятий*, специфическую для учебной деятельности (Д. Б. Эльконин – В. В. Давыдов).

Деятельностное освоение содержания учебного предмета включает ряд психолого-педагогических условий, наиболее важными из которых являются:

а) выделение в структуре обобщенного способа действия операций как самостоятельных действий, которые опосредствуют генезис понятия;

б) построение модели деятельностного описания содержания осваиваемого понятия, которая отражает обобщенный способ действия, а не материал, с которым действует ученик;

в) возникновение феномена *остановленного действия* в процессе освоения деятельностно описанного понятия. Осваиваемое действие останавливается в том случае, когда по ходу выполнения в его структуре возникает ранее не освоенная операция. Такая операция трансформируется в самостоятельное действие и осваивается на уровне специальной цели. В дальнейшем при «сборке» общего способа действия из операций, освоенных деятельностным способом, проводится их рефлексия в отношении к осваиваемому действию;

г) постановка и решение системы взаимосвязанных учебных задач, реализующих (в форме учебной деятельности) обобщенный способ, описанный через систему взаимных трансформаций «действие – операция».

В качестве примера, демонстрирующего особенности освоения младшими школьниками математических понятий при описанном выше подходе, рассмотрим введение понятия «деление многозначных чисел» в четвертом классе начальной школы.

Деление многозначных чисел с точки зрения его деятельностного описания представляет собой *действие*, состоящее из *операций*, определяющих *способ его выполнения*. Такими операциями являются:

1) определение первого неполного делимого;

2) установление количества цифр в частном;

3) подбор цифры частного, включающий в себя:

а) округление делимого и делителя до старшего разряда делителя,

б) деление округленных чисел,

в) умножение делителя на число, полученное при делении округленных чисел, г) сравнение числа, полученного при умножении, с неполным делимым,

д) нахождение разницы между неполным делимым и числом, полученным при умножении делителя в случае, если неполное делимое больше этого числа, и т. д.

Анализ *генезиса действия* деления многозначных чисел показывает, что каждая *из операций*, входящих в его состав, как и любая операция, входящая в состав других действий, *может быть освоена* учениками *различными путями*: либо «*прилаживанием*», освоением ее *по ходу выполнения всего действия* деления, либо «*путем превращения в нее прежде сознательного целенаправленного действия*» [Леонтьев, 1983, с. 267]. Говоря другими словами, каждая операция, составляющая действие деления многозначных чисел, *должна быть сначала освоена на уровне действия*, целевым способом: установлены условия ее происхождения, принцип действия, способы ее выполнения, контроля и оценки и др. И только после такого освоения она может быть *трансформирована* как *операция* в состав изучаемого действия.

Анализ структуры действия деления многозначных чисел показывает, что в условиях нашей экспериментальной программы на уровне *специальной цели действия* ранее были изучены следующие операции: умножение любого многозначного числа на однозначное число; табличные случаи деления чисел; сравнение чисел; сложение и вычитание многозначных чисел.

В качестве специальной *цели не стояли задачи определения способа нахождения неполных делимых* в исходном делимом и *способа округления чисел,* которое необходимо производить при подборе цифры в частном. То есть эти *операции,* входящие в состав *действия* деления многозначных чисел, ранее – до выполнения действия деления многозначных чисел – *не были освоены учащимися на уровне специальной цели (на уровне действия).*

Исходя из вышесказанного, выполнение действия деления многозначных чисел должно быть *остановлено* до тех пор, *пока его операционный состав не будет полностью освоен* целевым способом на уровне взаимообратимых переходов *«действие – операция».* Нарушение этого условия, как правило, ведет к формальному освоению деления многозначных чисел, независимо от способа его формирования.

В связи с *остановкой действия* деления многозначных чисел, невозможностью его выполнения из-за неосвоенности нескольких операций на уровне действия возникает специальная задача – овладение учащимися такими операциями *на уровне специальной цели*.

Решение этой задачи требует специального построения учебного материала, при котором в каждой операции, осваиваемой на уровне действия, были бы выявлены условия ее происхождения и способ выполнения. Это возможно только в том случае, если будет поставлена и решена соответствующая *учебная задача.*

Таким образом, возникает необходимость постановки и решения двух учебных задач: 1) нахождение неполного делимого и количества цифр в частном; 2) округление чисел.

Как известно, успешность освоения любого предметного материала во многом зависит от наличия у человека *потребности* в его изучении. Поэтому при постановке и решении учебной задачи *на нахождение неполного делимого и количества цифр в частном* существенным моментом выступает создание условий для возникновения у младших школьников *содержательного противоречия* в изучаемом материале, т. к. именно «предметное содержание противоречия задает цель... субъективно... выражается в настоятельной *потребности* найти решение проблемы» [Арсеньев, Библер, Кедров, 1967, с. 218–219].

Такое *противоречие* создается у младших школьников при выполнении предложенного учителем задания – *деления многозначного числа на однозначное* (до выполнения этого задания ученики решали примеры на деление с использованием табличных случаев). Например, ученикам предлагается разделить число 152 на 2. Возникает ситуация, в которой одни школьники пытаются получить ответ на основе табличного способа деления чисел, другие предлагают новые способы деления этих чисел, третьи отказываются от решения предложенного примера, обосновывая свой отказ тем, что «такие задания мы еще не выполняли».

Учитель выслушивает все предложения учащихся, требует обоснования полученных ответов, их доказательства, установления правильности полученного ответа. В процессе обсуждения и анализа различных предложенных учащимися способов получения ответа они приходят к необходимости использования при доказательстве *модели числа,* которая дает возможность выполнить деление *не* *в умственном, а в чувственно-предметном* плане, что поможет снять проблемы в доказательстве правильности полученного ответа.

С моделью числа, в которой сотни, десятки, единицы имеют не цифровое изображение, ученики уже знакомы. Сотня, например, в такой модели обозначается прямоугольником, десяток – кружком, единица – точкой. Они «являются “слепком” с реальных действий, ранее производимых учащимися в процессе предметных преобразований. В то же время в данной модели сохраняется принцип получения старшей разрядной единицы из единиц соседнего, младшего разряда, при действии в соответствующей системе счисления» [Максимов, 1987, с. 20].

В процессе обсуждения плана выполнения предстоящего действия устанавливается, что наиболее удобным для преобразования будет выполнение деления *«на»* (на две равные части). Строится модель числа 152: одна сотня (на модели она изображается прямоугольником), пять десятков (на модели это будут пять кругов), две единицы (две точки). Знаком-меткой, например крестиком, отмечается количество частей (две), на которое нужно произвести деление числа 152.

Пробные преобразования модели показывают, что одну сотню разложить *на две части поровну, – по сотням,* нельзя. Ученики предлагают преобразовать на модели сотню в десятки, – «наполнить прямоугольник кружочками – десятками». Уточняется система счисления, в которой выполняется деление (десятичная), выполняется преобразование: сотня на модели «заполняется» десятками. Выясняется, что в делимом пятнадцать десятков: десять в разряде сотен и еще пять – в разряде десятков. Такое количество десятков можно разделить поровну на две части *по десяткам.*

«Раскладывание» на модели происходит схематически: каждый десяток, взятый из делимого, последовательно «переносится» (перенос фиксируется с помощью стрелки) в соответствующую часть частного. В процессе такого преобразования устанавливается, во-первых, что только 14 десятков делимого разложили *по 7 десятков в каждую из двух частей,* во-вторых, что в делимом остался еще один десяток. Его «по десяткам» на две части разделить нельзя. Ученики предлагают преобразовать («развязать») десяток в единицы.

Это преобразование выполняется на модели числа: десяток заполняется единицами-точками. Устанавливается, что в делимом образуется 12 единиц, которые можно разделить («разложить») на две части по единицам. Это преобразование также осуществляется схематически на модели.

В ходе таких преобразований выясняется, что деление числа 152 на 2 дает в ответе число 76. Отмечается, кто из учеников получил такой же ответ, кто действовал таким же способом, кто делил другим способом и ошибся.

Действия, выполненные на модели, позволяют не только получить правильный ответ, но и *выделить в наглядно-образной форме* способ преобразования числа при делении на однозначное число. В процессе специально проведенного *рефлексивного анализа* ученики приходят к выводу, что деление многозначного числа отличается от табличных случаев деления тем, что *делимое разбивается* на несколько частей – неполных делимых, каждое из которых делится на число делителя нацело, без остатка. Количество неполных делимых определяет количество цифр в частном. Первое неполное делимое устанавливается в старших разрядах делимого. Деление каждого неполного делимого на делитель дает в частном одну цифру числа. Устанавливается, что процесс деления многозначного числа на однозначное число осуществляется в несколько этапов, их столько, сколько неполных делимых в делителе или количество цифр в частном.

Обсуждается и фиксируется *способ действия* учащихся при определении неполных делимых и количества цифр в частном. Действие начинается со старшего разряда: а) если единицы этого разряда делятся (раскладываются) на количество частей делителя (этот факт устанавливается сравнением количества единиц старшего разряда и количества единиц делителя), то в частном получится число той же разрядности, что и делимое; б) если единицы старшего разряда не делятся (не раскладываются) на количество частей делителя, их меньше, то они преобразуются («переводятся», «развязываются») в единицы младшего, – соседнего,– разряда и сравниваются с делителем. Если их количество больше, чем делитель, то данное количество единиц этого разряда будет первым неполным делимым, а в частном получится число, имеющее соответствующую цифру старшего разряда. Если же количество единиц образованного разряда меньше, чем делитель, то они превращаются в единицы соседнего разряда и т. д. В неполном делимом выделяется та часть, которая делится на делитель таблично, оставшиеся разрядные единицы переносятся в соседний разряд, образуя следующее неполное делимое, и т. д.

Обсуждается форма фиксации выполняемых преобразований *на числовой формуле*. При этом в знаковой форме (дугообразной стрелкой показывается переход старшего разряда в соседний, младший) сохраняются предметные действия, выполняемые на знаковой модели числа.

В дальнейшем в процессе освоения способа определения первого неполного делимого и количества цифр в частном учащиеся выполняют различные тренировочные упражнения. При этом они не выполняют деление до получения ответа (частного), а только определяют неполные делимые и количество цифр в частном на различных парах чисел.

Работа по освоению этого действия строится в индивидуальных и совместных формах, при которых на основе *выделенного операционного состава действия* один ученик выполняет первую операцию. Например, анализирует цифру старшего разряда, определяя первое неполное делимое. Второй контролирует и оценивает способ ее выполнения (специально обсуждается содержание контроля при выполнении этой операции). Если первым учеником при выполнении операции допущены ошибки, партнер их исправляет и объясняет, как нужно правильно выполнять операцию. Если операция выполнена правильно или достигнуто согласие при исправлении ошибки, партнеры переходят к выполнению второй операции, при этом они меняются ролями: исполнитель становится контролером, контролер – исполнителем. Смена ролей при выполнении операций этого действия идет до завершения его выполнения.

Выполняя преобразования по выделению неполного делимого и количества цифр в частном, ученики используют специальные знаки, моделирующие действие по преобразованию единиц старших разрядов в единицы соседних, – младшие разряды делимого. Это способствует *осознанию* осваиваемого способа действия. Его *обобщенность* проявляется при выполнении соответствующих преобразований с любыми числами, например: 2747 : 183; 50608 : 3607; 347000765 : 679; 765 : 3872 и т. д.

Освоенность действия определения неполного делимого и количества цифр в частном и его перевод на уровень операции позволяют «*продвинуть действие деления вперед*» и перейти к следующему этапу в его освоении – реализации специальной цели. Возникает задача округления чисел при подборе цифры в частном. Ее решение происходит в соответствии с требованиями технологии учебной деятельности (Д.Б. Эльконин – В.В. Давыдов).

Успешно определив первое неполное делимое и количество цифр в частном в предложенном учителем выражении 736 : 18, ученики сталкиваются с проблемой *деления* числа 73 на число 18. Они предлагают различные варианты получения ответов: например, *подбирать число*, показывающее, сколько раз 18 содержится в 73, *перебором*, проверяя при этом несколько чисел. Учитель поддерживает такое предложение. Ученики проверяют различные числа, например, два, три, пять, семь и т. д. Число 4 (правильный вариант ответа) специально проверяется в конце этой работы.

Анализируя выполненные действия по подбору числа, ученики приходят к выводу, что методом перебора действовать нерационально: на выполняемые преобразования уходит много времени, при вычислениях допускаются ошибки. Возникает задача поиска другого способа нахождения числа, показывающего, сколько раз делитель содержится в делимом при делении двухзначных, трехзначных и других чисел.

В процессе анализа возникшей проблемы выясняется, что быстро и без ошибок можно получить число, воспользовавшись таблицей деления. Но числа, с которыми приходится действовать учащимся, не подходят под категорию «табличные».

Дальнейшее обсуждение проблемы приводит к обнаружению возможностей успешного деления «круглых» чисел (оканчивающихся нулями). Выясняется, что «наши» числа таковыми также не являются.

Анализируя ситуацию, связанную с делением «круглых» чисел, учащиеся приходят к выводу о необходимости научиться «делать числа круглыми» (округлять числа). Это даст возможность достаточно быстро (с небольшой погрешностью) определять число (частное) при делении двухзначных или трехзначных чисел.

Для достижения этой цели перед учащимися ставится задача: округлить число 56. Одни учащиеся предлагают для данного числа считать круглым число 60, а другие – 50. Возникает проблема, требующая содержательного обоснования действий обеих групп учащихся. В процессе разрешения возникшего противоречия выясняется, что для доказательства правильности рассуждения может быть использован отрезок числового луча (модель) в промежутке между числами 50 и 60.

Выбирается единичный отрезок-мерка, изображается часть числового луча, на нем отмечаются числа: 50, 60 и 56. Даже зрительное восприятие местоположения числа 56 на числовом луче показывает, что оно пространственно расположено ближе к круглому числу 60. Кроме того, можно показать, что мерку «один» нужно взять только четыре раза, чтобы получить шестьдесят, в то время как для получения числа 50 меркой придется «работать» шесть раз. Аналогичные преобразования выполняются для чисел 51, 52, 53, 54, 57, 58, 59. Специально обсуждается задача округления числа 55, которое равноудалено от чисел 50 и 60. Анализ выполненных преобразований позволяет выделить в округляемых числах их элементы*: округляемую и отбрасываемую цифру (заменяемую нулем)*.

Совместно с учащимися обсуждается и конструируется операционный состав способа округления чисел: 1) определяются округляемая и отбрасываемая цифры числа; 2) производится анализ отбрасываемой цифры: если она будет выражена единицей, двойкой, тройкой, четверкой, то округляемая цифра остается без изменения; если же отбрасываемая цифра 5, 6, 7, 8, 9, то округляемая цифра увеличивается на единицу.

Вводится знаковое обозначение выполняемого действия (оно сохраняет чувственный образ предметных преобразований на луче): округляемую цифру в числе ученики обводят кружком, а отбрасываемую – подчеркивают, при этом стрелкой показывается расположение числа на числовом луче: вправо – к большему числу, влево – к меньшему. Например, в числе 1568, шесть десятков – округляемая цифра, восемь единиц – отбрасываемая, она ближе к десяти, следовательно, округляемая цифра увеличится на единицу: округленное число будет равно 1570.

Выполнение таких преобразований способствует постепенному сворачиванию действия, превращения его в *образную (умственную) операцию*.

Освоение операции округления чисел дает возможность продвинуться вперед в решении проблемы конструирования общего способа действия деления многозначных чисел. Остается «собрать и логически последовательно расположить» все ранее освоенные *операции, входящие в состав действия подбора цифры в частном*.

Для достижения этой цели ученикам предлагается выполнить конкретно-практическое задание: разделить число 1792 на 28. *На первом этапе* действия деления учащиеся выполняют операции, освоенные ранее на уровне специальной цели: определяют первое неполное делимое (179 десятков) и количество цифр в частном (две: десятки и единицы).

На *втором этапе* осуществляется конструирование способа подбора первой цифры в частном. Этот способ включает в себя следующие (ранее освоенные) операции:

1) округление числа делителя до старшего разряда (число 28 округляется до 30);

2) округление неполного делимого до старшего разряда делителя (число 179 округляется до разряда десятков, получается 180);

3) деление округленных чисел (180 делится на 30, получается число 6);

4) проверка полученного числа: делитель умножается на это число (28 умножается на 6, получается 168);

5) сравнение неполного делимого с полученным произведением (179 больше 168);

6) нахождение разницы между неполным делимым и этим произведением (179 – 168 = 11);

7) сравнение разницы с делителем (делитель равен 28, он больше разницы, равной 6);

8) заключение о правильности подбора цифры (числа) частного (цифра 6 подобрана верно). Если же разница будет больше делителя, то цифра подобрана неверно, ее нужно увеличить на единицу.

Таких циклов при делении многозначных чисел может быть несколько, в зависимости от количества цифр, получаемых в частном, каждый из них выполняется по аналогичной схеме.

В данном примере *второй цикл подбора* цифры начинается с того, что выясняется невозможность деления («раскладывания») оставшихся десятков на 28 частей по десяткам, вследствие чего производится превращение, «развязывание» десятков в единицы, их получается 114. В результате такого преобразования получается второе неполное делимое – 114 единиц. Процедура подбора цифры для этой пары чисел осуществляется в соответствии с описанным выше способом.

Ученики выполняют *операции действия деления неполного делимого на делитель*. На начальных этапах, когда «сборка» действия является специальной целью, все операции выполняются развернуто, с полным обоснованием. Постепенно, по мере их освоения (индивидуально для каждого ученика), отдельные операции начинают сворачиваться и переходить в умственный план действия.

Операционный состав позволяет осваивать способ деления многозначных чисел в совместной коллективно-распределенной форме (особенно полезна такая форма взаимодействия учащихся на начальных этапах освоения способа), например при работе парами. При такой работе один ученик выполняет первую операцию способа, второй в это время контролирует и оценивает правильность ее выполнения. Исправляет ошибки, если они есть, затем переходит к выполнению следующей операции (выполняет роль исполнителя), а его партнер осуществляет контроль и оценку ее выполнения.

Способ выполнения действия деления многозначных чисел может быть обобщен и выделен как *особая модель этого действия* в виде математической блок-схемы. В нее входят все операции (1 – 8) способа подбора цифры в частном, которые были выделены и зафиксированы в процессе решения описанной выше конкретно-практической задачи деления многозначных чисел. В качестве дополнения в общий способ включены операции: 9 – если делитель меньше разности, то цифру нужно увеличить на единицу и повторить все операции, начиная с четвертой; и 10 – если делимое меньше результата, то цифру нужно уменьшить на единицу и повторить операции 4 и 5.

Особенности такой модели-схемы состоят в том, что она не выступает наглядно-образной иллюстрацией выполняемого действия, а описывает *обобщенный способ действия*, включая все возможные ситуации, которые могут возникнуть при делении многозначных чисел.

Организация деятельности учащихся по освоению обобщенных способов деления многозначных чисел по описанной выше технологии (как и освоение других математических понятий на основе деятельностного описания их содержания) показывает, что значительное большинство школьников, обучающихся по экспериментальной программе, а также осваивающих только отдельные темы, успешно овладевают таким способом, переносят его в другие условия, проявляют положительное личностное отношение к выполняемым преобразованиям, уверенность в действиях, отсутствие страха перед действием деления многозначных чисел, который часто встречается у учащихся традиционных классов; интерес к вычислительным навыкам (в одном из классов, в котором по данной технологии изучалось только деление, оно стало любимым математическим действием учащихся).

В процессе овладения способом деления многозначных чисел входящие в него операции знакового уровня наполняются соответствующим предметным содержанием, приобретают статус чувственно-предметного действия. Ярким примером этого может служить язык, на котором ученики описывают способ своей работы. Это «язык действий». Разрядные единицы «перекидываются», «перемещаются», «развязываются», «мельчатся», «дробятся». Цифры «держат место» и т. д. И наоборот, в языке не приживаются выражения, смысл которых не соответствует данному предметному содержанию. Например, традиционно в алгоритм деления входит «перенесение» цифры делимого в последующие неполные делимые («сносим цифру»), или при делении круглых чисел на разрядные единицы (10, 100, 1000 и т. д.) используется так называемое «отбрасывание нулей» (для умножения – «приписывание»).

Очевидно, что операции «снести цифру», «отбросить-приписать нули» уже потеряли связь с предметным содержанием. Характерно, что многие ученики, обучающиеся традиционно, понимают смысл данных операций буквально. Ученики, проходившие обучение по нашей программе, не используют такого рода выражения, несмотря на то, что старшие братья и сестры, родители, оказывающие им помощь, активно их употребляют.

Следует отметить, что образующийся в процессе обучения «язык действий» позволяет ученикам мысленно воспроизводить реальные действия. Например, при выполнении деления, на самых первых этапах его освоения, один из учеников, выяснив, что количество имеющихся в числе сотен меньше делителя, замечает: «Вас не хватает на все части. Придется мельчить (выполняет преобразование). Так, теперь вместо сотен у меня тридцать десятков. И вы такие же (показывает на имеющиеся в числе десятки). Добавлю вас к тем, которые получил из сотен. Вот теперь хватит!».

В дальнейшем язык учеников «очищается», становится более обобщенным. В конце освоения способа деления многозначных чисел ученики описывают свои действия на собственно математическом языке.

Характерной особенностью школьников в процессе обучения способу деления является способность производить достаточно сложные вычисления в умственном плане. Они легко делят сколь угодно большие числа на однозначные, фиксируя в отдельных случаях лишь переходы через разряд.

Для диагностики сформированности обобщенных способов деления многозначных чисел были разработаны специальные задания. При этом показателями, характеризующими высокий уровень освоенности способов математических действий, их взаимосвязь с развитием теоретического мышления, выступали: *предметная отнесенность* знаний, показывающая наличие у учащихся такой содержательной абстракции в математическом материале, которая позволяет ему адекватно ориентироваться в заданной системе объектов и отношений; *обобщенность*, позволяющая не только выделять исходное отношение в предметном материале, но и сводить к нему другой предметный материал, использовать приобретенные знания в заданиях нового типа; *системность*, состоящая в способности ученика установить определенный порядок в совокупности усвоенных знаний, определить иерархию, выйти за рамки усвоенного материала, действуя на основе выявленного существенного отношения (В. В. Давыдов, Г. Г. Микулина, О. В. Савельева и др.).

Методика предусматривала создание экспериментальной ситуации, в которой учащимся требовалось применить известный способ действия с многозначными числами в десятичной системе счисления в новых условиях: производить вычисления с денежными единицами, ранее существовавшими в Великобритании. В системе этих денежных единиц нарушено постоянство между элементами (разрядами), принятое в десятичной системе счисления, что отражается в знаковом выражении, в форме записи чисел в данной системе. Вместе с тем системность этих денежных единиц обеспечила сходство структуры этой знаковой формы со структурой знаковой формы десятичной системы, что позволило сохранить принцип поразрядности (дистрибутивности) в действиях с ней. Кроме того, данный предметный материал был не знаком учащимся.

Исследование проводилось в два этапа. На первом этапе ученики знакомились с английскими денежными единицами, их соотношением: 1 фунт стерлингов равен 20 шиллингам; 1 шиллинг равен 12 пенсам. Демонстрировалась форма записи различных денежных сумм с помощью введенных обозначений. Например, сумма в пять фунтов стерлингов, двенадцать шиллингов, четыре пенса записывалась так: 5w 12s 4 d.

На втором этапе учащимся четвертых экспериментальных классов предлагались задания, в которых нужно было выполнить действия с числами в указанной выше знаковой форме. Примеры на деление были составлены так, что обязательно требовалось преобразование разрядов: перевод (дробление) старших на более «мелкие», младшие. В одном из примеров отсутствовал разряд шиллингов; при решении этот разряд нужно было восстановить, чтобы переводить фунты стерлингов в пенсы. Всего учащимся предлагалось решить пять заданий на деление.

Самостоятельно успешно все задания выполнили 45,1% четвероклассников; с незначительной помощью экспериментатора – 22,3%. Четыре задания с помощью экспериментатора выполнили 14,8% четвероклассников, остальные (17,7%) либо выполнили одно-два задания с помощью экспериментатора, либо отказались от выполнения вообще.

Полученные результаты свидетельствуют о достаточно высоком уровне:

– обобщенности (проявился в использовании школьниками способа деления многозначных чисел, освоенного в десятичной системе счисления, в других системах);

– системности (ученики смогли выйти за рамки учебного материала, с которым они работали на уроках математики, установив определенный порядок в соотношении разрядных единиц новой системы);

– предметной отнесенности (учащиеся применяли освоенные ими способы преобразования на незнакомом предметном материале).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Арсеньев А. С., Библер В. С., Кедров Б. М. Анализ развивающегося понятия. М., 1967.

Беспалько В. П. Образование и обучение с участием компьютеров. М.; Воронеж, 2002.

Бодалев А. А., Столин В. В., Аванесов В. С. Общая психодиагностика. СПб., 2000.

Болотов В. А., Рубцов В. В., Фрумин И. Д., Марголис А. А., Каспржак А. Г., Сафронова М. А., Калашников С. П. Информационно-аналитические материалы по итогам первого этапа проекта «Модернизация педагогического образования» // Психологическая наука и образование. 2015. Т. 20, № 5. С. 13–28.

Выготский Л. С. Мышление и речь // Собр. соч.: в 6 т. М., 1982. Т. 2.

Гальперин П. Я. Психология как объективная наука / под ред. А.И. Подольского. М.; Воронеж, 1998.

Гальперин П. Я. Развитие исследований по формированию умственных действий // Психологическая наука в СССР. М., 1959. Т.1. С. 441 – 470.

Гузеев В. В. Планирование результатов образования и образовательная технология. М., 2001.

Гуружапов В. А. К вопросу о предметной диагностике теоретического мышления детей в развивающем обучении (система Д. Б. Эльконина – В. В. Давыдова) // Психологическая наука и образование. 1997. № 4. С. 103–107.

Гуружапов В. А. Учет множественности решений задач на развитие метапредметных компетенций в процессе сценирования учителем учебно-развивающих ситуаций // Психологическая наука и образование. 2012. № 1. С. 40–45.

Гуружапов В. А., Шиленкова Л. Н. Умение анализировать условие задачи как метапредметный результат обучения [Электронный ресурс] // Психологическая наука и образование. 2013. № 5. С. 53–60. URL: http://psyedu.ru/journal/2013/5/Guruzhapov_Shilenkova.phtml.

Давыдов В. В. Проблемы развивающего обучения. М., 1986.

Давыдов В. В. Теория развивающего обучения. М., 1996.

Зак А. З. Различия в мыслительной деятельности младших школьников. М.; Воронеж, 2000.

Захарова И. М. Опыт организации практики студентов бакалавриата по направлению подготовки «Психолого-педагогическое образование» (Учитель начальных классов) // Психологическая наука и образование. 2015. Т. 7, № 4. С. 32–41.

Ковалева Г. С. (ред.). Основные результаты международного исследования образовательных достижений учащихся PISA2000 (краткий отчет). М., 2002.

Ковалева Г. С. (ред.). Основные результаты международного исследования качества математического и естественнонаучного образования TIMSS2003. М., 2004.

Леонтьев А. Н. Психологические вопросы сознательности учения // Избранные психологические произведения. Т. 1. М., 1983. С. 348–381.

Леонтьев А. Н., Запорожец А. В. Восстановление движений. Психофизиологическое исследование восстановления функций руки после ранения. М., 1945.

Лернер И. Я. Качества знаний учащихся. Какими они должны быть. М., 1978.

Лернер И. Я. Процесс обучения и его закономерности. М., 1980.

Магкаев В. Х. Теоретические предпосылки построения метода исследования и объективно-нормативной диагностики развития основ рефлексивного мышления // Развитие основ рефлексивного мышления школьников в процессе учебной деятельности / под ред. В. В. Давыдова, В. В. Рубцова. Новосибирск, 1995.

Максимов Л.К. Особенности учебного моделирования при формировании математических понятий на основе теории содержательного обобщения // Новые исследования в психологии. 1987. № 1. С. 18–23.

Максимов Л. К. Развитие математического мышления младших школьников в условиях учебной деятельности (деятельностный подход к усвоению математики): автореф. дис. … д-ра психол. наук. М., 1993.

Максимов Л. К. Формирование математического мышления у младших школьников. М., 1987.

Марголис А. А. Модели подготовки педагогов в рамках программ прикладного бакалавриата и педагогической магистратуры // Психологическая наука и образование. 2015. Т. 20, № 5. С. 45–64.

Микулина Г. Г., Савельева О. В. К психологической оценке качества знаний у младших школьников // Психологическая наука и образование. 1997. № 2. С. 47–50.

Микулина Г. Г., Савельева О. В. Способы проверки качества усвоения математических знаний // Руководство по оценке качества математических и лингвистических знаний школьников: метод. разраб. М., 1989.

Моро М.И. Математика. 1 класс: учебник для общеобр. учрежд.: в 2 ч. / М.И. Моро, С.И. Волкова, С.В. Степанова. М., 2011. Ч. 1.

Нежнов П. Г. Опосредствование и спонтанность в теоретической картине развития // Педагогика развития: образовательные интересы и их субъекты: материалы 11-й науч.-практ. конф. Красноярск, 2005а.

Нежнов П. Г. Функциональное поле как целевой ориентир в развивающем обучении // Культурно-историческая теория Л.С. Выготского и основания современной психологии развития: материалы Всерос. науч.-практ. конф. (Москва, 14–16 апр. 2005). М., 2005б.

Нежнов П. Г., Карданова Е. Ю., Рябинина Л. А. Исследование процесса присвоения учебного содержания // Вопросы образования. 2013. № 4. С. 168–187.

Нежнов П. Г., Карданова Е. Ю., Эльконин Б. Д. Оценка результатов школьного образования: структурный подход // Вопросы образования. 2011. № 1. С. 26–43.

Нежнов П. Г., Медведев А. М. Метод исследования содержательного анализа у школьников // Вестник Моск. ун-та. Сер. 14. Психология. 1988. № 2. С. 14–25.

Нежнов П. Г., Хасан Б. И., Эльконин Б. Д. (ред.). Мониторинг учебно-предметных компетенций в начальной школе. М., 2007.

Приказ Министерства образования и науки РФ от 14 декабря 2015 г. № 1457 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.02 “Психолого-педагогическое образование” (уровень бакалавриата)» [Электронный ресурс] // Портал федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования. URL: http://fgosvo.ru/uploadfiles/fgosvob/440302.pdf (дата обращения: 30.08.2016).

Приказ Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 18 октября 2013 г. № 544н «Об утверждении профессионального стандарта “Педагог (педагогическая деятельность в сфере дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования) (воспитатель, учитель)”» [Электронный ресурс] // Министерство труда и социальной защиты РФ: Документы. URL:http://www.rosmintrud.ru/docs/ mintrud/orders/129 (дата обращения: 30.08.2016).

Савельева О. В. Психологические критерии качества знаний младших школьников: автореф. дис. … канд. психол. наук. М., 1989.

Симонов В. П. Диагностика степени обученности учащихся: учеб.-справ. пособие. М., 1999.

Скаткин М. Н., Краевский В. В. (ред.). Качество знаний учащихся и пути его совершенствования. М., 1978.

Соколов В. Л. Опыт диагностики анализа и рефлексии как универсальных учебных действий // Психологическая наука и образование. 2012. № 3. С. 29–33.

Федеральный государственный образовательный стандарт общего (начального) образования / МОН РФ. М., 2009.

Фрумин И. Д. Компетентностный подход как естественный этап обновления содержания образования // Педагогика развития: ключевые компетентности и их становление. Красноярск, 2003.

Эльконин Б. Д. Введение в психологию развития. М.: Тривола. 1994.

Эльконин Д. Б. Избранные психологические труды. М., 1989.

Bloom B. (Ed.), (1956), Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals. Handbook I: Cognitive domain, N.Y., Toronto, Longmans, Green.

Pophem W. J. (1987). A twenty-year Perspectives on Educational Objectives // International Journal of Educational Research. V. 11. No 1.