

Научная статья | Original paper

Сравнительный анализ сформированности математических понятий у студентов через призму теории APOS: город против села

Туктамышов Н.К.

ФГБОУ ВО «Казанский государственный архитектурно-строительный университет» (ФГБОУ ВО КГАСУ), г. Казань, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4679-0701>, e-mail: nail1954@gmail.com

Горская Т.Ю.

ФГБОУ ВО «Казанский государственный архитектурно-строительный университет» (ФГБОУ ВО КГАСУ), г. Казань, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7136-8388>, e-mail: gorskaya0304@mail.ru

Представленные в статье материалы посвящены изучению влияния региональных особенностей, определяющих контекст социальной составляющей получения среднего образования (в городе и сельской местности), на сформированность математических понятий у студентов. Авторы ставили целью статьи показать степень сформированности математических понятий у студентов в зависимости от регионального аспекта. В представленном в данной статье исследовании участвовали 96 первокурсников Института строительства Казанского государственного архитектурно-строительного университета. Отмечается, что проведенное исследование основывается на теории APOS (Действие-Процесс-Объект-Схема), которая позволяет поэтапно проследить процесс понимания, выявлять типичные ошибки и классифицировать их. Соответственно ее положениям был разработан опросник для анализа процесса формирования понимания математических концепций у студентов. Эмпирическую основу составили данные письменного опроса, проведенного среди учащихся, с анализом количественных показателей на каждой из стадий APOS с учетом географического разнообразия. Проведена классификация ошибок как концептуальных и процессуальных, позволившая выявить различия между студентами в уровне их компетентности в соответствии со стадиями теории APOS. В работе показана результативность и эффективность применения теории APOS к сравнительному анализу математических навыков городских и сельских студентов. Установлено, что статистически значимых различий в процессуальных ошибках между городскими и сельскими студентами нет. Выявлено, что на стадии Схема имеются статистически значимые различия в усвоении математических понятий между студентами разных групп. Делается вывод о том, что поэтапный анализ когнитивного развития студентов имеет существенное значение для идентификации их потенциала и способствует разработке эффективных методик обучения.

Ключевые слова: математика; функция; классификация ошибок; город; село; теория APOS; действие; процесс; объект; схема.

Дополнительные материалы: Туктамышов Н.К., Горская Т.Ю. Материалы тестов к статье «Сравнительный анализ сформированности математических понятий у студентов через призму теории APOS: город против села»: Набор данных. RusPsyData: Репозиторий психологических исследований и инструментов. Москва. 2024. <https://doi.org/10.48612/MSUPE/xu26-hfxz-h4eh>

Для цитаты: Туктамышов Н.К., Горская Т.Ю. Сравнительный анализ сформированности математических понятий у студентов через призму теории APOS: город против села // Психологическая наука и образование. 2025. Том 30. № 1. С. 93—104. DOI: <https://doi.org/10.17759/pse.2025300107>

Comparative Analysis of the Formation of Mathematical Concepts among Students through the Prism of APOS Theory: Urban vs. Rural

Nail K. Tuktamyshev

Kazan State University of Architecture and Civil Engineering, Kazan, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4679-0701>, e-mail: nail1954@gmail.com

Tatiana Yu. Gorskaya

Kazan State University of Architecture and Civil Engineering, Kazan, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7136-8388>, e-mail: gorskaya0304@mail.ru

The materials presented in the article are devoted to studying the influence of regional characteristics, which define the context of the social component of secondary education (in urban and rural areas), on the formation of mathematical concepts among students. The authors aim to demonstrate the degree of formation of mathematical concepts among students depending on the regional aspect. The study presented in this article involved 96 first-year students from the Institute of Construction at Kazan State University of Architecture and Engineering. The research emphasizes that it is grounded in the APOS theory (Action-Process-Object-Schema), which allows for a step-by-step tracking of the understanding process, identifying typical errors and classifying them. According to its principles, a questionnaire was prepared to analyze the process of understanding mathematical concepts among students. The empirical foundation was formed by the data from a written survey conducted among students, with quantitative indicators analyzed at each stage of APOS, considering geographical diversity. Errors were classified as conceptual and procedural, allowing for the recognition of differences in students' competence levels according to the stages of the APOS theory. The work demonstrates the effectiveness of applying the APOS theory to a comparative analysis of the mathematical skills of urban and rural students. The research revealed no statistically significant differences in procedural errors between urban and rural

students. The study established that at the Schema stage, statistically significant differences in the mastery of mathematical concepts exist between students from different groups. The article concludes that a step-by-step analysis of students' cognitive development is crucial for identifying their potential and contributes to developing effective teaching methods.

Keywords: math; function; error classification; city; village; APOS theory; action; process; object; scheme.

Additional materials: Tuktamyshev N.K., Gorskaya T.Y. Test materials for "Comparative analysis of the formation of mathematical concepts in students through the prism of APOS theory: urban versus rural": Data set. RusPsyData: Repository of psychological research and tools. Moscow. 2024. <https://doi.org/10.48612/MSUPE/xu26-hfxz-h4eh>

For citation: Tuktamyshev N.K., Gorskaya T.Yu. Comparative Analysis of the Formation of Mathematical Concepts among Students through the Prism of APOS Theory: Urban vs. Rural. *Psikhologicheskaya nauka i obrazovanie = Psychological Science and Education*, 2025. Vol. 30, no. 1, pp. 93—104. DOI: <https://doi.org/10.17759/pse.2025300107> (In Russ.).

Введение

В современном мире математическое образование играет ключевую роль в формировании критического мышления и аналитических навыков, необходимых для успешной адаптации к быстро меняющимся технологическим и социальным условиям.

Социальные, культурные, географические, экономические условия, в которых происходит становление учащегося, влияют на формирование мышления [13; 18]. Заметим, что, по данным Росстата, 75% студентов вузов — это выходцы из городов, а 21% — выходцы из сел и поселков, что подчеркивает важность исследований, направленных на изучение особенностей в обучении городских и сельских студентов. Исследования [13] показывают, что сельская молодежь в целом имеет более низкие образовательные стремления, чем их несельские сверстники. В связи с этим обратим внимание на результаты работы коллектива авторов, где предложена модель, учитывающая специфику и региональные риски по повышению качества образования в сельских школах Башкортостана [3]. Р. Парсонс [19] один из первых, кто среди препятствий, возникающих среди сельской и несельской молодежи на пути получения образования, выявил несовпадение

социальных и культурных контекстов. Различие, с одной стороны, состоит в социально-экономическом статусе между сельскими и несельскими семьями [16], а с другой стороны, в профессиональных стремлениях сельской и несельской молодежи [15].

В рамках исследования развития математических навыков студентов и определения факторов, влияющих на это, рассматривались структуры мышления, математическая тревожность [10], изучался фактор эмоционального опыта [18]. Важность упомянутых выше факторов, влияющих на развитие математических навыков студентов, подтверждается исследованиями многих ученых (см., например, [1; 5; 10]), в том числе исследованиями [8; 18] о влиянии этих факторов на понимание математики (хотя на феномен понимания в математике имеются различные точки зрения (см., например, работы [17; 22])). В последнее время наблюдается рост количества исследований в этой области, особенно среди зарубежных ученых (см., например, обзор [20], среди отечественных можно выделить [2]). Для нашего исследования подходит теория APOS, которая выделяется акцентом на последовательном развитии понимания математических понятий через внутреннее конструирование и рефлексию. Эта теория

была специально создана для изучения ментальных структур в ходе обучения математике. Основанная на принципах конструктивизма и опирающаяся на работы Ж. Пиаже [5] теория APOS была создана Э. Дубинским [14] для анализа процесса структурирования математических понятий и концепций в сознании обучающегося. Ментальные конструкции, основанные на рефлексивной абстракции [14], в рамках теории APOS определены как Действие (Action), Процесс (Process), Объект (Object) и Схема (Schema). Арнон и другие исследователи [9] считают, что «APOS — это теория о том, как могут быть усвоены математические понятия». Подробное описание применения теории APOS в обучении математике представлено в обзорной статье [20].

Выбор темы исследования обусловлен тем, что проблемы, связанные с влиянием региональных особенностей обучения молодежи на понимание математических понятий и концепций, мало изучены. Очевидно, что внешние факторы, указанные ранее, неявно влияют на стадии APOS, но в данной работе основное направление исследования — определение степени сформированности математических понятий у студентов через призму теории APOS в региональном аспекте. Проблема исследования: влияние региональных особенностей получения среднего образования (город и сельская местность) на сформированность математических понятий у студентов.

Целью представленного в данной статье исследования являлось определение степени сформированности математических понятий у студентов в контексте социального и географического разнообразия через призму теории APOS. Предполагалось, что социально-географическое происхождение студентов и уровень их базовой математической подготовки влияют на степень сформированности математических понятий, что выражается в количестве и характере концептуальных и процессуальных ошибок на каждой стадии теории APOS. Согласно этому работа построена на анализе ошибок студентов на различных этапах усвоения математических понятий.

Для достижения указанной цели необходимо решение следующих задач:

— установить, как студенты из разных географических (городские, сельские) и социальных контекстов понимают и применяют основные математические понятия на каждой стадии теории APOS;

— провести сравнительный анализ частоты и типов ошибок на стадиях APOS между студентами различных групп.

Методы

Как уже отмечалось выше, в исследовании применялась теория APOS, разработанная Э. Дубинским и его коллегами [9], в качестве теоретического фундамента. Теория APOS (Action-Process-Object-Schema) является модификацией идей Пиаже [5] о рефлексивной абстракции, применяемой для анализа формирования ментальных структур учащихся, необходимых для освоения математики (см. подробнее [9]). Рефлектирующая абстракция акцентирует внимание на универсальных характеристиках действий, которые не связаны с конкретными математическими объектами, с которыми эти действия выполняются [8].

В рамках APOS Действие определяется как манипуляция с уже существующим математическим объектом, воспринимаемым учащимся как внешний. Действия основываются на правилах и алгоритмах, которые учащиеся многократно практикуют под руководством преподавателя, и которые связаны с конкретными объектами. Когда Действие повторяется и учащийся реагирует на него, оно может трансформироваться в Процесс, переходя из внешнего во внутренний план. Осуществление этой стадии состоит в интериоризации действий в процедуры, позволяющей обучающимся самостоятельно выполнять действия или обобщать действия в процессы, действительные для математического объекта того же типа.

Когда контекст, в котором учащийся конструирует Процесс, меняется, он может ощутить необходимость в действиях над ним для понимания новых проблемных ситуаций.

В этом случае учащийся должен воспринимать Процесс как целостный объект, как самостоятельную сущность. Если студент способен выполнять действия над Процессом или представлять себе эти действия, то говорят, что Процесс инкапсулирован в Объект. В контексте функций это означает, что студент может, например, определять интервалы возрастания и убывания функций. Действия, Процессы, Объекты и другие, ранее созданные ментальные структуры, связанные с определенным математическим понятием, могут быть объединены в единую структуру, известную как Схема. Схема активируется в ответ на проблемную ситуацию, которую учащийся воспринимает как проявление определенного математического понятия.

В качестве основных методов в исследовании использовались:

— системный подход для анализа научно-педагогических публикаций по проблематике исследования — для выявления и обобщения теоретических основ проблемы исследования;

— контент-анализ результатов, полученных с помощью опроса — для анализа понимания математических понятий согласно теории APOS;

— методы статистического анализа: критерий Манна-Уитни, Шапиро-Уилка, Краскела-Уоллиса.

Это исследование анализирует данные и ошибки студентов на различных этапах, предлагая способы их исправления.

Эмпирический этап исследования был проведен на базе Казанского государственного архитектурно-строительного университета. Исследование проводилось поэтапно.

1. Теоретический этап включал обоснование предпосылок исследования и создание анкеты для оценки готовности студентов к осмыслению и определения этапов их понимания математических концепций по теории APOS.

2. На экспериментальном этапе был проведен опрос для выявления ошибок и уровня понимания математических понятий у каждого студента и осуществлен анализ полученных результатов.

В опросе участвовало 96 студентов первого курса, из которых 57 представительниц женского пола и 39 представителей мужского пола, обучающихся по направлению подготовки «Строительство» в Казанском государственном архитектурно-строительном университете (КГАСУ). Возраст студентов, участвовавших в опросе, составлял 17—18 лет.

В исследовании использовался разработанный авторами опросник, составленный из типичных заданий ЕГЭ, размещенных на образовательном портале для подготовки к экзаменам «Решу ЕГЭ» (<https://ege.sdamgia.ru/>), и включающий задания, адаптированные под теорию APOS, для оценки сформированности математических понятий (алгебраические выражения, функции, производные, решения уравнений и неравенств, графики функций) у студентов. Задания из ЕГЭ использовались на стадиях Действие и Процесс. Примеры заданий включают: **Действие** (решение простых уравнений), **Процесс** (нахождение наименьшего значения функции на отрезке, точки минимума функции), **Объект** (анализ свойств функций, нахождение производных), **Схема** (построение графиков функций, решение сложных систем уравнений). Кроме того, в опроснике содержались вопросы о балле ЕГЭ, названии населенного пункта, откуда приехали студенты, и учебного заведения общего образования, которое они окончили, о поле обучающегося.

Приведем элементы заданий опросника:

«Укажите населенный пункт, откуда приехали, учебное заведение, которое там окончили, балл, полученный по математике ЕГЭ, и свой пол, далее решите следующие примеры.

Часть 2 (Process)

1. Найдите наименьшее значение функции $y = (8 - x)e^{9-x}$ на отрезке $[3; 10]$.

2. Найдите точку минимума функции

$$y = -\frac{x}{x^2 + 256}.$$

Здесь в качестве примера приведено задание для части 2 (Процесс), и оно направлено на оценку способности студентов понимать и выполнять последовательные действия или

алгоритмы, что является ключевой характеристикой стадии Процесс в теории APOS.

Результаты

В результате анализа полученных данных было решено систематизировать информацию по социальной составляющей, т.е. разбить населенные пункты на три категории: г. Казань, другие города и поселки (села) в сельских районах страны. Кроме того, важной составляющей систематизации явился балл ЕГЭ, были выделены две категории: 40—64 баллов, 65—100 баллов, эти категории определяют базовый уровень знаний по математике. Выбор 65 баллов в качестве граничного значения обусловлен тем, что средний балл по математике для поступивших в технические вузы Казани (КГАСУ, КГЭУ, КНИТУ) в 2023 году составляет 65 баллов. В результате получены следующие данные по контингенту, участвующему в опросе, представленные в таблице.

Анализируя данные, представленные в таблице, можно отметить, что две трети контингента, поступившего на первый курс, имеют балл ЕГЭ выше 65. Кроме того, из всех поступивших на первый курс 35,4% — это жители Казани, 42,7% приезжают из других городов (малых городов) Татарстана и России, 21,9% — сельские жители. Отметим также, соотношение студентов с баллами ЕГЭ выше 65: из Казани только 19 из 64, что составляет 29,7%, из других городов 28 из 64, соответственно 43,8% и оставшиеся 26,5% студентов из сельской местности. Таким образом, преимущественное большинство первокурсников, имеющих высокие баллы по ЕГЭ — это представители других городов. Если рассматривать процентное соотношение первокурс-

ников из каждой категории, т.е. Казань, другие города, села, имеющих баллы выше 65, и тех, кто имеет ниже 65 баллов, то получается следующая ситуация. Среди поступивших из Казани 55,8% имеют баллы большие 65, следовательно, 44,2% — ниже 65, других городов — это распределение 69,2% на 30,8%, а из сел — 80,9% на 19,1%.

В этом исследовании, следуя работам [20], ошибки классифицируются как концептуальные и процессуальные, хотя существуют и другие методы классификации ошибок [4]. Концептуальные ошибки указывают на непонимание сущности задачи, неспособность уловить связи внутри задачи и между различными понятиями. Процессуальные ошибки возникают из-за неправильного выполнения операций или алгоритмов, демонстрируя трудности учащихся с корректным выполнением технических, формальных преобразований, даже при понимании основных концепций. Такой подход к анализу ошибок через призму теории APOS, особенно при изучении темы «Дифференцирование», как было показано в исследовании [21], оказался весьма продуктивным. Концептуальные и процессуальные ошибки диагностируются: анкетным методом с заданиями, соответствующими стадиям теории APOS, путем анализа ответов для выявления ошибок, а также проверкой и оценкой ответов вручную. Результаты теста Шапиро-Уилка для проверки данных Казани, села, других городов показали, что эти данные не соответствуют нормальному распределению. Тест Краскела-Уоллиса для каждой стадии (Действие, Процесс, Объект, Схема) показал, что в случае процессуальных ошибок статистически значимых различий в 3 группах нет, а в

Таблица

Количественный и качественный состав участников опроса

Баллы/ населенные пункты	Казань (чел.)	Другие города (чел.)	Поселки (села) (чел.)	Всего (чел.)
40—64	15	13	4	32
65—100	19	28	17	64
Всего (чел.)	34	41	21	96

случае концептуальных ошибок на стадии Схема обнаружены статистически значимые различия (p -значение равно 0,001, что значительно превышает уровень значимости 0,05). Далее проводилось попарное сравнение по критерию Манна-Уитни.

Приведем результаты анализа совершенных студентами процессуальных ошибок (см. рис. 1).

К распространенным процессуальным ошибкам относятся некорректное использование скобок и подстановок, арифметические ошибки, неумение отделить лишние корни. Выпускники сельских школ на всех стадиях совершают меньше ошибок, чем

другие студенты. На стадии Процесс совершается больше всего процессуальных ошибок всеми группами обучающихся. Анализ на основе критерия Манна-Уитни показал, что различия в числе процессуальных ошибок между двумя различными местоположениями не являются статистически значимыми на уровне значимости 0,05.

Сравнение концептуальных ошибок было проведено на стадиях Object и Schema, так как именно они характеризуют формирование целостных понятий и концепций у студентов.

Приведем графическое представление (рис. 2) для анализа концептуальных ошибок на стадии Object с помощью Boxplot [12].

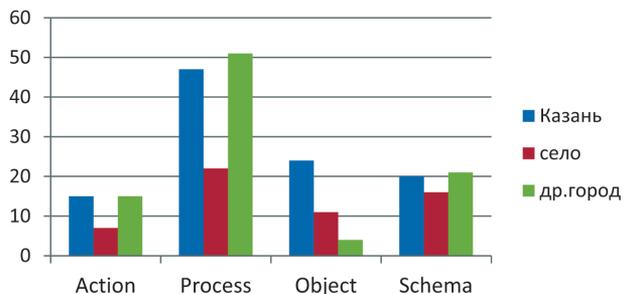


Рис. 1. Диаграмма распределения процессуальных ошибок по стадиям APOS для студентов из Казани, сельской местности и других городов: на вертикальной оси отмечены деления (от 0 до 60), соответствующие числу процессуальных ошибок

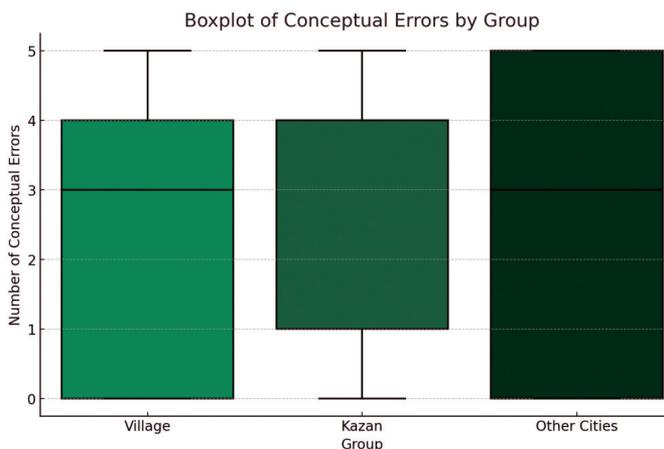


Рис. 2. Графическое представление концептуальных ошибок на стадии Object

Boxplot представляет собой графическое отображение пяти числовых характеристик данных: минимума, первого квартиля (Q1), медианы, третьего квартиля (Q3) и максимума, а также выбросов.

Проведенный статистический анализ на стадии Object показал, что r -значение для села и Казани — $p=0,6496$, села и других городов — $p=0,5804$, Казани и других городов — $p=0,35133$. Во всех сравнениях r -значения выше 0,05, что указывает на отсутствие статистически значимых различий в числе концептуальных ошибок между студентами из села, Казани и других городов на стадии Object. Медианные значения: село и другие города — 3,0, Казань — 4,0.

Анализ концептуальных ошибок на стадии Schema выявил статистически значимые различия между Казанью и селом ($p=0,0035$), а также между Казанью и другими городами ($p=0,0007$). Между селом и другими городами значимых различий не найдено ($p=0,7254$).

Для наглядного отображения различий между группами села, Казани и других городов приведем график Boxplot (рис. 3) распределения числа концептуальных ошибок для каждой группы на стадии Schema и добавим на нем медианные значения (отмечены желтым цветом).

На представленном Boxplot видно, что в Казани медианное значение концептуальных ошибок (7,0) выше, чем в селе и других городах (обе 4,0), с большим разбросом ошибок. Распределения в селе и других городах схожи, с меньшим разбросом. Медиана равна 7, потому что в точке, делящей половину данных, значение равно 7. Q3 равен 7, так как 75% данных приходятся на значения, которые равны или меньше 7, и поскольку вокруг этой позиции все значения равны 7. Таким образом, хотя не все 34 студента делают ровно 7 ошибок, достаточное количество студентов (22 из 34) делают ровно 7 ошибок.

Результаты теста Манна-Уитни подтверждают статистически значимые различия между Казанью и другими группами, в то время как между селом и другими городами различий нет.

Для иллюстрации приведем примеры типичных процессуальных и концептуальных ошибок.

На рис. 4 видно, что решение не приведено. По заданию требовалось в заданную функцию $h(x)$ подставить в качестве аргументов $(3+x)$ и $(3-x)$, затем упростить получившееся выражение. Очевидно, что налицо концептуальная ошибка, т.к. студент не понял постановку задачи.

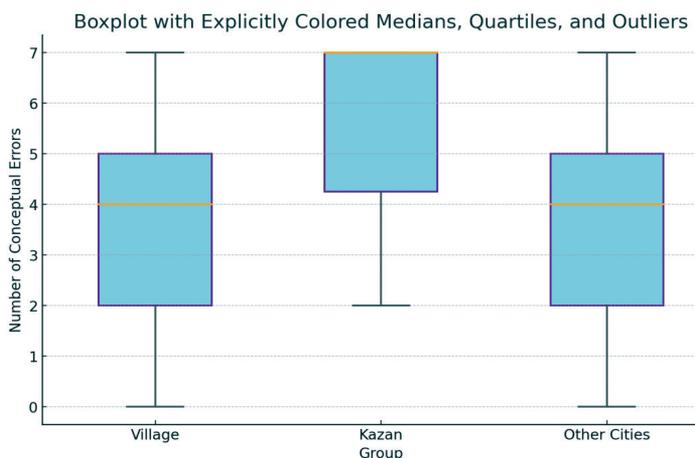


Рис. 3. Графическое представление концептуальных ошибок на стадии Schema

Уаеръз

$$h(3+x) + h(3-x) \text{ если } h(x) = \sqrt[9]{x} + \sqrt[9]{x-6}$$

$$\sqrt[9]{3+x} + \sqrt[9]{(3+x)-6} = h(3+x). \text{ Не подходит. Мо ответ: 0.}$$

Рис. 4. Пример концептуальной ошибки в работе студента

Следующий пример (рис. 5) связан с этим же заданием, но в нем уже имеет место процессуальная ошибка в виде описки.

Была совершена опечатка во время проведения подстановки, так, в третьей строчке во втором слагаемом ошибочно под корнем вместо числа 3 написано «х», т.е. под корнем написано «х+х-6», а надо было написать «х+3-6».

Дополнительно сообщаем, что данные, на основании которых проводились эти исследования, представлены в статье [7].

Обсуждение

Как замечено в работе [17], поэтапное исследование познавательного процесса дает возможность осознать отношение между математической деятельностью и математическим мышлением. Научная новизна организованного и проведенного нами исследования состоит в определении влияния социальной составляющей на сформированность математических понятий у студентов. Стадии APOS как фреймворк помогают выявить «пустоты» в образовании и потенциал студента. Вместе с тем следует заметить, что в исследовании

в явной форме не учитывались качество преподавания, социально-экономический статус, психологические особенности и предыдущий образовательный опыт студентов.

Анализ ответов студентов показывает, что большинство из них в освоении дифференциального исчисления находятся на стадии «Действие», что подтверждает слабость критического мышления [11]. Эксперименты выявили, что процессуальные ошибки связаны с недостаточным знанием школьного материала по функциям, элементарным алгебраическим преобразованиям и связи между математическим символом и его визуализацией, что соответствует выводам из работы [6].

Данные, полученные в работе, показывают, что сельские и иногородние студенты демонстрируют лучшие результаты по сравнению с выпускниками Казани, особенно на сложных стадиях APOS. Большое число концептуальных ошибок казанских студентов на стадии Схема связано с тем, что они хуже справлялись с исследованием графиков функций, а также с решением иррационального уравнения.

№ 1.

$$h(3+x) + h(3-x) \text{ если } h(x) = \sqrt[9]{x} + \sqrt[9]{x-6}$$

$$h(x) = \sqrt[9]{x} + \sqrt[9]{x-6}$$

$$h(3+x) = \sqrt[9]{3+x} + \sqrt[9]{x+x-6} = \sqrt[9]{3-x} + \sqrt[9]{3+x}$$

$$h(3-x) = \sqrt[9]{3-x} + \sqrt[9]{3-x-6} = -\sqrt[9]{3-x} - \sqrt[9]{3+x}$$

$$h(3+x) + h(3-x) = 0$$

Рис. 5. Пример процессуальной ошибки в работе студента

Студенты, набравшие более 65 баллов по ЕГЭ, показали лучшие результаты на всех стадиях APOS по сравнению с теми, кто набрал менее 65 баллов. Это подтверждает значимость баллов ЕГЭ как индикатора базовых знаний по математике.

Заключение

Теоретические и экспериментальные результаты, полученные в данном исследовании, позволяют сделать некоторые выводы.

1. Использование теории APOS для анализа различий между городскими и сельскими студентами позволяет выявить препятствия в изучении математики и разрабатывать стратегии обучения, соответствующие их образовательному опыту. Это включает адаптацию учебных материалов и методов, а также создание поддерживающих программ, способствующих развитию критически важных стадий в процессе обучения, определенных в рамках теории APOS.

2. Ошибки, совершаемые студентами в ходе обучения, носят концептуальный и процессуальный характер. Различия в процессуальных ошибках между группами

студентов на стадиях Действие и Процесс статистически не значимы, то есть могут быть случайными. Концептуальные ошибки совершаются, как правило, на стадиях Объект и Схема, что указывает на сложности в глубоком понимании математических понятий у большей части студентов. На стадии Схема между группами Казани и села, а также между Казанью и другими городами имеются статистически значимые различия.

3. Практическая значимость этого исследования заключается в возможности мониторинга успеваемости студентов, оценке их понимания математических концепций и организации групповых дискуссий, которые помогают трансформировать отдельные действия в последовательный процесс.

Перспективы дальнейших исследований включают изучение эффективности педагогических интервенций и технологий для уменьшения концептуальных и процессуальных ошибок на разных стадиях APOS, влияние современных технологий и инновационных методов обучения на формирование математических понятий у студентов, а также кросс-культурные исследования.

Литература

1. *Выготский Л.С.* Мышление и речь. Издательство «Лабиринт». М. 1999. 352 с.
2. *Громова Е.В., Сафуанов И.С.* Применение компьютерной математической программы GEOGEBRA в обучении понятия функции // Образование и наука. 2014. № 4(113). С. 113—131.
3. *Гумерова Ф.Ф., Амирова Л.А., Калимуллина Г.И., Мустаев А.Ф., Гумерова О.В.* Определение условий повышения качества образования в сельских школах с низкими образовательными показателями // Science for education today. 2023. Т. 13. № 1. С. 85—107. DOI:10.15293/2658-6762.2301.05
4. *Далингер В.А.* Типичные ошибки учащихся по математике и их причины // Современные наукоемкие технологии. 2014. № 12-1. С. 94—97.
5. *Пиаже Ж.* Психогенез знаний и его эпистемологическое значение // Семиотика. М.: Радуга, 1983. С. 90—101. URL: https://platona.net/load/knigi_po_filosofii/filosofija_jazyka/semiotika/32-1-0-4352
6. *Туктамышов Н.К., Горская Т.Ю.* О роли визуализации в обучении математике (на примере понятия функции) // Вектор науки Тольяттинского

- государственного университета. Серия: Педагогика, психология. 2022. № 3(50). С. 51—58. EDN: YHNPRL DOI:10.18323/2221-5662-2022-3-51-58
7. *Туктамышов Н.К., Горская Т.Ю.* Материалы тестов к статье «Сравнительный анализ сформированности математических понятий у студентов через призму теории APOS: город против села»: Набор данных. RusPsyData: Репозиторий психологических исследований и инструментов. Москва. 2024. DOI:10.48612/MSUPE/xu26-hfxz-h4eh
 8. *Шварц А.Ю.* Роль чувственных представлений в овладении математическими понятиями: дисс. ... канд. психол. наук. 2011. 259 с. DOI:10.54359/ps.v4i17.853
 9. *Arnon I.* APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. New York: Springer, 2014. 254 p. DOI:10.1007/978-1-4614-7966-6
 10. *Asherfi M.H.* Cognitive and motivational underpinning of mathematical learning difficulties: discussion. International handbook of mathematical learning difficulties. Switzerland: Springer, 2019. P. 505—518. DOI:10.1007/978-3-319-97148-330

11. Azizi H., Herman T. Critical thinking and communication skills of 10th grade students in trigonometry // International Conference on Innovation In Research IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1469. 2020, 012161. DOI:10.1088/1742-6596/1469/1/012161
12. Benjamini Y. Opening the Box of a Boxplot // The American Statistician: journal. 1988. Vol. 42. No. 4. P. 257—262. DOI:10.2307/2685133.JSTOR2685133
13. Chesters J., Cuervo H. (In) equality of opportunity: educational attainment of young people from rural, regional and urban Australia // The Australian educational researcher. 2022. Vol. 49(1). P. 43—61. DOI:10.1007/s13384-021-00432-0
14. Dubinsky E. Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking / (eds.) Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library; ed by D. Tall. Dordrecht: Springer, 2002. Vol. 11. DOI:10.1007/0-306-47203-1_7
15. Francis R.D. Movin' on up? The role of crowing up rural in shaping why Working — class men do-and-don't — seek to improve their labor-market prospects // RSF: The Russel Sage Foundation journal of the social sciences. 2022. Vol. 8(4). P. 68—86. DOI:10.7758/RSF.2022.8.4.03
16. Koricich A., Chen X., Hughes R.P. Understanding the effects of rurality and socio economic status on college attendance and institutional choice in the United States // Review of higher education. 2018. Vol. 4(2). P. 281—305. DOI:10.1353/rhe.2018.0004
17. Kuzniak A., Nechache A. Understanding mathematical work and mathematical thinking through individuals' actions analyses: a networking approach // Proceedings of the CERME12. 2022. P. 2986—2994. URL: <https://hal.science/hal-03749271/document>
18. Mali A., Martinez P.H., Anastasakis M., Kouvela E., Treffert-Thomas S. The interplay between person and environment, cognition and emotion: Using the concept of perezhivanie in Mathematics Education // Proceedings of the CERME12. 2022. P. 3004—3012. URL: <https://hal.science/hal-03749275/document>
19. Parsons R. Moving Out to Move Up: Higher Education as a Mobility Pathway in the Rural South // RSF: The Russell Sage Foundation Journal of the Social Sciences. 2022. Vol. 8(3). P. 208—229. DOI:10.7758/RSF.2022.8.3.09
20. Şefik Ö., Erdem Uzun Ö., Dost Ş. Content Analysis of the APOS Theory Studies on Mathematics Education Conducted in Turkey and Internationally: A Meta-Synthesis Study // Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi. 2021. Vol. 15(2). P. 404—428. DOI:10.17522/balikesirnef.1020526
21. Siyepu S.W. Analysis of errors in derivatives of trigonometric functions // International Journal of STEM Education. 2015. 2:16. DOI:10.1186/s40594-015-0029-5
22. Tuktamyshov N. Mathematical picture of the world and understanding // Proceedings of the CERME12. 2022. P. 3032—3036. URL: <https://hal.science/hal-03749363/document>

References

1. Vygotzky L.S. Myshlenie i rech' [Thinking and speech]. Labyrinth Publishing House Moscow. 1999. 352 p. (In Russ.).
2. Gromova E.V., Safuanov I.S. Primenenie komp'yuternoi matematicheskoi programy GEOGEBRA v obuchenii ponyatiya funktsii [Application of computer mathematical program GEOGEBRA in teaching the concept of function]. *Education and Science*, 2014, no. 4(113), pp. 113—131. (In Russ.).
3. Gumerova F.F., Amirova L.A., Kalimullina G.I., Mustaev A.F., Gumerova O.V. Opredelenie uslovii povysheniya kachestva obrazovaniya v sel'skikh shkolakh s nizkimi obrazovatel'nymi pokazatelyami [Determination of conditions for improving the quality of education in rural schools with low educational performance]. *Science for education today*, 2023. Vol. 13, no. 1, pp. 85—107. DOI:10.15293/2658-6762.2301.05 (In Russ.).
4. Dalinger V.A. Tipichnye oshibki uchashchikhsya po matematike i ikh prichiny [Typical errors of students in mathematics and their causes]. *Modern science-intensive technologies*, 2014, no. 12-1, pp. 94—97. (In Russ.).
5. Piaget J. Psikhogenez znaniy i ego epistemologicheskoe znachenie [Psychogenesis of knowledge and its epistemological significance]. *Semiotics. Moscow: Raduga*, 1983, pp. 90—101. URL: https://platon.net/load/knigi_po_filosofii/filosofiya_jazyka/semiotika/32-1-0-4352 (In Russ.).
6. Tuktamyshov N.K., Gorskaya T.Y. O roli vizualizatsii v obuchenii matematike (na primere ponyatiya funktsii) [About the role of visualization in teaching mathematics (on the example of the concept of function)]. *Vector of Science of Togliatti State University. Series: Pedagogy, Psychology*. 2022, no. 3(50), pp. 51—58. EDN: YHNPRL DOI:10.18323/2221-5662-2022-3-51-58 (In Russ.).
7. Tuktamyshov N.K., Gorskaya T.Y. Test materials for “Comparative analysis of the formation of mathematical concepts in students through the prism of APOS theory: urban versus rural”: Data set. RusPsyData: Repository of psychological research and tools. Moscow. 2024. DOI:10.48612/MSUPE/xu26-hfxz-h4eh
8. Shvarts A.Yu. Rol' chuvstvennykh predstavleniy v ovladenii matematicheskimi ponyatiyami [The role of sensual representations in mastering mathematical

concepts]: diss. ... kand. psychol. Sciences. 2011. 259 p. DOI:10.54359/ps.v4i17.853 (In Russ.).

9. Arnon I. APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. New York: Springer, 2014. 254 p. DOI:10.1007/978-1-4614-7966-6

10. Asherft M.H. Cognitive and motivational underpinning of mathematical learning difficulties: discussion. International handbook of mathematical learning difficulties. 2019. Switzerland: Springer, pp. 505—518. DOI:10.1007/978-3-319-97148-330

11. Azizi H., Herman T. Critical thinking and communication skills of 10th grade students in trigonometry. *International Conference on Innovation In Research IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series* 1469. 2020, 012161. DOI:10.1088/1742-6596/1469/1/012161

12. Benjamini Y. Opening the Box of a Boxplot. *The American Statistician: journal*, 1988. Vol. 42, no. 4, pp. 257—262. DOI:10.2307/2685133. JSTOR2685133

13. Chesters J., Cuervo J. (In) equality of opportunity: educational attainment of young people from rural, regional and urban Australia. *The Australian educational researcher*, 2022. Vol. 49(1), pp. 43—61. DOI:10.1007/s13384-021-00432-0

14. Dubinsky E. Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking (eds). *Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library; ed by D. Tall. Dordrecht: Springer*, 2002. Vol. 11. DOI:10.1007/0-306-47203-1_7

15. Francis R.D. Movin' on up? The role of crowing up rural in shaping why Working — class men do-and-don't — seek to improve their labor-market prospects *RSF: The Russel Sage Foundation journal of the social sciences*, 2022. Vol. 8(4), pp. 68—86. DOI:10.7758/RSF.2022.8.4.03

16. Koricich A., Chen X., Hughes R.P. Understanding the effects of rurality and socio economic status on college attendance and institutional choice in the United States. *Review of higher education*, 2018. Vol. 4(2), pp. 281—305. DOI:10.1353/rhe.2018.0004

17. Kuzniak A., Nechache A. Understanding mathematical work and mathematical thinking through individuals' actions analyses: a networking approach. *Proceedings of the CERME12*, 2022, pp. 2986—2994. URL: <https://hal.science/hal-03749271/document>

18. Mali A., Martinez P.H., Anastasakis M., Kouvela E., Treffert-Thomas S. The interplay between person and environment, cognition and emotion: Using the concept of perezhivanie in Mathematics Education. *Proceedings of the CERME12*, 2022, pp. 3004—3012. URL: <https://hal.science/hal-03749275/document>

19. Parsons R. Moving Out to Move Up: Higher Education as a Mobility Pathway in the Rural South. *RSF: The Russell Sage Foundation Journal of the Social Sciences May* 2022. Vol. 8(3), pp. 208—229. DOI:10.7758/RSF.2022.8.3.09

20. Şefik Ö., Erdem Uzun Ö., Dost Ş. Content Analysis of the APOS Theory Studies on Mathematics Education Conducted in Turkey and Internationally: A Meta-Synthesis Study. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 2021. Vol. 15(2), pp. 404—428. DOI:10.17522/balikesirnef.1020526

21. Siyepu S.W. Analysis of errors in derivatives of trigonometric functions. *International Journal of STEM Education*, 2015. 2:16. DOI:10.1186/s40594-015-0029-5

22. Tuktamyshov N. Mathematical picture of the world and understanding. *Proceedings of the CERME12*, 2022, pp. 3032—3036. URL: <https://hal.science/hal-03749363/document>

Информация об авторах

Туктамышов Наил Кадырович, доктор педагогических наук, профессор кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Казанский архитектурно-строительный университет» (ФГБОУ ВО КГАСУ), г. Казань, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4679-0701>, e-mail: nail1954@gmail.com

Горская Татьяна Юрьевна, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Казанский архитектурно-строительный университет» (ФГБОУ ВО КГАСУ), г. Казань, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7136-8388>, e-mail: gorskaya0304@mail.ru

Information about the authors

Nail K. Tuktamyshov, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Department of Higher Mathematics, Kazan State University of Architecture and Civil Engineering, Kazan, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4679-0701>, e-mail: nail1954@gmail.com

Tatiana Yu. Gorskaya, PhD in Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Kazan State University of Architecture and Civil Engineering, Kazan, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7136-8388>, e-mail: gorskaya0304@mail.ru

Получена 22.10.2024

Received 22.10.2024

Принята в печать 28.02.2025

Accepted 28.02.2025