

1

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

MODELLING AND DATA ANALYSIS

SCIENTIFIC JOURNAL

2025

ISSN: 2219-3758
ISSN: 2311-9454 (ONLINE)

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

2025 • Том. 15 • № 1

MODELLING AND DATA ANALYSIS

SCIENTIFIC JOURNAL

2025 • Vol. 15 • № 1



Московский государственный
психолого-педагогический университет
Moscow State University
of Psychology & Education

Моделирование и анализ данных

Главный редактор:

Л.С. Куравский ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Заместители главного редактора:

С.Д. Кулик МИФИ, Россия

А.В. Пантелеев МАИ, Россия

Н.И. Сельвесюк МАИ, Россия

Редакционный совет

Председатель редакционного совета:

Г.Г. Амосов МИАН, Россия

Члены редакционного совета:

В.А. Барabanщиков ФГБОУ ВО МГППУ, Россия
Питер Бентлер Калифорнийский университет
Лос-Анджелеса, США

А.В. Горбатов МИСиС, Россия
Л.С. Куравский ФГБОУ ВО МГППУ, Россия
Леонид Либкин Эдинбургский университет,
Великобритания

А.А. Марголис ФГБОУ ВО МГППУ, Россия
В.В. Рубцов ФГБОУ ВО МГППУ, Россия
Д.В. Ушаков ИП РАН, Россия
Девид Фрэнсис Университет Хьюстона, США

Редакционная коллегия:

К.К. Абгарян ФИЦ ИУ РАН, Россия
Г.Г. Амосов МИАН, Россия
М.В. Воронов ФГБОУ ВО МГППУ, Россия
Е.Л. Григоренко МГУ им. М.В. Ломоносова,
Россия; Йельский университет,
США

В.К. Захаров МГУ им. М.В. Ломоносова,
Россия

А.И. Кибзун МАИ, Россия
Леонид Либкин Эдинбургский университет,
Великобритания

В.Р. Милов НГТУ им. Р.Е. Алексеева,
Россия

А.В. Наумов МАИ, Россия
Д.Л. Ревизников МАИ, Россия
Холлинг Хайнц Университет Мюнстера,
Германия

Девид Фрэнсис Университет Хьюстона,
США

К.В. Хорошенков Брэдфордский университет,
Великобритания

Г.А. Юрьев ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Моделирование и анализ данных

Учредитель и издатель ФГБОУ ВО МГППУ

Издаётся с 2011 года. Периодичность: 4 раза в год.

Свидетельство регистрации СМИ: ПИ № ФС77-66444

Дата регистрации: 14.07.2016

Формат: 70×100/16

Все права защищены. Название журнала, логотип, рубрики, все тексты и иллюстрации являются собственностью ФГБОУ ВО МГППУ и защищены авторским правом. Перепечатка материалов и использование иллюстраций допускается только с письменного разрешения редакции.

© ФГБОУ ВО «Московский государственный психолого-педагогический университет», 2025, № 1

Modelling and Data Analysis

Editor-in-Chief:

L.S. Kuravsky MSUPE, Russia

Deputy Editors-in-Chief:

S.D. Kulik MEPH, Russia

A.V. Panteleev MAI, Russia

N.I. Selvesyuk MAI, Russia

The Editorial Council

Chairman of the Editorial Council:

G.G. Amosov MI RAS, Russia

The Members of the Editorial Council:

V.A. Barabanshikov MSUPE, Russia
Peter Bentler University of California,
USA

A.V. Gorbатов MISIS, Russia
L.S. Kuravsky MSUPE, Russia
Leonid Libkin University of Edinburgh,
UK

A.A. Margolis MSUPE, Russia
V.V. Rubtsov MSUPE, Russia
D.V. Ushakov IP RAS, Russia
David Francis University Of Houston, USA

The Editorial Board:

K.K. Abgaryan IU RAS, Russia
G.G. Amosov MI RAS, Russia
M.V. Voronov MSUPE, Russia
E.L. Grigorenko Lomonosov Moscow State
University, Russia;
Yale University, USA

V.K. Zakharov Lomonosov Moscow State
University, Russia

A.I. Kibzun MAI, Russia
Leonid Libkin University of Edinburgh,
UK

V.R. Milov NNSTU n.a. R.E. Alekseev,
Russia

A.V. Naumov MAI, Russia
D.L. Reviznikov MAI, Russia
Holling Heinz University Of Münster,
Germany

David Francis University Of Houston,
USA

K.V. Horoshenkov University of Bradford,
UK

G.A. Yuryev MSUPE, Russia

Modelling and Data Analysis

Founder & publisher MSUPE

Frequency: since 2011

Published: 4 times a year

The mass medium registration certificate:

PN № ФС77-66444.

From: 14.07.2016

Format: 70×100/16

All rights reserved. Journal title, logo, rubrics, all texts and images are the property of MSUPE and copyrighted. Using reprints and illustrations is allowed only with the written permission of the publisher.

© MSUPE, 2025, no. 1



◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆ СОДЕРЖАНИЕ ◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

АНАЛИЗ ДАННЫХ

Потенко М.А.

Обнаружение частей человеческого тела
с помощью карт достоверности и карт ориентиров 7

Шуай Исюань

Система моделирования пространственной динамики
бактериальной популяции при вариации режимов антимикробной обработки 19

Ерещенко А.В.

Применение машинного обучения для оценки растворимости лекарственных
соединений: сравнение различных представлений молекулярных данных 35

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Ибрагимов Д.Н., Самонов С.С.

Об условиях ограниченности множеств достижимости
и управляемости для линейных систем с дискретным временем
и суммарными ограничениями первого порядка на скалярное управление 51

Пантелеев А.В., Надоров И.С.

Применение модификации метода,
имитирующего поведение стаи мотыльков, для решения
задачи оптимального программного управления мобильным роботом 81

Гусева С.Р., Ибрагимов Д.Н.

Априорное оценивание времени быстрогодействия
для линейных дискретных систем с ограниченным
управлением на основе аппарата собственных множеств 110

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Орищенко В.А.

Экспертная оценка для формирования
стохастических матриц поведения экипажа воздушного судна 133

Склезнева К.А., Соболев В.Р.

Формирование доверительного множества
поглощения в задаче прогнозирования скорости ветра 145

Степанов А.Е.

Максимизация среднего числа
набранных баллов в ограниченном по времени тесте 158



МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ

Куланин Е.Д., Степанов М.Е.

Алгебраические кривые низших порядков
в преподавании высшей математики 168

Куланин Е.Д., Степанов М.Е.

Множества точек, находящихся
на рациональных расстояниях друг от друга 210



◆◆◆◆◆ CONTENTS ◆◆◆◆◆

DATA ANALYSIS

Potenko M.A.

Detecting Human Body Parts Using Confidence Maps and Landmark Maps.....	17
<i>Shuai Y.</i>	
System for Modeling the Spatial Dynamics of the Bacterial Population Under Varying Antimicrobial Treatment Regimes	32
<i>Ereshchenko A.V.</i>	
Applying Machine Learning for Solubility Prediction: Comparing Different Representations of Molecular Data	48

OPTIMIZATION METHODS

<i>Ibragimov D.N., Samonov S.S.</i> On the Conditions of Limited Sets of Reachability and Controllability for Linear Systems with Discrete Time and Total First-Order Constraints on Scalar Control	78
<i>Panteleev A.V., Nadorov I.S.</i> Application of the Modified Method Simulating the Behavior of a Flock of Moths to Solve the Optimal Open Loop Control Problem of a Mobile Robot Movement.....	107
<i>Guseva S.R., Ibragimov D.N.</i> A Priori Estimation of the Minimal Stabilization Time for Linear Discrete-Time Systems with Bounded Control Based on the Apparatus of Eigensets	130

MATHEMATICAL MODELING

<i>Orishchenko V.A.</i>	
Expert Assessment for the Formation of Stochastic Matrices of Aircrew Behavior.....	143
<i>Sklezneva X.A., Sobol V.R.</i>	
Formation of a Confidence Absorbing Set in the Task of Wind Speed Prediction	156
<i>Stepanov A.E.</i>	
Maximizing the Average Score in a Timed Test	166

<i>Ibragimov D.N., Samonov S.S.</i> On the Conditions of Limited Sets of Reachability and Controllability for Linear Systems with Discrete Time and Total First-Order Constraints on Scalar Control	78
<i>Panteleev A.V., Nadorov I.S.</i> Application of the Modified Method Simulating the Behavior of a Flock of Moths to Solve the Optimal Open Loop Control Problem of a Mobile Robot Movement.....	107
<i>Guseva S.R., Ibragimov D.N.</i> A Priori Estimation of the Minimal Stabilization Time for Linear Discrete-Time Systems with Bounded Control Based on the Apparatus of Eigensets	130

<i>Orishchenko V.A.</i>	
Expert Assessment for the Formation of Stochastic Matrices of Aircrew Behavior.....	143
<i>Sklezneva X.A., Sobol V.R.</i>	
Formation of a Confidence Absorbing Set in the Task of Wind Speed Prediction	156
<i>Stepanov A.E.</i>	
Maximizing the Average Score in a Timed Test	166

<i>Orishchenko V.A.</i>	
Expert Assessment for the Formation of Stochastic Matrices of Aircrew Behavior.....	143
<i>Sklezneva X.A., Sobol V.R.</i>	
Formation of a Confidence Absorbing Set in the Task of Wind Speed Prediction	156
<i>Stepanov A.E.</i>	
Maximizing the Average Score in a Timed Test	166

<i>Orishchenko V.A.</i>	
Expert Assessment for the Formation of Stochastic Matrices of Aircrew Behavior.....	143
<i>Sklezneva X.A., Sobol V.R.</i>	
Formation of a Confidence Absorbing Set in the Task of Wind Speed Prediction	156
<i>Stepanov A.E.</i>	
Maximizing the Average Score in a Timed Test	166

<i>Orishchenko V.A.</i>	
Expert Assessment for the Formation of Stochastic Matrices of Aircrew Behavior.....	143
<i>Sklezneva X.A., Sobol V.R.</i>	
Formation of a Confidence Absorbing Set in the Task of Wind Speed Prediction	156
<i>Stepanov A.E.</i>	
Maximizing the Average Score in a Timed Test	166

<i>Orishchenko V.A.</i>	
Expert Assessment for the Formation of Stochastic Matrices of Aircrew Behavior.....	143
<i>Sklezneva X.A., Sobol V.R.</i>	
Formation of a Confidence Absorbing Set in the Task of Wind Speed Prediction	156
<i>Stepanov A.E.</i>	
Maximizing the Average Score in a Timed Test	166

<i>Orishchenko V.A.</i>	
Expert Assessment for the Formation of Stochastic Matrices of Aircrew Behavior.....	143
<i>Sklezneva X.A., Sobol V.R.</i>	
Formation of a Confidence Absorbing Set in the Task of Wind Speed Prediction	156
<i>Stepanov A.E.</i>	
Maximizing the Average Score in a Timed Test	166

<i>Orishchenko V.A.</i>	
Expert Assessment for the Formation of Stochastic Matrices of Aircrew Behavior.....	143
<i>Sklezneva X.A., Sobol V.R.</i>	
Formation of a Confidence Absorbing Set in the Task of Wind Speed Prediction	156
<i>Stepanov A.E.</i>	
Maximizing the Average Score in a Timed Test	166



METHOD OF TEACHING

Kulanin Y.D., Stepanov M.E.

Algebraic Curves of Lower Order

in the Teaching of Higher Mathematics.....208

Kulanin Y.D., Stepanov M.E.

Sets of Points That Are a Certain Distance Apart.....250

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆ АНАЛИЗ ДАННЫХ ◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

УДК 004.8

Обнаружение частей человеческого тела с помощью карт достоверности и карт ориентиров

Потенко М.А.*

Московский авиационный институт

(национальный исследовательский университет) (МАИ)

г. Москва, Российская Федерация

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-5222-2664>

e-mail: potenkog@gmail.com

В данной статье рассматривается проблема поиска ключевых точек на объекте и определение его составных частей на примере человеческого тела, как одной из самых актуальных задач компьютерного зрения. Задача заключается в том, что для изображения с предполагаемым объектом (в данной публикации – человеком) требуется найти положение всех важных составных частей/точек, у человека таковыми являются суставы: плечи, локти, кисти, колени и т.д. Для решения данной проблемы предлагается использовать нейронные сети с применением «тепловых карт», которые представлены в виде карты достоверностей и карты ориентиров. Карта достоверности представляет собой матрицу, соответствующую исходному изображению, в каждой ячейке которой находится значение от 0 до 1 с вероятностью расположения искомого сустава (особой точки) в соответствующем пикселе. Карта ориентиров представляет собой матрицу, в каждой ячейке которой располагается двумерный вектор с направлением расположения следующего сустава. Главная особенность заключается в том, что карты помогают друг другу предсказывать правильные значения: благодаря карте достоверности, карта ориентиров знает примерное местоположение ориентиров и ей проще определить нужное направление и наоборот, зная примерное направление к следующему ориентиру, проще спрогнозировать местоположение ориентира. Данные карты вычисляются в несколько этапов, и на каждом новом этапе используется информация с предыдущего, таким образом, при вычислении каждой последующей карты точность полученных результатов повышается. В данной работе оптимальным количеством этапов было 6–7, но данное значение может меняться в зависимости от конечной архитектуры. Демонстрации работы происходит на наборе данных СОСО, включающая в себя 18 точек для каждого человеческого тела.



Ключевые слова: нейронные сети, свёрточные нейронные сети, Human Pose Estimation, тепловые карты, обработка изображений, ключевые точки, обнаружение объектов, сегментация объектов

Для цитаты:

Потенко М.А. Обнаружение частей человеческого тела с помощью карт достоверности и карт ориентиров // Моделирование и анализ данных. 2025. Том 15. № 1. С. 7–18.
DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2025150101>

***Потенко Максим Алексеевич**, аспирант, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-5222-2664>, e-mail: potenkog@gmail.com

1. ВВЕДЕНИЕ

Обнаружение ключевых точек – одна из важнейших задач компьютерного зрения, на изображении располагается объект или группа объектов, у которых визуально можно выделить точки(пиксели), несущие определенную информацию, это могут быть границы автомобильного номера или дорожного знака, отдельные части автомобиля или какого-либо оборудования, суставы человеческого тела и другие. Эти точки могут применяться в огромном числе приложений, таких как распознавание объектов, отслеживание перемещений, построение 3D моделей и другие.

Данную задачу важно автоматизировать особенно в ситуациях, связанных с обработкой видео, содержащих большое число кадров, но это трудно из-за ряда проблем и ограничений:

- Изображения нередко бывают зашумлены
- Изменчивость среды. Фоны изображений, условия освещённости, особенности работы камеры могут значительно меняться
- Многие объекты имеют высокую степень свободы: могут вращаться, менять размер, положение в пространстве и точек относительно друг друга.
- Оклюзия. Части объекта могут перекрывать друг друга и тем самым мешать определять их положение.
- Работа в режиме реального времени. Для многих приложений необходимо, чтобы скорость работы была достаточно высокой, чтобы успевать обрабатывать отдельные кадры видео в режиме реального времени.

Human Pose Estimation область компьютерного зрения направленная на поиск и распознавание человеческого тела, его отдельных частей, определение их ориентации в пространстве. Есть различные подходы к решению данной задачи. В исследовании упор делается на подходе, связанным с поиском ключевых точек, таких как плечи, локти, кисти, колени, ступни, таз и т.д. Решение данной задачи актуально поскольку имеет широкие возможности для применения:

- Спорт. Автоматическое отслеживание спортсменов и анализ их движений. Можно проверять правильность выполнения упражнений, чтобы предотвратить травмы, давать рекомендации. Подсчёт количества подходов в упражнениях.



- VR/AR технологии. Можно взаимодействовать с реальными людьми в VR или AR пространстве.
- Мультипликация, анимация. Можно считывать движения людей, чтобы реалистично их представить в фильмах, сериалах, мультфильмах или компьютерных играх.
- Безопасность. Идентификация людей по движениям, отслеживание воровства.
- Умная обработка изображений. Удаление лишних людей с фото, замена фона, смена одежды и т.д.
- Медицина. Несмотря на то, что часть задач решается без применения ключевых точек [1], другая часть нуждается в их использовании, например анализ прогресса в восстановлении двигательной активности.
- Психология, реклама и т.д.

К классическим алгоритмам решения задач поиска ключевых точек можно отнести:

- Harris Corner Detector[2]: Один из первых алгоритмов для поиска углов на изображении. Был предложен ещё в 1988 году и использует матрицу градиентов для определения угловых точек в изображении. Оценивает локальные изменения интенсивности в окрестностях пикселя и выдает точки, где эти изменения максимальны. Данный способ прост в реализации и довольно быстр, но крайне чувствителен к шуму и дает много ложных срабатываний, плохо устойчив к изменениям масштаба, поворотам и другим сложным сценам, а также не предоставляет дескрипторов точек, что усложняет их идентификацию и сопоставление.
- SIFT[3] (Scale-Invariant Feature Transform): находит ключевые точки и описывает их с помощью векторов признаков, инвариантных к масштабу и повороту. Алгоритм 1999 год, лучше справляется с инвариантностью масштабов и поворотов, чем предыдущий алгоритм, а также предоставляет дескрипторы точек. Проблемой алгоритма является его медленная работа.
- SURF[4] (Speeded-Up Robust Features): Улучшенная версия SIFT, более быстрая и эффективная. Был разработан в 2006 году. Несмотря на то, что алгоритм был доработан, он все еще слишком медленный в реальной работе.

Классические алгоритмы уступили место современным подходам, поскольку несмотря на все попытки их улучшить они все ещё плохо справлялись с инвариантностью условий и выдавали низкую точность с низкой скоростью работы. К тому же их применение сильно ограничено, поскольку эти алгоритмы не обладают достаточной универсальностью и многие точки в ряде задач не способны распознавать.

Все современные подходы основаны на нейронных сетях. В отличие от классических подходов, нейронные сети в теории можно сконфигурировать и обучить для решения любой задачи, связанной с поиском особых точек. Примеров таких решений могут являться

- Keypoint R-CNN[5] Модель, основанная на Faster R-CNN, которая добавляет ветвь для предсказания ключевых точек.
- AlphaPose[6]: Используется для оценки позы человека, выделяя ключевые точки на теле.
- OpenPose[7]: Схож с предыдущим вариантом.



Недостатком существующих систем главным образом является их низкая скорость работы и высокое потребление ресурсов, что сильно ограничивает область возможного применения. Алгоритмы с высокой скоростью обладают недостаточной точностью для применения в реальной работе.

В данной работе предлагается способ, который способен быстро решать задачу без потери точности. Обучение и тестирование выполнялось на наборе данных СОСО, но данный набор можно улучшить и расширить путём обработки изображений, например применить удаление теней с фотографии [8].

2. ТОПОЛОГИЯ МОДЕЛИ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО ТЕЛА

Человеческое тело можно представить в виде разного количества суставов или вообще без них в зависимости от предполагаемого применения.

В данной статье будет использоваться топология СОСО [9], которая является практически стандартом для представления человеческого тела. В данной топологии человеческое тело представлено в виде 18 точек. Схема данной топологии представлена на рис. 1.

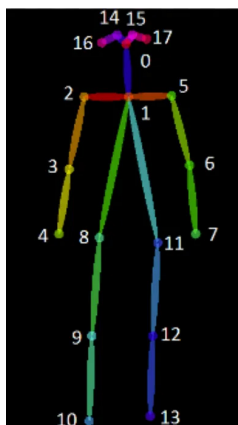


Рис. 1. Модель человеческого тела

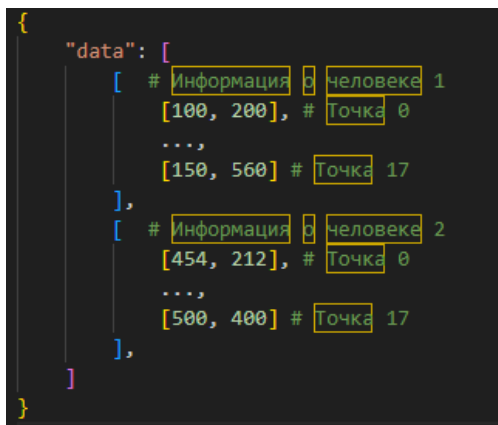


Рис. 2. Запись точек

Каждому изображению ставится в сопоставление список, включающий в себя информацию по каждому человеку на изображении, элементом списка является другой список с информацией по каждой отдельной точке. Точка состоит из двух значений: координаты x и y с её положением на изображении. Индекс каждой точки обязательно фиксирован, чтобы можно было идентифицировать её с определённой частью тела. Шаблон записи точек представлен на рис. 2.

3. КАРТЫ ДОСТОВЕРНОСТИ

Карта достоверностей представляет собой матрицу с размером как у исходного изображения (после некоторых преобразований). Идея была вдохновлена работой Alejandro Newell [10]. В каждой ячейке этой матрицы находится число от 0 до 1, обозначающее вероятность присутствия в соответствующем пикселе исходного изображения определённого сустава. Для каждого сустава строится своя карта достоверностей, поэтому общее число карт для набора COCO равняется 18, еще один слой желательно выделить под фон. Упрощенный пример матрицы представлен в табл. 1. На ней демонстрируется матрица достоверности 10 на 10, с координатой максимума в точке (4, 3).

Таблица 1

Карта достоверности

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.4	0.5	0	0	0	0	0
0	0	0	0.6	0.71	0.58	0.34	0	0	0
0	0	0.45	0.72	0.9	0.67	0.65	0	0	0
0	0	0	0.65	0.76	0.59	0	0	0	0
0	0	0	0	0.5	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Пример наложения одной из таких матриц можно увидеть на Рис. 3. В этом примере карта достоверности левого плеча наложена на исходное изображение. Найдя максимальное значение карты, мы получаем предполагаемую точку расположения сустава. По мере удаления от этой точки вероятности нахождения там точки уменьшаются.



Рис. 3. Матрица достоверности



Математическое представление карты достоверности:

$$C = (C1, C2, C3, \dots, C18)$$
$$C_i \in \mathbb{R}^{w \times h}, \text{ где } w - \text{ ширина изображения, } h - \text{ высота изображения} \quad (1)$$
$$i \in \{1, 2, \dots, 18\}, 18 - \text{ общее число суставов (особых точек)}$$

4. КАРТЫ ОРИЕНТИРОВ

По аналогии с картой достоверности карта ориентиров является матрицей такого же размера, что и исходное изображение (после некоторых преобразований), но каждым элементом такой матрицы является двумерный вектор с направлением к связанной точке. Всего таких связей 19, как и соответствующих матриц:

- $0 \rightarrow 14$
- $0 \rightarrow 15$
- $1 \rightarrow 0$
- $1 \rightarrow 2$
- $1 \rightarrow 5$
- $1 \rightarrow 8$
- $1 \rightarrow 11$
- $2 \rightarrow 3$
- $2 \rightarrow 16$
- $3 \rightarrow 4$
- $5 \rightarrow 6$
- $5 \rightarrow 17$
- $6 \rightarrow 7$
- $8 \rightarrow 9$
- $9 \rightarrow 10$
- $11 \rightarrow 12$
- $12 \rightarrow 13$
- $14 \rightarrow 16$
- $15 \rightarrow 17$

Все индексы точек соответствуют схеме на Рис. 1. Графическая демонстрация карт ориентиров представлена на Рис. 4, на нём упрощённая карта ориентиров для точек (5, 6) – от левого плеча до левого локтя.

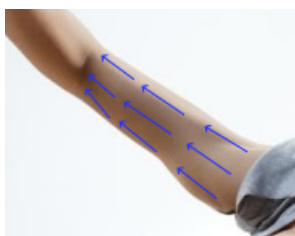


Рис. 4. Матрица ориентиров

У матрицы ориентиров учитывается не один пиксель с предполагаемым суставом, а весь путь от начальной точки до конечной, включая вероятные области вокруг.

Математическое представление карт ориентиров:

$$O = (O1, 2, O3, \dots, O18)$$

$$O_i \in \mathbb{R}^{w \times h \times 2}, \text{ где } w - \text{ ширина изображения, } h - \text{ высота изображения} \quad (2)$$

$$i \in \{1, 2, \dots, 18\}, 18 - \text{ общее число суставов (особых точек)}$$

5. СХЕМА СЕТИ

Для вычисления карт достоверности и карт ориентиров, организуем параллельную поэтапную схему сети. Каждый этап использует информацию с предыдущего этапа, таким образом повышая точность вычислений. Экспериментальным путём было выбрано 7 этапов.

Перед формированием тепловых карт требуется извлечь признаки из изображения, для этого берётся предварительно обученная свёрточная нейронная сеть. В данной работе использовалась MobileNetV3 [11], но подходят и другие модели, например VGG-19 [12] или ResNet [13]. Выбор MobileNetV3 был сделан из-за того, что его скорость извлечения признаков в 5–10 раз быстрее, чем у VGG-19, что позволяет использовать его и на маломощных устройствах.

На первом этапе вычисляются начальные приближения карты достоверностей и карты ориентиров, на каждом последующем результаты с предыдущего этапа объединяются и используются для вычисления новых карт. Пример уточнения результатов при смене этапов приведён на рис. 5. На этом примере видно, как по мере прохождения этапов ошибочные предположения отменялись и осталось довольно точное.



Рис. 5. Поэтапное предсказание

Обозначим множество признаков символом P . Зададим функции Fc^1 и Fo^1 , которые будут принимать на вход признаки изображения и выдавать карты достоверности и карты ориентиров соответственно для первого этапа:

$$C^1 = Fc^1(P)$$

$$O^1 = Fo^1(P) \quad (3)$$

На каждом этапе после первого для вычисления каждой из карт будем использовать помимо признаков карты с предыдущего этапа с помощью функций Fc^i и Fo^i .

$$\begin{aligned} C^i &= Fc^i(P, C^{i-1}, O^{i-1}), \forall i > 1 \\ O^i &= Fo^i(P, C^{i-1}, O^{i-1}), \forall i > 1 \end{aligned} \quad (4)$$

где i -номер этапа

Общая схема работы представлена на Рис. 6.

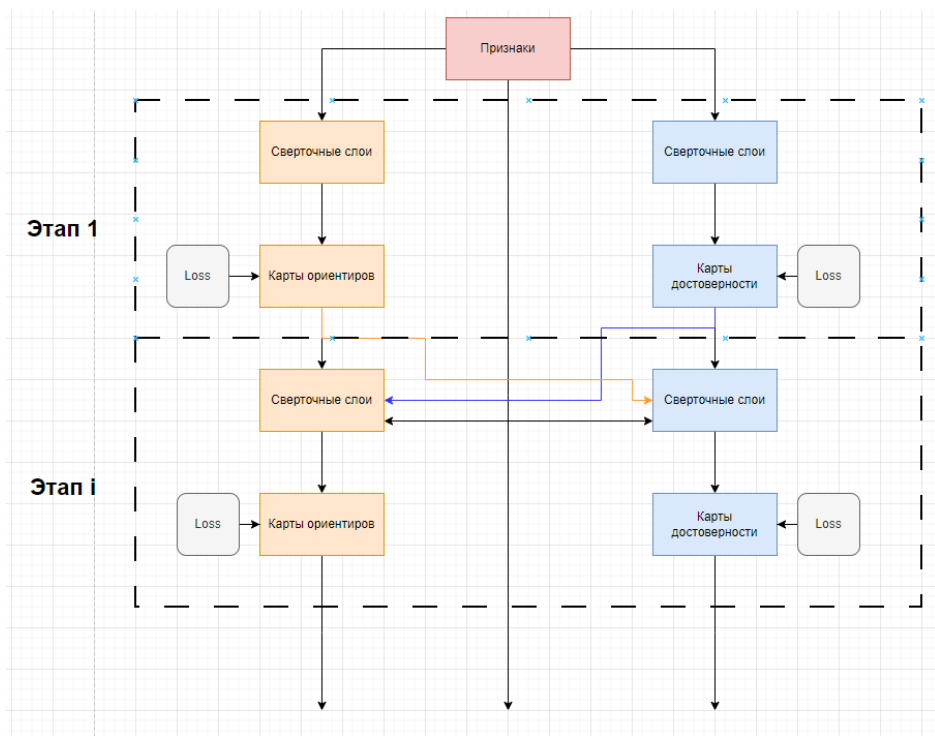


Рис. 6. Схема работы

В ходе экспериментов над свёрточными слоями было определено, что вместо стандартного подхода с использованием крупных сверток можно использовать последовательность небольших свёрток: вместо свертки 7×7 три свертки 3×3 , а вместо 5×5 две свертки 3×3 , это снижает количество операций и увеличивает производительность без потери в точности вычислений. Также оказалось полезным использование шагов сокращения со сверткой 1×1 , двух таких слоев достаточно.

Несмотря на то, что в итоге получаются карты ориентаций и достоверностей с размером как у исходного изображения, в процессе работы нейронной сети будут



вычисляться карты 64x64, так как при размере 256x256 они занимают крайне много памяти GPU. При таком сокращении карт немного снижается точность, но не так существенно, как выигрыш в памяти.

Вычисление 7 этапов для создания тепловых карт весьма затратная по времени операция. Но если отследить поведение карт, то видно, что по мере обучения сети, требуется меньше этапов для получения хорошего результата, таким образом становится понятно, что такое количество вычислений в конечной системе избыточно, поэтому перед непосредственным запуском программы лишние этапы будут отключены. Большое количество этапов хорошо способствует обучению, но при использовании в реальной работе можно от них отказаться.

6. ФУНКЦИЯ ПОТЕРЬ

Для корректного обучения сети необходимо определить функцию потерь (Loss функция), для этого используется стандартная функция L2 (Наименьшая квадратичная ошибка).

Определим некоторые символы:

- t – номер этапа
- x – точная позиция (пиксель)
- C – карта достоверности, одномерный вектор
- O – карта ориентиров, двумерный вектор
- I – количество суставов и ориентиров (обоих по 19)
- W – веса.
- $*$ – эталонная (верная) запись.

Математическая запись:

$$\begin{aligned} fc^t &= \sum_{i=1}^I \sum_x W(x) (C_i^t(x) - C_i^*(x)) \\ fo^t &= \sum_{i=1}^I \sum_x W(x) (O_i^t(x) - O_i^*(x)) \end{aligned} \quad (5)$$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поиск ключевых точек объекта крайне важный компонент, дающий возможность применять его в огромном числе задач по автоматизации и анализу. И человек не является исключением: возможность для программ визуально отслеживать и интерпретировать движения людей является актуальной областью для исследований и разработок.

В этой статье изучается подход с использованием тепловых карт: карт достоверности и ориентации. Разрабатывается каждая из этих карт и включается в общую параллельную и поэтапную сеть. Распараллеливание вычислений для обеих карт между собой и их внутренних компонентов позволяет быстро и эффективно справляться



с задач, а поэтапное построение с использованием информации с предыдущего этапа, позволяет сильно повысить точность обучения нейронной сети.

В работе использовалась топология тела от СОСО и также использовался их набор данных для обучения и тестирования сетей, но при этом разработанный подход легко адаптируется и под другие топологии, основанные на скелетном (фиксированного числа ключевых точек) представлении человека.

Вычисление карт достоверности и ориентаций крайне трудоемкий и затратная как по времени, так и по ресурсам задача, поэтому крайне важно свести к минимуму лишние операции. Для этого в статье предлагается способ с откидыванием лишних вычислений карт, после завершения этапа обучения, что позволяет повысить скорость работы в несколько раз. Также слабым звеном может являться выделение признаков изображения, поэтому в данной работе используется модель свёрточной сети MobileNetV3, которая достаточно быстра и оптимальна по ресурсам, что даёт возможность портировать её даже на мобильные устройства.

Литература

1. Ахмед С.Х., Скородумов С.В. Использование нейросетевых подходов в диагностировании заболеваний // Моделирование и анализ данных. 2020. Том 10. № 2. С. 49–61. DOI:10.17759/mda.2020100204
2. Kruss-Hepp, Майк Стивенс. «A Combined Corner and Edge Detector». // Конференция Alveo Vision. 1988. Том. 15.
3. David G. Lowe. Object recognition from local scale-invariant features // Proceedings of the International Conference on Computer Vision. 1999. С. 1150–1157 // DOI: 10.1109/ICCV.1999.790410
4. Herbert Bay, Andreas Ess, Tinne Tuytelaars, and Luc Van Gool. «Speeded Up Robust Features», ETH Zurich, Katholieke Universiteit Leuven, 2006.
5. Alexander G. Schwing, Abhinav Gupta. «Keypoint R-CNN» // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2018.
6. Yash Goyal, Abhinav Gupta, et al. «AlphaPose: Real-Time and Accurate Multi-Person Pose Estimation» // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2018.
7. Zhe Cao, Tomas Simon. «OpenPose: Realtime Multi-Person 2D Pose Estimation using Part Affinity Fields» // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (TPAMI), 2019.
8. Алексейчук А.С., Мукин Ю.Д. Применение свёрточных нейронных сетей в задаче устранения теней с фотографий // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 1. С. 41–51. DOI: 10.17759/mda.2024140103
9. Tsung-Yi Lin, Michael Maire, Serge Belongie, James Hays, Pietro Perona, Deva Ramanan, Piotr Dollar, C Lawrence Zitnick. Microsoft coco: Common objects in context. // European conference on computer vision, P. 740–755. Springer, 2014.
10. Tompson, J.J., Jain, A., LeCun, Y., Bregler, C. «Joint training of a convolutional network and a graphical model for human pose estimation. // Advances in Neural Information Processing Systems.», 2014, 1799–1807.
11. Andrew G. Howard, Mark Sandler, Huiyu Wang, et al. «Searching for MobileNetV3», 2019.
12. Karen Simonyan, Andrew Zisserman. «Very Deep Convolutional Networks for Large-Scale Image Recognition» // International Conference on Learning Representations (ICLR), 2015.
13. Kaiming He, Xiangyu Zhang, Shaoqing Ren, Jian Sun. «Deep Residual Learning for Image Recognition» // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2016.



Detecting Human Body Parts Using Confidence Maps and Landmark Maps

Maxim A. Potenko*

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI)

Moscow, Russian Federation,

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-5222-2664>

e-mail: potenkog@gmail.com

This article discusses the problem of finding key points on an object and determining its components using the example of the human body as one of the most pressing computer vision problems. The problem is that for an image with a supposed object (in our case, a person), it is necessary to find the position of all important components/points, for a person these are joints: shoulders, elbows, hands, knees, etc. To solve this problem, it is proposed to use neural networks using «heat maps», which are presented in the form of a confidence map and a landmark map. The landmark map is a matrix corresponding to the original image, each cell of which contains a value from 0 to 1 with the probability of the location of the desired joint (special point) in the corresponding pixel. The landmark map is a matrix, each cell of which contains a two-dimensional vector with the direction of the next joint. The main feature is that the maps help each other to predict the correct values: thanks to the confidence map, the landmark map knows the approximate location of the landmarks and it is easier for it to determine the desired direction and vice versa, knowing the approximate direction to the next landmark, it is easier to predict the location of the landmark. These maps are calculated in several stages, and at each new stage, information from the previous one is used, so when calculating each subsequent map, the accuracy of the results obtained increases. In this work, the optimal number of stages was 6–7, but this value can change depending on the final architecture. Demonstrations of the work are carried out on the COCO dataset, which includes 18 points for each human body.

Keywords: neural networks, convolutional neural networks, Human Pose Estimation, heat maps, image processing, keypoints, object detection, object segmentation

For citation:

Potenko M.A. Detecting Human Body Parts Using Confidence Maps and Landmark Maps. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2025. Vol. 15, no. 1, pp. 7–18. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2025150101> (In Russ., abstr. in Engl.).

***Maxim A. Potenko**, Graduate Student, Moscow Aviation Institute (national research university) (MAI), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-5222-2664>, e-mail: potenkog@gmail.com



References

1. Ahmed S. Kh., Skorodumov S.V. The Use of Neural Network Approaches in the Diagnosis of Diseases. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2020. Vol. 10, no. 2, pp. 49–61. DOI:10.17759/mda.2020100204 (In Russ., abstr. in Engl.).
2. Chris Harris, Mike Stevens «A Combined Corner and Edge Detector». // *Alveo Vision Conference*. 1988. Vol. 15
3. David G. Lowe. Object recognition from local scale-invariant features // *Proceedings of the International Conference on Computer Vision*. 1999. C. 1150–1157 // DOI: 10.1109/ICCV.1999.790410
4. Herbert Bay, Andreas Ess, Tinne Tuytelaars, and Luc Van Gool, «Speeded Up Robust Features», ETH Zurich, Katholieke Universiteit Leuven, 2006
5. Alexander G. Schwing, Abhinav Gupta, «Keypoint R-CNN» // *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2018.
6. Yash Goyal, Abhinav Gupta, et al. «AlphaPose: Real-Time and Accurate Multi-Person Pose Estimation» // *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2018.
7. Zhe Cao, Tomas Simon, «OpenPose: Realtime Multi-Person 2D Pose Estimation using Part Affinity Fields» // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (TPAMI)*, 2019.
8. Alekseychuk A.S., Mukin Yu. D. Application of Convolutional Neural Networks in the Problem of Removing Shadows from Photographs. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 1, pp. 41–51. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140103> (In Russ., abstr. in Engl.).
9. Tsung-Yi Lin, Michael Maire, Serge Belongie, James Hays, Pietro Perona, Deva Ramanan, Piotr Dollar, C Lawrence Zitnick // *Microsoft coco: Common objects in context*. // *European conference on computer vision*, P. 740–755. Springer, 2014
10. Tompson, J.J., Jain, A., LeCun, Y., Bregler, C.: «Joint training of a convolutional network and a graphical model for human pose estimation. // *Advances in Neural Information Processing Systems*», 2014, 1799–1807
11. Andrew G. Howard, Mark Sandler, Huiyu Wang, et al. «Searching for MobileNetV3», 2019
12. Karen Simonyan, Andrew Zisserman, «Very Deep Convolutional Networks for Large-Scale Image Recognition» // *International Conference on Learning Representations (ICLR)*, 2015.
13. Kaiming He, Xiangyu Zhang, Shaoqing Ren, Jian Sun. «Deep Residual Learning for Image Recognition» // *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2016.

Получена 05.02.2025

Принята в печать 19.02.2025

Received 05.02.2025

Accepted 19.02.2025

УДК 004.94:519.7

Система моделирования пространственной динамики бактериальной популяции при вариации режимов антимикробной обработки

Шуай Исюань*

Казанский (Приволжский) федеральный университет

(ФГАОУ ВО КФУ) г. Казань, Российская Федерация

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3465-7030>

e-mail: shuaiyixuan@qq.com

Работа посвящена разработке и реализации модели эволюции бактериальной популяции, выращенной на питательной среде, в условиях контролируемого ингибирования биомассы антимикробным препаратом. Для формализации модели использован непрерывно-детерминированный подход. Математическая модель описывается начально-граничной задачей для системы реакционно-диффузионных уравнений, определяющих пространственно-временные распределения питательного субстрата и биомассы с учетом интеграции с фармакокинетической моделью для однократной антимикробной обработки. Модель реализована методом конечных элементов с использованием системы конечно-элементного анализа – платформы COMSOL Multiphysics. Проведена серия вычислительных экспериментов для установления численных закономерностей изменений концентрации бактериальной массы при вариации дозы антимикробного воздействия. Представлено обсуждение потенциальной возможности применения данного подхода для исследования вопроса об устойчивости бактерий к антибиотикам.

Ключевые слова: реакционно-диффузионная система, модель роста бактерий, питательный субстрат, метод конечных элементов, модель логистического роста, фармакокинетика, устойчивость бактерий

Финансирование. Работа выполнена в рамках Программы стратегического академического лидерства Казанского федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030»).

Благодарности. Автор благодарит за помощь в подготовке публикации своего научного руководителя – профессора Масловскую А.Г.

Для цитаты:

Шуай И. Система моделирования пространственной динамики бактериальной популяции при вариации режимов антимикробной обработки // Моделирование и анализ данных. 2025. Том 15. № 1. С. 19–34. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2025150102>



***Шуай Исуюнь**, аспирант кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта, Казанский (приволжский) федеральный университет, г. Казань, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3465-7030>, e-mail: shuaiyixuan@qq.com

1. ВВЕДЕНИЕ

Методы математического моделирования и инструменты для проведения *in silico* исследований играют ключевую роль в решении одной из главных проблем современной медицины – выборе оптимальных стратегий применения антибактериальных препаратов для борьбы с инфекциями, вызванными микроорганизмами. Важно отметить, что, несмотря на значимость открытия и использования антибиотиков в истории медицины, на сегодняшний день острой проблемой является развитие устойчивости многих патогенов к широкому спектру применяемых препаратов. Это обуславливает необходимость понимания взаимосвязей между антибактериальной активностью, концентрацией лекарственных средств и механизмами действия антибиотиков, а также требует применения оптимальных стратегий лечения данными препаратами [1–3].

В междисциплинарных исследованиях важную роль играют математические и компьютерные модели кинетики роста биомассы и модели, описывающие взаимосвязь между антибактериальной активностью популяции бактерий и концентрацией лекарственного средства. Один из наиболее распространенных подходов – это детерминированное моделирование пространственно-временных распределений концентрации бактерий и питательного субстрата. Модели типа «реакция-диффузия», адаптированные для изучения микробиологических систем, часто рассматриваются как вариации моделей соперничества. Они представляют собой реакционно-диффузионную модификацию модели Колмогорова-Фишера или пространственно-временную аналогию моделей Моно и Друпэ [4–5]. Возможные модификации подходов включают в себя случайный характер роста биомассы для создания натуралистических паттернов, а также зависимость диффузионного процесса от наличия питательных веществ [6–7]. Кроме того, можно учитывать пороговые зависимости в качестве «триггерной» точки для начала роста популяции с учетом эффекта Олли в рамках концепции модели Аллена-Кана [8–10].

Один из простейших методов моделирования взаимосвязи между антибактериальной активностью и концентрацией лекарственного средства – это использование формализации кинетики действия антибиотиков на бактерии на основе уравнения Михаэлиса – Ментен. Для чувствительных к антибиотикам бактерий можно описать связь между действием ингибирующего препарата и его концентрацией [11]. При низкой концентрации антибиотика скорость роста бактерий может быть прямо пропорциональна концентрации препарата, но по мере увеличения концентрации антибиотика эволюция бактерий может становиться все более подавленной. Связь между антибактериальной активностью и концентрацией лекарственного средства тесно зависит от модели кинетики роста бактерий [12]. В отсутствие антибиотиков бактерии развиваются в соответствии с собственной кинетической моделью роста. При введении антибиотиков различные параметры модели антимикробной активности

начинают влиять на скорость роста бактерий в зависимости от концентрации лекарства. При низкой концентрации антибиотиков их ингибирующее воздействие на рост бактерий относительно слабое, и рост бактерий преимущественно определяется их собственной кинетикой, однако с увеличением концентрации лекарства скорость роста начнет снижаться из-за присутствия антибиотиков. Эффект действия препарата, согласно модельному подходу, увеличивается постепенно, приводя к более значительному ингибирующему действию на бактериальную биомассу. При достаточно высокой концентрации лекарства происходит остановка или гибель бактерий [13]. Понимание этих двух концепций и их взаимосвязи играет важную роль для построения модели процесса действия антибиотиков в организме. Синтезированный подход помогает объяснить, почему антибактериальный эффект препарата меняется в зависимости от его концентрации. Интеграция обеих моделей обеспечивает более точную информацию для оптимального использования лекарств. Кроме того, эти модели могут быть применены в процессе тестирования новых антибиотиков для предварительной оценки их антибактериального потенциала. Они также позволяют рассмотреть эффективность препарата с учетом пространственно-временной динамики популяций бактерий, что способствует эффективности исследований и построения прогнозов.

В цикле авторских исследований мы развиваем детерминированные модели бактериальной коммуникации [14–15], вследствие которой у многих патогенных бактерий развиваются факторы вирулентности, формируется резистентность к антибиотикам, а также бактериальные сообщества проявляют способность к формированию плотных структур, таких как, например, биопленки. В аспекте этого научного направления чрезвычайно важным является этап формализации и численной реализации модели пространственно-временной эволюции бактериальной массы в зависимости от потребляемого питания и, в случае открытой системы – при наличии факторов ингибирования. Следует отметить, что кинетические модели антимикробной терапии, основанные на применении аппарата обыкновенных дифференциальных уравнений, достаточно хорошо развиты и описаны в литературе, однако их расширения и гибридизация с моделями пространственно-временной динамики биомассы практически отсутствуют (особенно в части связи этих процессов с управлением бактериальной коммуникацией). Данная работа направлена на развитие реакционно-диффузионного подхода в концепции численного моделирования динамики бактериальной популяции, выращенной на питательной среде, в условиях контролируемого ингибирования биомассы антимикробным препаратом. Особый акцент в настоящем исследовании сделан на установлении закономерностей (на основе данных вычислительных экспериментов) взаимосвязи между различными концентрациями антибиотиков и ростом бактериальных культур в неравновесных условиях.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В рамках настоящей работы для формализации математической модели бактериального роста в условиях внешнего ингибирования мы используем комбинацию нескольких подходов. Во-первых, для задания закона эволюции концентрации биомассы



бактерий B мы введем уравнение Колмогорова – Петровского – Пискунова – Фишера. Во-вторых, дополним это модельное уравнение формализацией динамического режима ингибирования за счет действия антибиотика с концентрацией A (в данном случае примем упрощающее предположение об отсутствии процесса диффузии антибиотика в среде). В-третьих, математическое описание пространственно-временной динамики концентрации питательного субстрата N введем в рассмотрение с применением классического подхода, учитывая возможные механизмы потребления питания бактериальной колонией. Как отмечается в работе [16], рост бактериальной популяции обеспечивается процессами развития и деления бактерий, расположенных близко к поверхности. Бактерии, находящиеся вблизи центра колонии, имеют низкую активность из-за таких проблем, как затруднение получения питательных веществ и затруднение выделения метаболитов. В связи с чем, они преимущественно находятся в состоянии покоя и потребление питательных веществ этой частью колонии во многом зависит от плотности бактериальной популяции BN . Для учета приграничного роста биомассы в уравнении для потребления питания требуется учесть зависимость скорости изменения плотности бактериальной популяции с течением времени $\frac{\partial B}{\partial t} N$. В настоящем исследовании примем для определенности, что процесс рассматривается в некоторой двумерной области с заданными линейными размерами; биомасса в начальный момент времени локализована в ограниченной зоне; питательный субстрат в начальный момент времени имеет равномерное распределение по всей расчетной области. Кроме того, отсутствуют потоки биомассы и питательного субстрата за границы области («чашки Петри»).

Общая математическая формализация двумерной по пространственным координатам модели представляется в виде начально-граничной задачи для системы полулинейных уравнений параболического типа

$$\begin{cases} \tau_N \frac{\partial N}{\partial t} = D_N \Delta N - h \frac{\partial B}{\partial t} N - vBN, \\ \tau_B \frac{\partial B}{\partial t} = D_B \Delta B + f(B) - S(B, t), \end{cases} \quad 0 < x < l, \quad 0 < y < l, \quad 0 < t \leq \bar{t}, \quad (1)$$

$$f(B) = aB(b - B), \quad (2)$$

$$S(B, t) = \frac{E_{\max} p(t)}{A_{50} + A} B \cdot A, \quad (3)$$

$$B(x, y, 0) = \begin{cases} B_0 & \text{if } (x - l/2)^2 + (y - l/2)^2 \leq q^2, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad N(x, y, 0) = N_0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < y < l, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial B}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial N}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad 0 < t < \bar{t} \quad (5)$$

где $B(x,y,t)$ – концентрация биомассы бактерий, отн.ед./м³; $N(x,y,t)$ – концентрация питания, отн.ед./м³; $A(t)$ – концентрация антибиотика, отн.ед./м³; $\bar{t}$ – граница интервала времени наблюдения, час; l – линейный размер расчетной области с границей Γ , м; функция $f(B)$ определяет скорость роста бактерий, отн.ед./м³·час; τ_B , τ_N – безразмерные масштабирующие параметры; D_B , D_N – коэффициенты диффузии биомассы и нутриента соответственно, м²/час; h , v , a , b – положительные параметры для реакционных слагаемых в модели; B_0 , N_0 – значения для инициализации начальных уровней биомассы и питания, отн.ед./м³; q – радиус области начальной локации колонии, м; функция $S(B,t)$ описывает непосредственно связь между концентрацией антибиотика и эффектом от его действия с течением времени, отн.ед./м³·час; E_{max} – параметр скорости, соответствующий максимальному эффекту действия антибиотика, 1/час; A_{50} – концентрация антибиотика, обеспечивающая 50% максимального эффекта действия антибиотика, отн.ед./м³; $p(t)$ – безразмерная функциональная зависимость, позволяющая формализовать процесс деградации в зависимости от реакции биосистемы на ингибитор.

В лабораторных условиях антибиотики обычно добавляют во время приготовления питательной среды, поэтому будем предполагать, что антибиотики равномерно распределены по области (по «чашке Петри»). Известно, что ряд бактерий при постоянном воздействии на них антибактериальными препаратами (например, в госпитальных условиях) постепенно вырабатывают устойчивость (или факторы резистентности). Сущность роста популяции бактерий во многом определяется процессами адаптации к окружающей среде – акт добавления антибиотиков можно понимать как перемещение бактерий из более комфортной среды обитания в среду с чрезвычайно суровыми условиями жизни, в результате чего и вырабатывается способность бактерий выживать при ингибирующих внешних факторах. В результате, жизненный цикл можно разделить на четыре стадии: латентный период, период быстрого уничтожения популяции, период стабильности и период повышения антибактериальной устойчивости. Этот процесс, в части описательной динамики, очень похож на четыре стадии роста бактериальной популяции. В соответствии с принципом аналогии, формализуем эти четыре этапа с помощью аппроксимирующей функции $p(t)$:

$$p(t) = \begin{cases} 0.5 \cdot (1 + \tanh(I_c \cdot (t - t_e))), & t < t_i, \\ 0.5 \cdot \left(1 - \tanh \left(d_r \cdot \left(t - t_{\min} - t_{\max} \log_2 \left(\frac{A}{A_{\min}} \right) \right) \right) \right), & t \geq t_i, \end{cases} \quad (6)$$

где $t_{\min}$ – параметр, отвечающий за продолжительность действия антибиотика в состоянии насыщения, час; t_e – время достижения состояния насыщения для действия антибиотика, час; I_c – интенсивность действия антибиотиков, 1/час; t_i – параметр времени, определяющий интервал активного действия антибиотика, час; d_r – параметр, отвечающий за интенсивность бактериальной резистентности, 1/час; $t_{\max}$ – параметр времени, отвечающий за усиление резистентности, час; $A_{\min}$ – минимальная эффективная концентрация антибиотиков в эксперименте, отн.ед./м³.



3. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Реализация математической модели, описываемой системой соотношений (1)–(6), проводилась с использованием метода конечных элементов в среде пакета COMSOL Multiphysics®.

При планировании вычислительных экспериментов мы приняли во внимание, что в лабораторных условиях единицы измерения концентрации бактериальной биомассы отличаются от единиц измерения концентрации антибактериальных препаратов и питательных веществ. В рамках реализуемой пространственно-временной модели мы установили нормализованные значения концентраций бактерий, антибиотиков и питательных веществ, используя шкалу $[0, 1]$. Так, например, максимальное значение концентрации бактерий равно единице, минимальное – нулю, соответственно, в области, не содержащей биомассу. Как было отмечено выше, для концентрации биомассы $B(x, y, t)$ принята единица измерения – отн.ед./м³. Аналогично, значение минимальной концентрации антибиотиков, которое позволяет полностью деградировать бактерии, равно 1 отн.ед./м³, в случае, если антибиотик отсутствует, значение концентрации $A(t)=0$ отн.ед./м³. Наконец, для численной оценки питательных веществ: максимальная концентрация питательных веществ в среде равна 1 отн.ед./м³, минимальная (среда не содержит питания, обеспечивающего рост биомассы) – 0 отн.ед./м³.

Основной целью вычислительных экспериментов являлось установление закономерностей эволюции бактериальных популяций, выращенных на питательных средах (например, в чашке Петри), в условиях, соответствующих лабораторным, при контроле процесса ингибирования биомассы грамотрицательных бактерий антимикробным препаратом. Значения параметров, инициализированные для вычислительных экспериментов, представлены в табл. 1.

Таблица 1

Значения параметров модели

Имя	Значение	Описание
D_B	$1 \cdot 10^{-10}$	Коэффициент диффузии биомассы, м ² /час
D_N	10^{-8}	Коэффициент диффузии нутриента, м ² /час
τ_B	0.066	Масштабирующий параметр для времени для бактериального роста, 1
τ_N	11	Масштабирующий параметр для нутриента, 1
a	0.5	Собственный темп роста биомассы, м ³ /(отн.ед.·час)
b	1	Параметр «несущей способности» для бактерий, отн.ед./м ³
h	10	Скорость, с которой питательные вещества поглощаются внешним краем колонии, м ³ /отн.ед.
v	1.5	Скорость, с которой питательные вещества поглощаются внутренней зоной колонии, м ³ /(отн.ед.·час)
N_0	1	Начальная концентрация нутриента, отн.ед./м ³
B_0	1	Начальная концентрация бактерий, отн.ед./м ³
E_{max}	0.53	Параметр скорости, соответствующий максимальному эффекту действия антибиотика, 1/час
A_{50}	0.01	Концентрация антибиотика, обеспечивающая 50% максимального эффекта действия антибиотика, отн.ед. /м ³

Имя	Значение	Описание
t_{min}	4	Продолжительность действия антибиотика в состоянии насыщения, час
t_e	4	Время достижения состояния насыщения для действия антибиотика, час
d_r	0.2	Интенсивность бактериальной резистентности, 1
I_c	4	Интенсивность действия антибиотиков, 1/час
A_{min}	0.0009896	Минимальная эффективная концентрация антибиотиков в эксперименте, отн.ед./м ³
t_i	4	параметр времени, определяющий интервал активного действия антибиотика, час

Опираясь на результаты, описанные в исследовании [17], проанализируем закон динамики эффекта действия антибиотиков в эксперименте. Если пренебречь диффузией в пространстве и временно установить перманентную скорость роста бактерий постоянной $-r$ (1/час), то скорость изменения биомассы бактерий, на которую влияют антибиотики, равна

$$R = r - \frac{E_{max} \cdot A}{A_{50} + A}, \text{ 1/час.} \quad (7)$$

В эксперименте [17] при начальной концентрации антибиотика 0.038–9.6 мкг/мл, количество бактерий сначала уменьшается, а затем происходит «регенерация» – увеличение биомассы. В то же время, при концентрации антибиотиков менее 0.019 мкг/мл, колония сохраняется; если же концентрация антибиотиков превышает 19.2 мкг/мл, популяция бактерий уничтожается полностью. Согласно экспериментальным данным [17], концентрация антибиотиков возрастала экспоненциально. Если значение параметра A_{50} принять 0.0039 отн.ед./м³, а максимальную скорость ингибирования – 0.3 1/час, тогда визуализация зависимости (7) будет иметь вид, показанный на рисунке 1. Можно отметить, что существует порог между концентрацией антибиотика и скоростью роста, и когда концентрация антибиотика достигает определенного значения, скорость роста бактерий становится отрицательной.

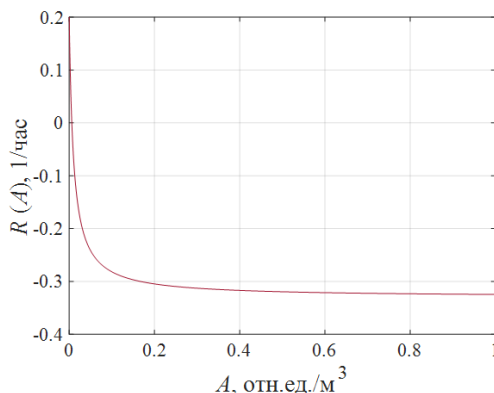


Рис. 1. Зависимость скорости изменения биомассы бактерий от концентрации антибиотика

Для аналитического описания функции $p(t)$ воспользуемся соотношением (6). Придавая значения параметрам (табл. 1), представим график функциональной зависимости, отражающий реакцию биосистемы на ингибитор, как показано на рисунке 2.

Кривая отображает процесс формирования бактериальной резистентности, в котором можно выделить пять стадий: инкубационный период, период быстрой стерилизации, период насыщения (фаза стабилизации), период повышенной резистентности и полное развитие лекарственной устойчивости бактериальной популяции. По мере роста концентрации антибиотиков время развития устойчивости бактерий будет постепенно увеличиваться. Если установить различные значения концентрации антибиотика, продолжительность фазы стабилизации также будет разной. Зависимость между временем развития устойчивости и концентрацией антибиотиков подтверждается данными экспериментальным исследований (например, [17]).

Для более глубокого понимания механизмов, определяющих поведение модели, визуализируем взаимосвязь между скоростью роста бактерий и скоростью их деградации за счет антибиотиков, игнорируя влияние устойчивости бактерий, то есть зависимость $f(B)-S(B, t)$ как функцию концентрации биомассы B .

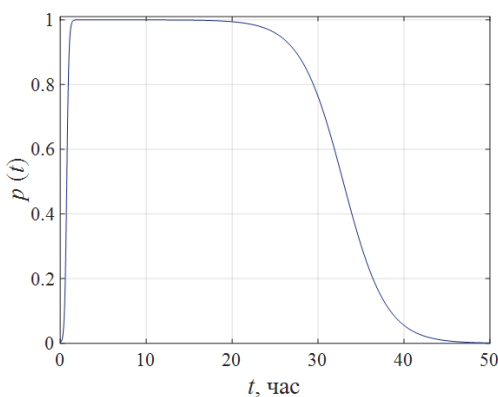


Рис. 2. Общий вид модельной зависимости $p(t)$

Учитывая только взаимосвязь между тремя факторами: скоростью роста бактериальной популяции, насыщенностью локальной популяции и концентрацией антибиотиков в определенный момент периода стабилизации в среде, содержащей антибиотики, визуализируем зависимости, как показано на рисунке 3. Представленная графическая интерпретация демонстрирует влияние различных концентраций антибиотиков на скорость роста популяции бактерий.

Можно отдельно отметить, что в силу законов, формализованных в модели, когда концентрация антибиотика превышает 0.0625 отн.ед. /м³, рост бактерий прекращается при любой плотности популяции. По мере увеличения концентрации антибиотика скорость роста бактериальной популяции будет в определенной степени снижаться, как и локальная максимальная плотность бактериальной популяции также будет

уменьшаться, причем степень того и другого снижения согласуется с функциональной зависимостью, представленной на рисунке 1.

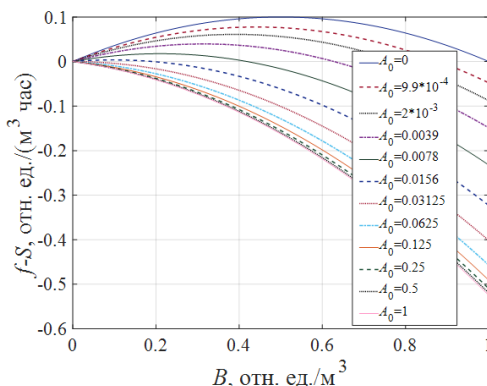


Рис. 3. Зависимость скорости роста бактерий при вариации начальной концентрации антибиотика

Далее рассмотрим пространственно-временную связь между ростом бактериальной биомассы, потреблением питательных веществ и воздействием антибактериальным препаратом. Для системы уравнений (1)–(6) рассмотрим две серии вычислительных экспериментов. Первая группа представляет собой контрольный эксперимент, целью которого является анализ процесса роста бактериальной колонии в чашке Петри без добавления антибиотиков. В вычислительном эксперименте для визуализации поверхностного распределения биомассы и питательного субстрата зафиксируем следующие моменты времени: $t=0, 3, 8, 15, 20$ час. Для второй серии экспериментов введем учет процедуры ингибирования антибактериальным препаратом, который в начальный момент $t=0$ час имеет концентрацию 0.00625 отн.ед./м³ (поверхностные распределения биомассы и питательного субстрата визуализируем для фиксированных моментов времени $t=0, 3, 10, 30, 50$ час). Результаты симуляций представлены на рисунках 4 и 5 соответственно.

На рисунке 4 а, сохраняя неизменной плотность бактериальной популяции внутри колонии, биомасса со временем постепенно расширялась и заполняла всю предоставленную площадь. Этот процесс также сопровождается потреблением питательных веществ, как показано на рисунке 4 б. В определенный временной диапазон (как показано на рисунке, около 3 час) в распределении питательного субстрата можно выделить две характерные области, имеющие формы колец, а именно – внешний край и внутреннюю часть бактериальной колонии. При принятых параметрах модельного расчета, внешний край потребляет питательные вещества с большей скоростью, чем внутренняя зона, поэтому питательные вещества не распределяются в форме концентрических кругов по мере роста бактериальной колонии. Концентрация питательных веществ будет постепенно снижаться по мере биологической активности

бактерий, как показано на рисунке 4 б, пока все доступное питание не будет потреблено окончательно.

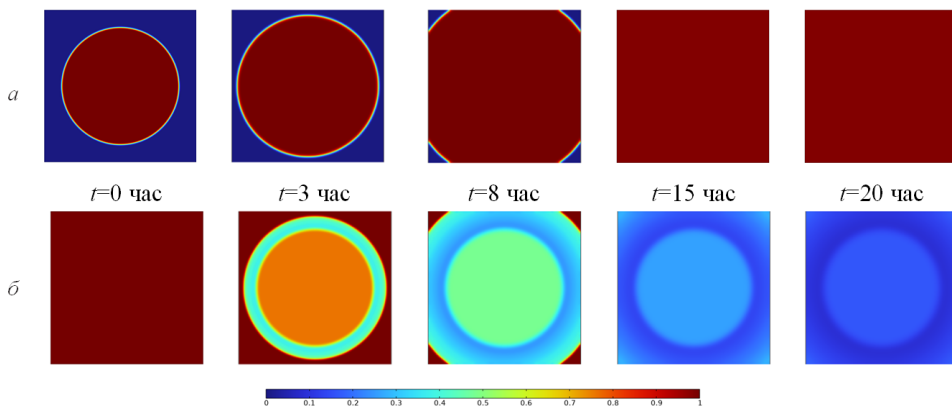


Рис. 4. Пространственные распределения концентраций:
биомассы – а; питательных веществ – б

В случае деградации биомассы за счет действия антибактериальным препаратом в начальный момент времени (как показано на рисунке 5 б) плотность бактериальной популяции быстро снижается. Сравнение площадей, занимаемых колониями, в момент времени $t=3$ час., позволяет заключить, что сразу после добавления антибиотика колония перестает расширяться. Это обусловлено базовыми механизмами математической модели, соответствующими экспериментально наблюдаемым: когда плотность бактериальной популяции снижается, скорость расширения бактериальных колоний, вызванная градиентом концентрации, также снижается.

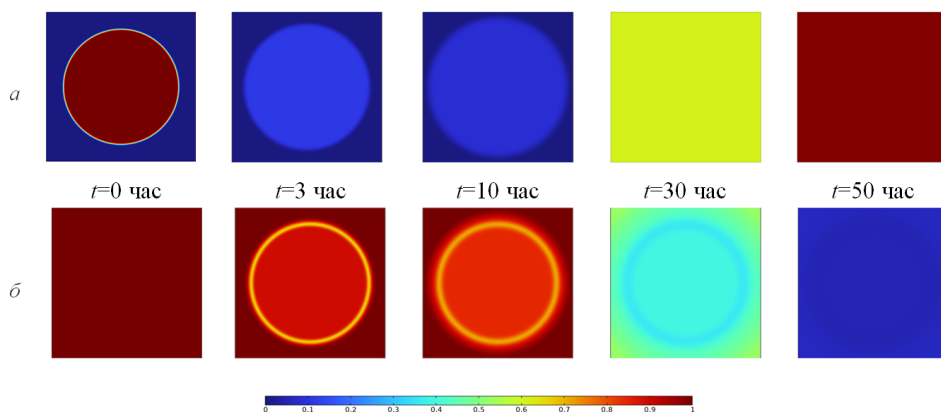


Рис. 5. Пространственные распределения концентраций:
биомассы – а; питательных веществ – б с учетом действия антибиотиков

Далее, в процессе эволюции бактериальных колонии (после $t=20$ час) наблюдается процесс развития устойчивости бактерий по отношению антибактериального препарата. В этот период эффективность действия антибиотиков постепенно снижается, а плотность бактериальной популяции начинает увеличиваться до тех пор, пока не достигнет максимально возможного значения в данной области, как показано на рисунке 5 а ($t=50$ час). Поскольку антибиотики влияют на рост популяции бактерий, это приводит и к опосредованному влиянию на потребление питательных веществ. Сравнение результатов симуляции, представленных на рисунках 4 и 5, б (при $t=3$ час) свидетельствуют, что скорость потребления питательных веществ в случае добавления антибиотиков значительно меньше, чем в отсутствие внешнего воздействия на колонию.

Для дальнейшего анализа введем в рассмотрение дополнительно оцениваемую в вычислительных экспериментах величину – интегральное значение концентрации биомассы B_{total} , вычисленное в каждый момент времени. Графики на рисунке 6 показывают динамику изменения этого интегрального значения с течением времени. Для всех представленных доз антибактериального препарата в течение первого часа рост бактерий классической логистической кривой. Далее, накопленный эффект действия антибиотика приведет к деградации биомассы в зависимости от уровня концентрации ингибитора в начальный момент времени (разные концентрации антибиотиков вызывают уничтожение бактерий с разной скоростью, что приводит к изменению общего вида функциональной зависимости $B_{total}(t)$). В то время как одна часть бактериальной колонии погибает под действием антибиотика, другая, «живая», часть развивает резистентность в ходе метаболического процесса. Этот процесс обладает устойчивостью – когда толерантные к ингибитору бактерии достигнут определенной концентрации в среде, популяция будет быстро расти и далее (при наличии питания) сохранять свою численность постоянной.

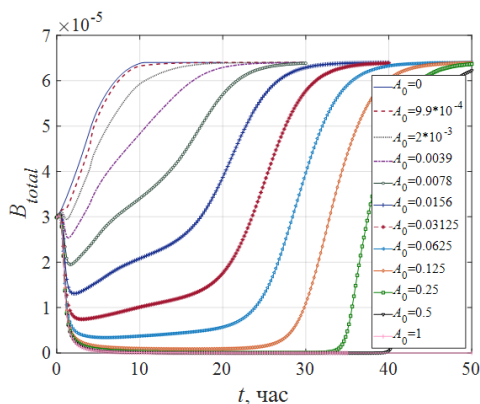


Рис. 6. Динамика изменения общей концентрации бактерий при вариации значений концентраций антибиотиков

Кроме того, при отсутствии ингибитора ($A_0=0$) характер роста общей бактериальной популяции на участке соответствует логистической модели. Популяция бактерий



не уменьшается при самой низкой концентрации антибиотика $A_0=0.0009896$ отн.ед./м³, а при самой высокой концентрации антибиотика $A_0=1$ отн.ед./м³ регенерация популяции отсутствует. Поскольку концентрация антибиотиков постепенно увеличивается, время развития устойчивости бактерий также постепенно увеличивается до тех пор, пока не будет достигнута полная ингибирующая концентрация антибиотиков в этой среде, и бактерии больше не смогут регенерировать. Следует отметить, что данная модель может быть применена и для прогнозирования эффектов ингибирования биомассы при использовании методик многократной обработки.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, настоящее исследование обобщает результаты реализации реакционно-диффузионной модели динамики бактериальной популяции, выращенной на питательной среде, в условиях контролируемого ингибирования биомассы антимикробным препаратом. Была предложена авторская модификация модели, включающая классическую модель популяционной динамики, формализуемой с помощью уравнения Колмогорова – Петровского – Пискунова – Фишера с учетом влияния ингибитора, а также модель пространственно-временной эволюции питательного субстрата, динамически зависящего от концентрации биомассы, и функциональную зависимость, описывающая процесс деградации колонии в зависимости от реакции биосистемы на ингибитор. Проведена численная реализация модели с использованием метода конечных элементов в пакете COMSOL Multiphysics. Представлены законы действия антибиотиков при определенных параметрах, формализованы механизмы формирования резистентности бактерий и закономерности скорости роста бактерий под действием различных концентраций антибиотиков. Результаты вычислительных экспериментов (для фиксированного набора условий и параметров) позволяют установить динамику формирования факторов резистентности бактерий по отношению к антимикробным препаратам, а также прогнозировать уровни доз антибиотика, необходимых при достижении цели полного уничтожения популяции. Перспективу настоящего исследования представляет реализация более сложного варианта модели формирования бактериальных паттернов [10] на основе модификации модели Аллена-Кана в условиях многократной антибактериальной обработки, а также формализации связи между резистентностью микробов и уровнем бактериального кворума [14–15].

Литература

1. Aslam B., Wang W., Arshad M.I., Khurshid M., Muzammil S., Rasool M.H., Nisar M.A., Alvi R.F., Aslam M.A., Qamar M.U., Salamat M.K. Antibiotic resistance: a rundown of a global crisis // Infection and drug resistance. 2018. Vol. 10. P. 1645–1658. DOI: 10.2147/IDR.S173867
2. Frieri M., Kumar K., Boutin A., Antibiotic resistance // Journal of infection and public health. 2017. Vol. 10. № 4. P. 369–378. DOI:10.1016/j.jiph.2016.08.007
3. Golding I., Kozlovsky Y., Cohen I., Ben-Jacob E. Studies of bacterial branching growth using reaction–diffusion models for colonial development // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 1998. Vol. 260. № 3–4. P. 510–554. DOI:10.1016/S0378-4371(98)00345-8

4. *Eberl H.J., Parker D.F., van Loosdrecht M.C.M.* A new deterministic spatio-temporal continuum model for biofilm development // *Computational and Mathematical Methods in Medicine*. 2001. Vol. 3. № 3. P. 161–175. DOI:10.1080/10273660108833072
5. *Mimura M., Sakaguchi H., Matsushita M.* Reaction-diffusion modelling of bacterial colony patterns // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2000. Vol. 282. № 1–2. P. 283–303. DOI:10.1016/S0378-4371(00)00085-6
6. *Kawasaki K., Mochizuki A., Matsushita M., Umeda T., Shigesada N.* Modeling spatio-temporal patterns generated by bacillus subtilis // *Journal of theoretical biology*. 1997. Vol. 188. № 2. P. 177–185. DOI:10.1006/jtbi.1997.0462
7. *Шевкун И.А., Масловская А.Г.* Гибридный подход к моделированию и оценке структурных особенностей паттернов культивированных бактерий // *Математическое моделирование*. 2024. Т. 36. № 6. С. 59–73. DOI:10.20948/mm-2024-06-04
8. *Jornet M.* Modeling of Allee effect in biofilm formation via the stochastic bistable Allen–Cahn partial differential equation // *Stochastic Analysis and Applications*. 2020. Vol. 39. № 1. P. 22–32. DOI:10.1080/07362994.2020.1777163
9. *Tijani Y.O., Appadu A.R.* Unconditionally positive NSFD and classical finite difference schemes for biofilm formation on medical implant using Allen–Cahn equation // *Demonstratio Mathematica*. 2022. Vol. 55. № 1. P. 40–60. DOI:10.1515/dema-2022-0006
10. *Shuai Y., Maslovskaya A.* Computer-assisted approach to study of bacterial communication for Landau-based model of population growth // 2024 Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems (AMCSM), Voronezh, Russian Federation. 2024. P. 1–7. DOI:10.1109/AMCSM59829.2023.10525808
11. *Mueller M., de la Pena A., Derendorf H.* Issues in pharmacokinetics and pharmacodynamics of anti-infective agents: kill curves versus MIC // *Antimicrobial agents and chemotherapy*. 2004. Vol. 48. № 2. P. 369–377. DOI:10.1128/aac.48.2.369-377.2004
12. *Nielsen E.I., Friberg L.E.* Pharmacokinetic-pharmacodynamic modeling of antibacterial drugs // *Pharmacological reviews*. 2013. Vol. 65. № 3. P. 1053–1090. DOI: 10.1124/pr.111.005769
13. *Sy S.K., Zhuang L., Derendorf H.* Pharmacokinetics and pharmacodynamics in antibiotic dose optimization // *Expert opinion on drug metabolism & toxicology*. 2016. Vol. 12. № 1. P. 93–114. DOI:10.1517/17425255.2016.1123250
14. *Shuai Y., Maslovskaya A., Kuttler C.* 2D reaction-diffusion model of quorum sensing characteristics during all phases of bacterial growth // *Far Eastern Mathematical Journal*. 2022. Vol. 22. № 2. P. 232–237. DOI:10.47910/FEMJ202231
15. *Shuai Y., Maslovskaya A.G., Kuttler C.* Modeling of bacterial communication in the extended range of population dynamics // *Mathematical Biology and Bioinformatics*. 2023. Vol. 18. № 1. P. 89–104. DOI:10.17537/2023.18.89
16. *Martínez-Calvo A., Bhattacharjee T., Bay R.K., Luu H.N., Hancock A.M., Wingreen N.S., Datta S.S.* Morphological instability and roughening of growing 3D bacterial colonies // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2022. Vol. 119. № 43. P. e2208019119. DOI:10.1073/pnas.2208019119
17. *Firsov A.A., Vostrov S.N., Shevchenko A.A., Cornaglia G.* Parameters of bacterial killing and re-growth kinetics and antimicrobial effect examined in terms of area under the concentration-time curve relationships: action of ciprofloxacin against Escherichia coli in an in vitro dynamic model // *Antimicrobial agents and chemotherapy*. 1997. Vol. 41. № 6. P. 1281–1287. DOI:10.1128/aac.41.6.1281
18. *Roberts P.A., Huebinger R.M., Keen E., Krachler A.M., Jabbari S.* Mathematical model predicts anti-adhesion-antibiotic-debridement combination therapies can clear an antibiotic resistant infection // *PLoS Comput Biol*. 2019. Vol. 15. № 7. P. e1007211. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1007211



System for Modeling the Spatial Dynamics of the Bacterial Population Under Varying Antimicrobial Treatment Regimes

Shuai Yixuan*

Kazan Federal University (KFU), Kazan, Russia,

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3465-7030>

e-mail: shuaiyixuan@qq.com

This work is devoted to the development and implementation of a model for the evolution of a bacterial population grown on a nutrient medium under conditions of controlled biomass inhibition by an antimicrobial agent. To formalize the model a continuous deterministic approach is used. The mathematical model is described by an initial boundary value problem for a system of reaction-diffusion equations defining the spatio-temporal distributions of nutrient substrate and biomass, taking into account integration with a pharmacokinetic model for a single antimicrobial treatment. The model was implemented by the finite element method using the finite element analysis system – COMSOL Multiphysics platform. A series of computational experiments were performed to establish numerical patterns of changes in bacterial mass concentration with variation in antimicrobial dose. A discussion of the potential application of this approach to investigate the issue of bacterial resistance to antibiotics is presented.

Keywords: reaction-diffusion system, bacterial growth model, nutrient substrate, finite element method, logistic growth model, pharmacokinetics, bacterial resistance

Funding. The study has been supported by the Kazan Federal University (the Strategic Academic Leadership Program “PRIORITY-2030”).

Acknowledgements. The author thanks his supervisor, Professor A.G. Maslovskaya, for the help in preparing the publication.

For citation:

Shuai Y. System for Modeling the Spatial Dynamics of the Bacterial Population Under Varying Antimicrobial Treatment Regimes. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modeling and Data Analysis*, 2025. Vol. 15, no. 1, pp. 19–34. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2025150102> (In Russ.,abstr. in Engl.).

***Shuai Yixuan**, PhD student, Institute of computational mathematics and information technologies, Kazan Federal University (KFU), Kazan, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3465-7030>, e-mail: shuaiyixuan@qq.com

References

1. Aslam B., Wang W., Arshad M.I., Khurshid M., Muzammil S., Rasool M.H., Nisar M.A., Alvi R.F., Aslam M.A., Qamar M.U., Salamat M.K. Antibiotic resistance: a rundown of a global crisis // *Infection and drug resistance*. 2018. Vol. 10. P. 1645–1658. DOI: 10.2147/IDR.S173867
2. Frieri M., Kumar K., Boutin A., Antibiotic resistance // *Journal of infection and public health*. 2017. Vol. 10. № 4. P. 369–378. DOI:10.1016/j.jiph.2016.08.007
3. Golding I., Kozlovsky Y., Cohen I., Ben-Jacob E. Studies of bacterial branching growth using reaction–diffusion models for colonial development // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 1998. Vol. 260. № 3–4. P. 510–554. DOI:10.1016/S0378-4371(98)00345-8
4. Eberl H.J., Parker D.F., van Loosdrecht M.C.M. A new deterministic spatio-temporal continuum model for biofilm development // *Computational and Mathematical Methods in Medicine*. 2001. Vol. 3. № 3. P. 161–175. DOI:10.1080/10273660108833072
5. Mimura M., Sakaguchi H., Matsushita M. Reaction-diffusion modelling of bacterial colony patterns // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2000. Vol. 282. № 1–2. P. 283–303. DOI:10.1016/S0378-4371(00)00085-6
6. Kawasaki K., Mochizuki A., Matsushita M., Umeda T., Shigesada N. Modeling spatio-temporal patterns generated by *Bacillus subtilis* // *Journal of theoretical biology*. 1997. Vol. 188. № 2. P. 177–185. DOI:10.1006/jtbi.1997.0462
7. Shevkun I.A., Maslovskaya A.G. Gibridnyj podkhod k modelirovaniyu i ocnke strukturnykh osobennostej patternov kul'tivirovannykh bakterij // *Matematicheskoe modelirovanie*. 2024. T. 36. № 6. S. 59–73. DOI:10.20948/mm-2024-06-04
8. Jornet M. Modeling of Allee effect in biofilm formation via the stochastic bistable Allen–Cahn partial differential equation // *Stochastic Analysis and Applications*. 2020. Vol. 39. № 1. P. 22–32. DOI:10.1080/07362994.2020.1777163
9. Tijani Y.O., Appadu A.R. Unconditionally positive NSFD and classical finite difference schemes for biofilm formation on medical implant using Allen–Cahn equation // *Demonstratio Mathematica*. 2022. Vol. 55. № 1. P. 40–60. DOI:10.1515/dema-2022-0006
10. Shuai Y., Maslovskaya A. Computer-assisted approach to study of bacterial communication for Landau-based model of population growth // 2024 *Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems (AMCSM)*, Voronezh, Russian Federation. 2024. P. 1–7. DOI:10.1109/AMCSM59829.2023.10525808
11. Mueller M., de la Pena A., Derendorf H. Issues in pharmacokinetics and pharmacodynamics of anti-infective agents: kill curves versus MIC // *Antimicrobial agents and chemotherapy*. 2004. Vol. 48. № 2. P. 369–377. DOI:10.1128/aac.48.2.369-377.2004
12. Nielsen E.I., Friberg L.E. Pharmacokinetic-pharmacodynamic modeling of antibacterial drugs // *Pharmacological reviews*. 2013. Vol. 65. № 3. P. 1053–1090. DOI: 10.1124/pr.111.005769
13. Sy S.K., Zhuang L., Derendorf H. Pharmacokinetics and pharmacodynamics in antibiotic dose optimization // *Expert opinion on drug metabolism & toxicology*. 2016. Vol. 12. № 1. P. 93–114. DOI:10.1517/17425255.2016.1123250
14. Shuai Y., Maslovskaya A., Kuttler C. 2D reaction-diffusion model of quorum sensing characteristics during all phases of bacterial growth // *Far Eastern Mathematical Journal*. 2022. Vol. 22. № 2. P. 232–237. DOI:10.47910/FEMJ202231
15. Shuai Y., Maslovskaya A.G., Kuttler C. Modeling of bacterial communication in the extended range of population dynamics // *Mathematical Biology and Bioinformatics*. 2023. Vol. 18. № 1. P. 89–104. DOI:10.17537/2023.18.89
16. Martínez-Calvo A., Bhattacharjee T., Bay R.K., Luu H.N., Hancock A.M., Wingreen N.S., Datta S.S. Morphological instability and roughening of growing 3D bacterial colonies //



Proceedings of the National Academy of Sciences. 2022. Vol. 119. № 43. P. e2208019119. DOI:10.1073/pnas.2208019119

17. Firsov A.A., Vostrov S.N., Shevchenko A.A., Cornaglia G. Parameters of bacterial killing and regrowth kinetics and antimicrobial effect examined in terms of area under the concentration-time curve relationships: action of ciprofloxacin against *Escherichia coli* in an in vitro dynamic model // Antimicrobial agents and chemotherapy. 1997. Vol. 41. № 6. P. 1281–1287. DOI:10.1128/aac.41.6.1281
18. Roberts P.A., Huebinger R.M., Keen E., Krachler A.M., Jabbari S. Mathematical model predicts anti-adhesion-antibiotic-debridement combination therapies can clear an antibiotic resistant infection // PLoS Comput Biol. 2019. Vol. 15. № 7. P. e1007211. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1007211

Получена 05.02.2025

Received 05.02.2025

Принята в печать 19.02.2025

Accepted 19.02.2025

УДК 004.8

Применение машинного обучения для оценки растворимости лекарственных соединений: сравнение различных представлений молекулярных данных

Ерещенко А.В.*

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской Академии Наук, г. Москва, Российская Федерация
e-mail: ereshchenko.alexey@gmail.com

Растворимость является одной из ключевых характеристик лекарств и важна для определения на ранних этапах разработки препарата. Алгоритмы, основанные на машинном обучении (ML), предлагают более быстрое решение этой задачи по сравнению с вычислительно более затратными методами, использующими расчеты энергии, квантовую динамику и расчеты молекулярной динамики. В данной работе несколько алгоритмов ML, использующих различные подходы к представлению молекулярных данных, а именно сверточные нейронные сети, графовые нейронные сети и градиентный бустинг на основе решающих деревьев, применяются к открытому набору данных из недавно опубликованного конкурса Kaggle по растворимости, содержащему более чем 70 000 соединений. Производительность моделей оценивается на тестовом наборе данных, предоставленном на данном соревновании, а также на локально созданном независимом наборе данных. Результаты показывают более высокую точность модели градиентного бустинга, обученной на табличном представлении молекул, в сравнении с другими обученными методами. Данная модель также демонстрирует сравнимые результаты с другими решениями, представленными в таблице лидеров выбранного конкурса Kaggle.

Ключевые слова: машинное обучение, растворимость лекарств, графовые нейронные сети, градиентный бустинг, сверточные нейронные сети

Для цитаты:

Ерещенко А.В. Применение машинного обучения для оценки растворимости лекарственных соединений: сравнение различных представлений молекулярных данных. // Моделирование и анализ данных. 2025. Том 15. № 1. С. 35–50. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2025150103>

***Ерещенко Алексей Владимирович**, аспирант Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской Академии Наук, Москва, Российская Федерация, e-mail: ereshchenko.alexey@gmail.com



1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из ключевых физико-химических свойств, которые учитываются при разработке лекарств, является водная растворимость. Растворимость может влиять на вариабельность пероральной биодоступности, вызывать недостаточное всасывание и, следовательно, недостаточную эффективность препарата. Кроме того, низкая растворимость затрудняет тестирование активности соединения и вызывает нежелательные побочные эффекты [1]. Поэтому фармацевтические компании приоритизируют растворимость как один из ключевых этапов оптимизации лекарств [2]. Однако оценка растворимости соединений остается сложной задачей. Появляется все больше информации, подтверждающей, что растворимость лекарств *in vitro* может недооценивать настоящую растворимость *in vivo* [1]. Исследование, проведенное в 2010 году, оценило, что 40% доступных лекарств обладают низкой растворимостью [3], а проведенное уже в 2014 году исследование оценило, что около 70% молекул, находящихся в разработке, имеют низкую растворимость [4].

Было разработано множество алгоритмов для прогнозирования растворимости: полуэмпирические методы, такие как модифицированное уравнение растворимости [5], которое не использует подогнанные параметры, UNIFAC, метод, который объединяет концепцию функциональных групп с коэффициентами активности, основанными на квазихимической теории жидких смесей [6], методы, основанные на минимизации энергии, которые используют симуляции кристаллической решетки и свободной энергии [7], методы молекулярной динамики [8], [9], модели, основанные на количественных данных взаимосвязи между структурой и активностью [10], [11]. Решения, использующие ML, также применялись для этой задачи, стремясь обеспечить более высокую точность по сравнению с полуэмпирическими методами, для которых требуются более длительные и сложные расчеты, основанные на минимизации энергии и динамическом моделировании. Были исследованы различные подходы ML к прогнозированию растворимости: в [12] было проведено сравнение случайного леса (RF), метода частичных наименьших квадратов, метода опорных векторов и искусственных нейронных сетей, в [13] были разработаны модели с применением сверточной нейронной сети (CNN), рекуррентной нейронной сети, глубокой нейронной сети и спайковых нейронных сетей. В [14] был реализован ансамбль рекурсивных нейронных сетей. Комбинации различных архитектур ML и вычислительной химии также использовались для этой задачи в [15].

Большинство доступных наборов данных о соединениях с известной растворимостью предоставляют информацию о соединениях в их упрощенной молекулярной входной строковой записи (SMILES), которая является широко признанной формой описания молекулярных структур. В результате многие существующие модели используют признаки, полученные из SMILES, и важным отличительным аспектом решений на основе ML является то, как они представляют молекулу в пространстве признаков. Сбор физико-химических свойств (например, число тяжелых атомов или молекулярный вес) является общим шагом для почти всех существующих решений

на основе ML, однако подход к извлечению структурных данных может различаться. В данной работе рассматриваются три часто используемых подхода к декодированию SMILES молекул: представление в виде отпечатков Моргана [16], токенизация символов SMILES и их рассмотрение как последовательности закодированных токенов, а также построение молекулярного графа на основе доступной информации об атомах и их связях. Используя публично доступный набор данных, содержащий более 70 000 молекул с известной растворимостью, были обучены и сравнены ML -модели на основе трех различных алгоритмов и подходов к представлению данных: модель градиентного бустинга в реализации CatBoost [17], одномерная сверточная нейронная сеть (1D CNN) и графовая нейронная сеть на основе механизма внимания.

2. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

ML алгоритмы

Общая задача может быть описана следующим образом: дан набор данных $D = \{(x_k, y_k)\}_{k=1..n}$, где x_k это некое признаковое представление объекта, а $y_k \in \mathbb{R}$ это целевой ответ по данному объекту, при этом примеры (x_k, y_k) независимы друг от друга. В данной работе автор подходит к задаче прогнозирования y путем обучения модели $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ которая бы минимизировала выбранную функцию потерь $L(F) = \text{EL}(y, F(x))$, где (x, y) – это примеры, независимо выбранные из обучающего набора. Для данного набора данных, x_k представлены строками SMILES, которые, в свою очередь, могут быть представлены в виде различных признаковых пространств, используемых различными архитектурами моделей. Одним из наиболее распространенных признаковых описаний, которое можно извлечь из SMILES молекул, является отпечаток Моргана, представляющий собой способ кодирования структурных характеристик молекулы в вектор. Молекулярные отпечатки являются основой исследований структурно-активных взаимодействий, однако имеют несколько недостатков – они могут не отображать структурные различия в больших молекулах и дают плохое представление глобальных характеристик, таких как размер и форма [18]. Для устранения недостатков представления глобальных характеристик было собрано 11 часто используемых физико-химических признаков, основанных на SMILES, с использованием программного обеспечения RDKit (<https://www.rdkit.org/>), таких как HBA (количество акцепторов водородных связей), HBD (количество доноров водородных связей), количество ароматических колец и т.д. (полный список доступен в Приложении S1). Эти признаки позволяют построить табличное описание целевой молекулы, что позволяет использовать алгоритмы ML, хорошо работающие с данными в табличной форме, такие как алгоритм градиентного бустинга CatBoost. Процедура градиентного бустинга итеративно строит последовательность приближений $F^t: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, где F^t получается из предыдущего приближения аддитивным способом: $F^t = F^{t-1} + ah^t$, где a – это шаг, а функция h^t – базовый предиктор. В случае CatBoost в качестве базовых предикторов используются бинарные решающие деревья [17]. Библиотека CatBoost была выбрана благодаря



своей высокой точности (является одним из передовых алгоритмов градиентного бустинга), обширной документации, а также гибкости и удобства использования. Модель CatBoost была обучена на векторах, состоящих из объединенных отпечатков Моргана и 11 физико-химических дескрипторов. Следует отметить, что в модель Catboost также можно подать представление данных в виде последовательности текстовых символов, как было проведено в [19] в рамках задачи семантического анализа, однако это не самый характерный сценарий для применения данного алгоритма, и в данной работе не рассматривается.

Относительно недавний подход к представлению молекулярных данных заключается в кодировании символов SMILES в токены, создании обучаемых векторных представлений для этих токенов и обработке молекулы как последовательности этих обученных векторных представлений. Архитектура 1D CNN является одним из возможных подходов к построению нейронной сети, которая может быть обучена на таких данных. Этот подход набирает популярность как инструмент работы с молекулярными данными. Он показал высокую производительность в недавнем открытом конкурсе по предсказанию молекулярных свойств [20]. 1D CNN выполняет свёртку по последовательности векторных представлений токенизированного SMILES, что позволяет извлекать структурные закономерности. В данном исследовании использовалась реализация 1D CNN из библиотеки PyTorch [21], которая учитывает взаимную корреляцию и может в общих чертах быть описана следующим образом (предполагая, что фильтр перебирает элементы по одному) [22]:

$$(I * K)(i) = \sum_{u=1}^s I(i + u - 1) K(u)$$

где K это фильтр с размером s , I это входной сигнал длинны n , индекс i идет от 1 до n , а индекс u идет от 1 to s . В случае свертки с применением множества фильтров над массивом входного сигнала, состоящего из множества столбцов, операция свертки может быть проведена для каждого столбца отдельно, где множество фильтров может быть представлено в виде тензора третьего порядка размерностью $s \times p \times q$, где p это число сверток а q это количество столбцов. В результате будет получена 2D матрица размером $(n - s + 1) \times q$, которая может быть рассмотрена как массив q столбцов, в котором каждый столбец это сумма p сверток [22]:

$$C_l(i) = \sum_{j=1}^p I_j * K_{j,l}(u)$$

где $l = 1, 2, \dots, q$.

Кроме того, в свёртку также включается обучаемый параметр суммируемого смещения. Помимо токенизированной последовательности, 1D CNN также был обучен использовать вышеупомянутые 11 физико-химических дескрипторов, чтобы обеспечить глобальное представление молекулярных свойств. Дополнительные признаки были объединены с выводом блока 1D CNN слоев для использования в последующих линейных слоях.

Графическое представление является одним из распространённых способов описания молекулярных структур, и открывает возможности для использования графовых нейронных сетей, применение которых набирает популярность в области биоинформатики и разработки лекарств. Графовая нейронная сеть обрабатывает молекулярный граф как комбинацию узлов и рёбер, где узлы представлены набором признаков, соответствующих данному атому, а рёбра представлены списками пар индексов узловых признаков. В данной работе признаки на ребрах графа были определены дескрипторами гибридизации и типом связи и также использовались графовой нейронной сетью. Существует множество архитектур операторов графовых нейронных сетей, основным различием которых являются используемые методы передачи сообщений и обновления информации узлов. Выбранный графовый нейронный оператор [23] использует механизм многоголового внимания, широко применяемый в архитектурах трансформеров, и может быть описан следующим образом:

$$x_i = W_1 x_i + \sum_{j \in N(i)} a_{i,j} (W_2 x_j + W_5 e_{ij})$$

Здесь x_i это корень графа, x_j – узел, от которого передаётся сообщение, e_{ij} – признаки на ребре, соединяющем узлы x_i и x_j , W_1 соответствует матрице весов корня графа, W_2 – это матрица весов значений, W_5 – матрица весов признаков ребра, $N(i)$ – индексы всех узлов, связанных с данным узлом.

Коэффициент внимания $a_{i,j}$ вычисляется следующим образом:

$$a_{i,j} = \text{softmax} \left(\frac{(W_3 x_i)^T (W_4 x_j + W_5 e_{ij})}{\sqrt{d}} \right)$$

где d это скрытая размерность каждой головы внимания, W_3 – это матрица весов запроса, W_4 – матрица весов ключа. Следует отметить, что W_1 , W_2 , W_3 и W_4 включают обучаемый параметр суммируемого смещения.

Обученная модель GNN использовала графовое представление последовательности SMILES в качестве входных данных, где свойства атомов (например, имя атома, гибридизация) хранились в виде признаков узлов, а информация о связях – на ребрах графа. Кроме того, вышеупомянутые 11 физико-химических дескрипторов были использованы в качестве дополнительных признаков, которые конкатенируются с результирующим объединённым вектором выходных данных GNN, чтобы далее использоваться в последующих линейных слоях.

Описание набора данных и их предобработка

Набор данных был взят из недавно опубликованного соревнования Kaggle «1st EUOS/SLAS Joint Challenge: Compound Solubility», для которого данные подготовила организация EU-OPENSOURCE ERIC [24]. Набор данных содержит 101 017 соединений, из которых 70 710 доступны для обучения моделей, а 30 307 зарезервированы для тестирования моделей. Каждое соединение записано в формате SMILES,



дополнительно предоставлены идентификаторы соединений. Целью конкурса было правильно предсказать метку растворимости соединения, которая могла быть высокой, средней или низкой (в предоставленном наборе данных обозначены как 2, 1 и 0 соответственно). В обучающей выборке из 70 710 соединений содержалось 65 834 соединения с высокой растворимостью, 2 835 соединений со средней растворимостью и 2 041 соединение с низкой растворимостью. В рамках данного исследования обучающая часть опубликованного набора данных была использована для подготовки обучающих, валидационных и независимых тестовых наборов данных для обучения и сравнения разработанных моделей. 30 307 соединений из исходного набора данных также были использованы для дополнительного тестирования.

В рамках предобработки данных была проанализирована длина строковых описаний соединений в формате SMILES. Хотя 99,8% всех соединений в формате SMILES содержали от 18 до 95 символов, были выявлены некоторые выбросы, достигающие 226 символов и минимально 7 символов. Поскольку все 3 разрабатываемые модели чувствительны к размеру входной структуры, выбросы были удалены. Для сравнения был сформирован внутренний независимый тестовый набор путем отделения 10% данных случайным образом. Оставшиеся данные были разделены на 5 случайных обучающих и валидационных разбиений. Одни и те же разбиения были использованы для обучения моделей всех трех алгоритмов, чтобы обеспечить более объективное сравнение. Для учета несбалансированности набора данных к предсказаниям моделей были применены экспоненциальные балансирующие коэффициенты. Коэффициенты были настроены для получения максимального квадратичного коэффициента Каппа (коэффициента Каппа) на обучающем наборе данных, используя реализацию алгоритма минимизации Пауэлла [25] в библиотеке Python Sklearn [26].

Подготовка и обучение моделей

Входные признаки для модели Catboost состояли из 11 физико-химических дескрипторов и вектора отпечатка Моргана размером 1024 бита с радиусом 2. Для настройки гиперпараметров модели был выполнен поиск по сетке с пятикратной кросс-валидацией на объединении валидационной и обучающей выборок. Итоговые параметры для модели градиентного бустинга были следующими: скорость обучения 0,1, глубина дерева 10 и регуляризация листьев L2 1. Для каждого из пяти тренировочных и валидационных разделений данных была обучена отдельная модель. Обучение останавливалось, если значение функции потерь на валидации не улучшалось в течение 400 итераций, с фиксацией итерации с наименьшим значением потери на валидации. Обучение одной модели требовало около 2,5 секунд на 100 итераций.

Для модели 1D CNN входная последовательность состояла из токенизированной последовательности символов. Чтобы токенизировать строковое представление SMILES, числовые значения были присвоены часто встречающимся символам (с комбинациями, обозначающими единственное свойство или имя атома, например «Cl» или «Na», закодированными как один токен). Общее количество уникальных токенов (включая токены, зарезервированные для заполнения или неизвестных случаев) составило 40. Все последовательности SMILES были токенизированы данным



образом, с максимальным размером последовательности 95, соответствующим максимальному размеру строки SMILES, найденному в обучающих данных после исключения выбросов. Разработанная модель 1D CNN включала слой с размерностью 256 для обучения векторных представлений токенов. Векторное представление передавалось в блок CNN, состоящий из пяти слоев 1D CNN, каждый из которых имел увеличивающееся количество фильтров, начиная с 64 и удваивающееся в каждом последующем слое, с фильтром размерностью 5, использующим функцию активации линейный выпрямитель (ReLU). Средний и максимальный ответы слоев CNN для данной последовательности получались с помощью слоев средней и максимальной субдискретизации соответственно. Эти ответы затем объединялись с 11 физико-химическими дескрипторами и обрабатывались многослойным линейным блоком, который использовал функцию активации ReLU с «утечкой» и включал пакетную нормализацию и слои обнуления с вероятностью обнуления 20%. Модель обучалась пакетами размером 2048, со скоростью обучения 10–4, используя алгоритм оптимизации Adam и функцию потерь перекрестной энтропии. Для каждого из пяти тренировочных и валидационных разделений обучение проводилось в течение 60 эпох, с возможностью ранней остановки, если значение функции потерь на валидации не улучшалось в течение 10 эпох. Веса моделей с наименьшим значением функции потерь на валидации были выбраны как итоговые. Обучение одной модели требовало около двух секунд на одну обучающую эпоху.

Для подготовки данных для модели GNN были извлечены следующие признаки из описания SMILES молекул (с применением библиотеки RDkit) для каждого атома: имя атома (12 категорий), тип гибридизации (5 категорий), степень атома, определенная количеством связанных с ним соседей (в диапазоне от 0 до 5), общее количество неявных и явных водородов (в диапазоне от 0 до 5), неявная валентность (в диапазоне от 0 до 5), является ли атом частью кольца и является ли он ароматическим (бинарные значения). Все числовые признаки были нормализованы. Были собраны следующие признаки связей, соединяющих атомы: тип связи (4 категории), является ли связь частью кольца и является ли она сопряженной (бинарные признаки).

При формировании графов, признаки атомов хранились на узлах графа, а признаки связей хранились на ребрах графа. Ребра образовывались только между атомами, имеющими связи. Графы были неориентированными. Для категориальных признаков узлов и ребер были созданы обучаемые векторные представления: 16-мерные векторы генерировались для признаков имени атома и гибридизации, и 8-мерный вектор генерировался для признака типа связи. Результирующие векторы затем объединялись с оставшимися числовыми признаками ребер и узлов. Признаки связей дополнительно передавались через многослойный линейный блок с выходным размером 16.

Результирующие 37-мерные векторы узлов и 16-мерные векторы ребер передавались в блок из 7 слоев GNN с 8 головами внимания и 64 нейронами, с 20% слоем обнуления на уровне узлов (кроме первого слоя GNN в блоке) и пакетной нормализацией. Выход последнего слоя GNN объединялся с помощью суммирующей, максимальной и средней субдискретизации. Результирующие 3 вектора объединялись,



проходили пакетную нормализацию, объединялись с 11 ранее упомянутыми физико-химическими дескрипторами и передавались в многослойный линейный блок, с 50% слоем обнуления и пакетной нормализацией между линейными слоями, который давал окончательный ответ. Использовалась функция активации ReLU с «утечкой» с параметром отрицательного наклона 0,2. Модель обучалась пакетами размером 2048, со скоростью обучения 10–3, используя алгоритм оптимизации Adam и функцию потерь перекрестной энтропии. Для каждого из пяти тренировочных и валидационных разделений обучение проводилось в течение 100 эпох, с возможностью ранней остановки, если значение функции потерь на валидации не улучшалось в течение 10 эпох. Веса моделей с наименьшим значением функции потерь на валидации были выбраны как итоговые. Обучение одной модели требовало около 7 секунд на одну эпоху.

Все модели были обучены на графической карте NVIDIA RTX 4090 с 24 Гб видеопамати.

Статистика и воспроизводимость

Статистический анализ проводился с помощью библиотеки SciPy Python [27]. Распределение данных коэффициентов Каппа проверялось с помощью теста Шапиро-Уилка. Если распределения были нормальными, выполнялся т-тест Стьюдента, в противном случае выполнялся тест Манна-Уитни. Для коэффициентов Каппа и AP, полученных из усредненных прогнозов, использовался бутстрэп с 5000 образцами. Различия считались значимыми для р-значений ниже 0,05.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Результаты на независимом тестовом наборе

Сравнение алгоритмов было произведено по коэффициенту Каппа Коэна, так как он был выбран организаторами конкурса в качестве основного оценочного показателя, а также по средней точности (AP). Для обеспечения более надежного сравнения, предсказания моделей обученных моделей в рамках каждого алгоритма были усреднены. Для коэффициента Каппа были использованы коэффициенты балансировки (полученные как описано выше).

Усредненные предсказания моделей 1D CNN, GNN и CatBoost показали коэффициенты Каппа 0.0356, 0.0597 и 0.0708 соответственно. Модели показали значительное различие (р-значение < 0.05) между собой по данной метрике. Также было проведено сравнение предсказаний моделей, обученных на пяти разных разбиениях обучающей выборки, по отдельности (Рис. 1).

Как можно видеть, разные разбиения обучающей выборки показали схожие результаты: модели CatBoost дали лучшие результаты, а 1D CNN – наименьшие, с статистически значимой разницей (р-значения $< 0,05$). Оценка усредненных предсказаний моделей с использованием метрики AP была в пользу CatBoost, но с меньшей разницей в полученных метриках между моделями: 0,347, 0,343 и 0,337 для моделей CatBoost, GNN и 1D CNN соответственно, с статистически значимой разницей (р-значения $< 0,05$).

В ходе этого теста также было обнаружено, что все модели рассматриваемых алгоритмов показали значительно более слабые результаты на классах с низкой и средней растворимостью: например, при показателе AP 0,94 для класса с высокой растворимостью, модель CatBoost показала только 0,05 AP для классов с низкой и средней растворимостью. Такие результаты могут быть связаны с природой данных, а не с выбранными алгоритмами, поскольку, как будет показано в следующем разделе, разработанные модели показали результаты, сравнимые с лучшими решениями, представленными на «1st EUOS/SLAS Joint Challenge: Compound Solubility».

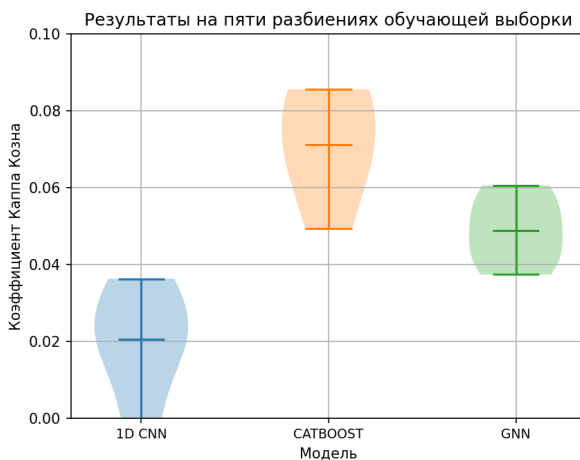


Рис. 1. Сравнение обученных моделей на независимой выборке данных

Результаты на независимом тестовом наборе

Тестовый набор данных, созданный организаторами, был равномерно разделен на закрытые и открытые наборы. Эти наборы использовались для дополнительного сравнения моделей на данных, значительно отличающихся от тренировочных данных. Открытый набор использовался во время конкурса для того, чтобы участники могли оценивать свои решения, а закрытый набор использовался для финальной оценки и выбора победителей. Поскольку правильные метки не были публично доступны, оценка обученных моделей на этих данных осуществлялась путем отправки аннотированных таблиц через веб-сайт Kaggle для получения коэффициента Каппа, определяемого скриптом организаторов конкурса.

Аннотация данных проводилась тем же методом, что и при локальном независимом тестировании: усредненные прогнозы 5 обученных моделей для каждого из рассматриваемых алгоритмов, с применением балансирующих коэффициентов к каждому из 3 предсказанных классов, использовались для разметки каждого соединения из тестового набора. Модели 1D CNN показали наименьшие оценки, с 0,06678 на закрытом наборе и 0,07219 на открытом наборе. GNN модели показали более высокие оценки, с 0,07047 на приватном наборе и 0,11456 на публичном наборе. Модели



Catboost показали наивысшие оценки, с 0,09676 на приватном наборе и 0,11903 на публичном наборе. Как можно видеть, результаты на этих наборах данных схожи с результатами, полученными на локальном независимом тестовом наборе: модели Catboost показали наилучшие результаты, а модели 1D CNN показали наименее точные результаты. При этом GNN модели показали наибольшую разницу в своей точности между открытым и закрытым наборами данных.

Следует отметить, что этот набор данных был использован в основном для сравнения моделей, разработанных в целях этого исследования, а не для сравнения с другими решениями, представленными на соревновании «1st EUOS/SLAS Joint Challenge: Compound Solubility». Одной из основных причин этого является то, что модели, разработанные для получения высоких результатов в каком-либо соревновании по машинному обучению, обычно адаптированы к конкретному набору данных, тогда как целью этого исследования было сравнить подходы к представлению данных в более общей форме. Например, одним из признаков, использованных в победивших решениях, был идентификационный номер соединения, поскольку во время соревнования было обнаружено, что он коррелирует с целевыми классами. Если использовать этот признак во время обучения, то он улучшает точность моделей на этом наборе данных, хотя идентификатор соединения не влияет на растворимость и не должен оказывать никакого влияния на точность предсказаний. Чтобы продемонстрировать этот эффект на практике, были обучены пять моделей CatBoost, которые дополнительно учитывали идентификаторы соединений, при этом процедура обучения проводилась так же, как описано выше. Усреднение полученных в результате пяти моделей показало оценку 0,10903 на закрытой выборке и оценку 0,13323 на открытой выборке, что позволило бы этому решению занять третье место в соревновании, где лучшее решение показало коэффициент Каппа 0,11562 (исключая четыре решения, которые были дисквалифицированы организаторами соревнования). Одна из пяти обученных моделей показала еще более высокую оценку 0,11021 на закрытой выборке.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этом исследовании были протестированы несколько подходов к представлению молекулярных данных на задаче предсказания растворимости с использованием большого открытого набора данных, содержащего более 70 000 соединений, подготовленного EU-OPENSOURCE ERIC и опубликованного в недавнем соревновании на платформе Kaggle. Модели 1D CNN были обучены на векторных представлениях токенизированных SMILES молекул, рассматривая их как последовательность, модели GNN были обучены на графовом представлении молекул, а модели градиентного бустинга Catboost были обучены на представлении молекул с использованием отпечатков Моргана. Также эти пространства признаков были дополнены 11 физико-химическими дескрипторами для лучшего представления глобальных молекулярных свойств. Проведенные эксперименты на пяти разных разделениях выборки на обучение и валидацию показали модели CatBoost как наиболее точные,



как на локально подготовленном независимом тестовом наборе, так и на тестовых наборах, опубликованных в вышеупомянутом соревновании. Все обученные модели продемонстрировали значительно более сильную предсказательную способность для класса высокой растворимости, чем для классов средней и низкой растворимости. Подобный результат может быть связан с природой самого набора данных, поскольку лучшее из обученных решений также продемонстрировало результаты, сравнимые с лучшими решениями, представленными на соревновании (на основе метрики, выбранной организаторами соревнования). Полученные результаты показывают, что представления молекул, извлеченных из SMILES в виде графов или векторных представлений символов, не обязательно превосходят более традиционные табличные представления, состоящие из отпечатков Моргана и химических дескрипторов. Это исследование также продемонстрировало, что предсказание растворимости остается сложной задачей для алгоритмов, основанных на машинном обучении. Лучшие из локально обученных моделей, а также решения, представленные на вышеупомянутом соревновании (исключая модели, которые использовали идентификационный номер соединения в качестве признака), могли достичь коэффициента Каппа около 0,10, что указывает на достаточно слабую предсказательную способность. Подобные результаты могут быть объяснены потенциальным шумом и неточностями в самих данных, но эти аспекты не были исследованы в данной работе.

Литература

1. Fink, C., Sun, D., Wagner, K., Schneider, M., Bauer, H., Dolgos, H., Mäder, K., Peters, S.-A. Evaluating the Role of Solubility in Oral Absorption of Poorly Water-Soluble Drugs Using Physiologically-Based Pharmacokinetic Modeling // Clin. Pharmacol. Ther. 2020. 107: 650–661. DOI: 10.1002/cpt.1672
2. Ameta, R.K., Soni, K., Bhattarai, A. Recent Advances in Improving the Bioavailability of Hydrophobic/Lipophilic Drugs and Their Delivery via Self Emulsifying Formulations // Colloids Interfaces. 2023. 7. 16. DOI: 10.3390/colloids7010016
3. Loftsson, T., Brewster, M.E. Pharmaceutical applications of cyclodextrins: basic science and product development // Journal of Pharmacy and Pharmacology. 2010. Volume 62, Issue 11, November 2010, Pages 1607–1621. DOI: 10.1111/j.2042-7158.2010.01030.x
4. Basavaraj, S., Guru V. Betageri, G.V. Can formulation and drug delivery reduce attrition during drug discovery and development – review of feasibility, benefits and challenges // Acta Pharmaceutica Sinica B. 2014. Volume 4, Issue 1. Pages 3–17, ISSN 2211-3835. DOI: 10.1016/j.apsb.2013.12.003
5. Ran, Y., Samuel H. Yalkowsky, S.H. Prediction of Drug Solubility by the General Solubility Equation (GSE) // Journal of Chemical Information and Computer Sciences. 2001. 41 (2). 354–357. DOI: 10.1021/ci000338c
6. Fredenslund, A., Jones, R.L. Prausnitz, J.M. Group-contribution estimation of activity coefficients in nonideal liquid mixtures // AIChE J. 1975. 21: 1975, 1086–1099. DOI: 10.1002/aic.690210607
7. Palmer, D.S., McDonagh, J.L., Mitchell, J.B.O., Mourik, T., Fedorov, M.V. First-Principles Calculation of the Intrinsic Aqueous Solubility of Crystalline Druglike Molecules // Journal of Chemical Theory and Computation. 2012. 8. (9), 3322–3337. DOI: 10.1021/ct300345m
8. Li, L., Totton, T., Frenkel, D. Computational methodology for solubility prediction: Application to the sparingly soluble solutes // J. Chem. Phys. 2017. 146 (21): 214110. DOI: 10.1063/1.4983754



9. Boothroyd, S., Anwar, J. Solubility prediction for a soluble organic molecule via chemical potentials from density of states // *The Journal of Chemical Physics*. 2019. 151, 184113. DOI: 10.1063/1.5117281
10. Duchowicz, P.R., Castro, E.A. QSPR Studies on Aqueous Solubilities of Drug-Like Compounds // *Int. J. Mol. Sci.* 2009. 10, 2558–2577. DOI: 10.3390/ijms10062558
11. Yu, X., Wang, X., Wang, H., Li, X., Gao, J. Prediction of Solubility Parameters for Polymers by a QSPR Model // *QSAR Comb. Sci.* 2006. 25: 156–161. DOI: 10.1002/qsar.200530138
12. Palmer, D.S., O'Boyle, N.M., Glen, R.C., Mitchell, J.B.O. Random Forest Models To Predict Aqueous Solubility // *Journal of Chemical Information and Modeling*. 2007. 47 (1), 150–158. DOI: 10.1021/ci060164k
13. Deng, T., Jia, G. Prediction of aqueous solubility of compounds based on neural network // *Molecular Physics*. 2019. 118:2, DOI: 10.1080/00268976.2019.1600754.
14. Lusci, A., Pollastri, G., Baldi, P. Deep Architectures and Deep Learning in Chemoinformatics: The Prediction of Aqueous Solubility for Drug-Like Molecules // *Journal of Chemical Information and Modeling*. 2013. 53 (7), 1563–1575. DOI: 10.1021/ci400187y
15. Boobier, S., Hose, D.R.J., Blacker, A.J. et al. Machine learning with physicochemical relationships: solubility prediction in organic solvents and water // *Nature Communications*. 2020. 11, 5753. DOI: 10.1038/s41467-020-19594-z
16. Morgan, H.L. The generation of a unique machine description for chemical structures – a technique developed at chemical abstracts service // *Journal of Chemical Documentation*. 1965. Doc 5:107–113. DOI: 10.1021/c160017a018
17. Prokhorenkova, L., Gusev, G., Vorobev, A., Dorogush, A.V., Gulin, A. CatBoost: unbiased boosting with categorical features // *NeurIPS*. 2018. DOI: 10.48550/arXiv.1706.09516
18. Capecchi, A., Probst, D., Reymond, J.L. One molecular fingerprint to rule them all: drugs, biomolecules, and the metabolome // *Journal of Cheminformatics*. 2020. 12. 43. DOI: 10.1186/s13321-020-00445-4
19. Платонов Е.Н., Мартынова И.Р. Семантический анализ отзывов об организациях методами машинного обучения // *Моделирование и анализ данных*. 2024. Том 14. № 1. С. 7–26. DOI: 10.17759/mda.2024140101
20. Blevins, A., Quigley, K., I., Halverson, J., B., Wilkinson, N., Levin, S., R., Pulapaka, A., Reade, W., Howard, A. NeurIPS 2024 – Predict New Medicines with BELKA. Kaggle. 2024. <https://kaggle.com/competitions/leash-BELKA>.
21. Paszke, A.; Gross, S.; Massa, F.; Lerer, A.; Bradbury, J.; Chanan, G.; Killeen, T.; Lin, Z.; Gimselshein, N.; Antiga, L.; et al. PyTorch: An Imperative Style, High-Performance Deep Learning Library // In *Proceedings of the Advances in Neural Information Processing Systems*, Vancouver, BC, Canada, 8–14 December 2019; Volume 32, pp. 1–12.
22. Cacciari, I., Ranfagni, A. Hands-On Fundamentals of 1D Convolutional Neural Networks – A Tutorial for Beginner Users // *Applied Sciences*. 2024. 14(18), 8500. DOI: 10.3390/app14188500
23. Shi, Y., Huang, Z., Wang, W., Zhong, H., Feng, S., Sun, Y. Masked Label Prediction: Unified Message Passing Model for Semi-Supervised Classification // *Proceedings of the Thirtieth International Joint Conference on Artificial Intelligence*. 202. pp 1548–1554. DOI: 10.24963/ijcai.2021/214
24. Zaliani, A., Tang, J., Martin, J., Harmel, R., Wang, W. 1st EUOS/SLAS Joint Challenge: Compound Solubility. <https://kaggle.com/competitions/euos-slas>, 2022. Kaggle.
25. Powell, M. J. D. An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives // *The Computer Journal*. 1964. Volume 7, Issue 2, Pages 155–162. DOI: 10.1093/comjnl/7.2.155
26. Pedregosa et al. Scikit-learn: Machine Learning in Python // *Journal of Machine Learning Research*. 2011. 12(85):2825–2830.



27. Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T. E., Haberland, M.; Reddy, T., Cournapeau, D., Burovski, E., Peterson, P., Weckesser, W., Bright, J., van der Walt, S. J., Brett, M., Wilson, J., Millman, K.J., Mayorov, N., Nelson, A.R.J., Jones, E., Kern, R., Larson, E., Carey, C.J., Polat, İ., Feng, Y., Moore, E.W., VanderPlas, J., Laxalde, D., Perktold, J., Cimrman, R., Henriksen, I., Quintero, E.A., Harris, C.R., Archibald, A.M., Ribeiro, A.H., Pedregosa, F., van Mulbregt, P., et al. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python // Nat. Methods. 2020. 17, 261–272. DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2



Applying Machine Learning for Solubility Prediction: Comparing Different Representations of Molecular Data

Alexey V. Ereshchenko*

FRC «Computer Science and Control» RAS, Moscow, Russian Federation

e-mail: ereshchenko.alexey@gmail.com

Solubility is one of the crucial properties of drugs and is important to determine early in the drug development cycle. Artificial intelligence (AI) based algorithms offer a faster solution compared to much more computationally expensive methods that utilize energy calculations, quantum dynamics and calculation of molecular dynamics. In this work, several AI-based algorithms utilizing different molecular data representation approaches, namely convolutional neural networks, graph neural networks and decision tree based gradient boosting, are applied to an open dataset from a recently published Kaggle challenge on solubility with more than 70 000 compounds. Performance of the models is evaluated on a testing set provided by the Kaggle challenge, as well as on a locally created independent dataset. Results demonstrate superior performance by the gradient boosting model trained on tabular feature representation of the molecules. Developed model is also shown to be competitive with other solutions posted on the leaderboards of the Kaggle challenge.

Keywords: machine learning, drug solubility, graph neural networks, gradient boosting, convolution neural networks

For citation:

Ereshchenko A.V. Applying Machine Learning for Solubility Prediction: Comparing Different Representations of Molecular Data. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2025. Vol. 15, no. 1, pp. 35–50. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2025150103> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Fink, C., Sun, D., Wagner, K., Schneider, M., Bauer, H., Dolgos, H., Mäder, K., Peters, S.-A. Evaluating the Role of Solubility in Oral Absorption of Poorly Water-Soluble Drugs Using Physiologically-Based Pharmacokinetic Modeling // *Clin. Pharmacol. Ther.* 2020. 107: 650–661. DOI: 10.1002/cpt.1672
2. Ameta, R.K., Soni, K., Bhattarai, A. Recent Advances in Improving the Bioavailability of Hydrophobic/Lipophilic Drugs and Their Delivery via Self Emulsifying Formulations // *Colloids Interfaces*. 2023. 7. 16. DOI: 10.3390/colloids7010016
3. Loftsson, T., Brewster, M.E. Pharmaceutical applications of cyclodextrins: basic science and product development // *Journal of Pharmacy and Pharmacology*. 2010. Volume 62, Issue 11, November 2010, Pages 1607–1621. DOI: 10.1111/j.2042-7158.2010.01030.x

***Alexey V. Ereshchenko**, phd student at FRC «Computer Science and Control» RAS, Moscow, Russian Federation, e-mail: ereshchenko.alexey@yandex.com

4. Basavaraj, S., Guru V. Betageri, G.V. Can formulation and drug delivery reduce attrition during drug discovery and development – review of feasibility, benefits and challenges // *Acta Pharmaceutica Sinica B*. 2014. Volume 4, Issue 1. Pages 3–17, ISSN 2211-3835. DOI: 10.1016/j.apsb.2013.12.003
5. Ran, Y., Samuel H. Yalkowsky, S.H. Prediction of Drug Solubility by the General Solubility Equation (GSE) // *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*. 2001. 41 (2). 354–357. DOI: 10.1021/ci000338c
6. Fredenslund, A., Jones, R.L. Prausnitz, J.M. Group-contribution estimation of activity coefficients in nonideal liquid mixtures // *AIChE J*. 1975. 21: 1975, 1086–1099. DOI: 10.1002/aic.690210607
7. Palmer, D.S., McDonagh, J.L., Mitchell, J.B.O., Mourik, T., Fedorov, M.V. First-Principles Calculation of the Intrinsic Aqueous Solubility of Crystalline Druglike Molecules // *Journal of Chemical Theory and Computation*. 2012. 8, (9), 3322–3337. DOI: 10.1021/ct300345m
8. Li, L., Totton, T., Frenkel, D. Computational methodology for solubility prediction: Application to the sparingly soluble solutes // *J. Chem. Phys.* 2017. 146 (21): 214110. DOI: 10.1063/1.4983754
9. Boothroyd, S., Anwar, J. Solubility prediction for a soluble organic molecule via chemical potentials from density of states // *The Journal of Chemical Physics*. 2019. 151, 184113. DOI: 10.1063/1.5117281
10. Duchowicz, P.R., Castro, E.A. QSPR Studies on Aqueous Solubilities of Drug-Like Compounds // *Int. J. Mol. Sci.* 2009. 10, 2558–2577. DOI: 10.3390/ijms10062558
11. Yu, X., Wang, X., Wang, H., Li, X., Gao, J. Prediction of Solubility Parameters for Polymers by a QSPR Model // *QSAR Comb. Sci.* 2006. 25: 156–161. DOI: 10.1002/qsar.200530138
12. Palmer, D.S., O’Boyle, N.M., Glen, R.C., Mitchell, J.B.O. Random Forest Models To Predict Aqueous Solubility // *Journal of Chemical Information and Modeling*. 2007. 47 (1), 150–158. DOI: 10.1021/ci060164k
13. Deng, T., Jia, G. Prediction of aqueous solubility of compounds based on neural network // *Molecular Physics*. 2019. 118:2, DOI: 10.1080/00268976.2019.1600754.
14. Lusci, A., Pollastri, G., Baldi, P. Deep Architectures and Deep Learning in Chemoinformatics: The Prediction of Aqueous Solubility for Drug-Like Molecules // *Journal of Chemical Information and Modeling*. 2013. 53 (7), 1563–1575. DOI: 10.1021/ci400187y
15. Boobier, S., Hose, D.R.J., Blacker, A.J. et al. Machine learning with physicochemical relationships: solubility prediction in organic solvents and water // *Nature Communications*. 2020. 11, 5753. DOI: 10.1038/s41467-020-19594-z
16. Morgan, H.L. The generation of a unique machine description for chemical structures – a technique developed at chemical abstracts service // *Journal of Chemical Documentation*. 1965. Doc 5:107–113. DOI: 10.1021/c160017a018
17. Prokhorenkova, L., Gusev, G., Vorobev, A., Dorogush, A.V., Gulin, A. CatBoost: unbiased boosting with categorical features // *NeurIPS*. 2018. DOI: 10.48550/arXiv.1706.09516
18. Capecchi, A., Probst, D., Reymond, J.L. One molecular fingerprint to rule them all: drugs, biomolecules, and the metabolome // *Journal of Cheminformatics*. 2020. 12. 43. DOI: 10.1186/s13321-020-00445-4
19. Platonov E.N., Martynova I.R. Semantic Analysis of Reviews About Organizations Using Machine Learning Methods. *Modelirovanie i analiz dannikh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 1, pp. 7–26. DOI: 10.17759/mda.2024140101.
20. Blevins, A., Quigley, K., I., Halverson, J., B., Wilkinson, N., Levin, S., R., Pulapaka, A., Reade, W., Howard, A. *NeurIPS 2024 – Predict New Medicines with BELKA*. Kaggle. 2024. <https://kaggle.com/competitions/leash-BELKA>.
21. Paszke, A.; Gross, S.; Massa, F.; Lerer, A.; Bradbury, J.; Chanan, G.; Killeen, T.; Lin, Z.; Gimelshein, N.; Antiga, L.; et al. PyTorch: An Imperative Style, High-Performance Deep



- Learning Library // In Proceedings of the Advances in Neural Information Processing Systems, Vancouver, BC, Canada, 8–14 December 2019; Volume 32, pp. 1–12.
22. Cacciari, I., Ranfagni, A. Hands-On Fundamentals of 1D Convolutional Neural Networks – A Tutorial for Beginner Users // *Applied Sciences*. 2024. 14(18), 8500. DOI: 10.3390/app14188500
23. Shi, Y., Huang, Z., Wang, W., Zhong, H., Feng, S., Sun, Y. Masked Label Prediction: Unified Message Passing Model for Semi-Supervised Classification // *Proceedings of the Thirtieth International Joint Conference on Artificial Intelligence*. 2021. pp 1548–1554. DOI: 10.24963/ijcai.2021/214
24. Zaliani, A., Tang, J., Martin, J., Harmel, R., Wang, W. 1st EUOS/SLAS Joint Challenge: Compound Solubility. <https://kaggle.com/competitions/euos-slas>, 2022. Kaggle.
25. Powell, M. J. D. An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives // *The Computer Journal*. 1964. Volume 7, Issue 2, P. 155–162. DOI: 10.1093/comjnl/7.2.155
26. Pedregosa et al. Scikit-learn: Machine Learning in Python // *Journal of Machine Learning Research*. 2011. 12(85):2825–2830.
27. Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T. E., Haberland, M.; Reddy, T., Cournapeau, D., Burovski, E., Peterson, P., Weckesser, W., Bright, J., van der Walt, S. J., Brett, M., Wilson, J., Millman, K.J., Mayorov, N., Nelson, A.R.J., Jones, E., Kern, R., Larson, E., Carey, C.J., Polat, İ., Feng, Y., Moore, E.W., VanderPlas, J., Laxalde, D., Perktold, J., Cimrman, R., Henriksen, I., Quintero, E.A., Harris, C.R., Archibald, A.M., Ribeiro, A.H., Pedregosa, F., van Mulbregt, P., et al. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python // *Nat. Methods*. 2020. 17, 261–272. DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2

Получена 19.02.2025

Принята в печать 03.03.2025

Received 19.02.2025

Accepted 03.03.2025

◆◆◆◆◆ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ◆◆◆◆◆

УДК 517.977.1

Об условиях ограниченности множеств достижимости и управляемости для линейных систем с дискретным временем и суммарными ограничениями первого порядка на скалярное управление

Ибрагимов Д.Н.*

Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7472-5520>
e-mail: rikk.dan@gmail.com

Самонов С.С.**

Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-5188-1727>
e-mail: stepan.samonov.s@gmail.ru

Рассматриваются линейные системы с дискретным временем и суммарными ограничениями на скалярное управление первого порядка. Для данного класса систем изучаются множества достижимости и 0-управляемости за конечное число шагов и их предельные аналоги. Сформулирован и доказан строгий критерий ограниченности предельных множеств достижимости управляемости в терминах матриц системы. В случае их ограниченности определены условия, при которых исследуемые множества являются многогранниками. Определена структура данных многогранников. Представлены примеры, и проведено численное моделирование множеств достижимости и 0-управляемости различных систем.

Ключевые слова: линейная система, дискретное время, суммарные ограничения, множества достижимости, множества управляемости, управляемость

Для цитаты:

Ибрагимов Д.Н., Самонов С.С. Об условиях ограниченности множеств достижимости и управляемости для линейных систем с дискретным временем и суммарными



ограничениями первого порядка на скалярное управление // Моделирование и анализ данных. 2025. Том 15. № 1. С. 51–80. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2025150104>

***Ибрагимов Данис Наилевич**, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Теория вероятностей и компьютерное моделирование», Московский Авиационный Институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7472-5520>, e-mail: rikk.dan@gmail.com

****Самонов Степан Сергеевич**, студент, кафедра «Теория вероятностей и компьютерное моделирование», Московский Авиационный Институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-5188-1727>, e-mail: stepan.samonov.s@gmail.com

1. ВВЕДЕНИЕ

Анализ управляемых динамических систем тесно связан с построением их областей достижимости и управляемости. Так, например, задача с терминальным критерием качества может быть сведена к оптимизационной задаче по терминальному состоянию на множестве достижимости за время функционирования системы [1–4]. При рассмотрении вопросов стабилизации множества управляемости определяют те начальные состояния, для которых данная задача разрешима в принципе [5–6]. Отдельно следует упомянуть задачу быстродействия [7–8], для которой множества 0-управляемости фактически представляют собой множества уровня функции будущих потерь, из-за чего использование метода динамического программирования [9] неразрывно связан с построением данных множеств.

Наибольшую эффективность аппарат множеств достижимости и управляемости демонстрирует при изучении систем с дискретным временем [2–3]. Во многом это связано с тем, что последовательности этих множеств могут быть построены рекуррентным образом и в ряде случаев данная процедура сводится к стандартным операциям выпуклого анализа [10]. С другой стороны, на практике работа с непрерывными системами часто осуществляется при помощи дискретизации [11], что делает неизбежной аппроксимацию исходных множеств достижимости и управляемости их дискретными аналогами. Однако устремление к нулю шага дискретизации приводит к тому, что конечное непрерывное время начинает описываться бесконечным числом шагов системы дискретной. Это делает актуальным, с одной стороны, исследование вопросов сходимости последовательности множеств дискретной системы к множествам непрерывной системы [12], с другой стороны, не менее важной оказывается задача построения и исследования свойств предельных множеств дискретной системы непосредственно [13–18].

Известны аналитические представления множеств достижимости и 0-управляемости для линейных систем с дискретным временем и ограничениями на функцию управления в смысле l_∞ -нормы. В частности, доказано, что в случае линейных ограничений на управление множества достижимости и 0-управляемости за конечное число шагов представляют собой многогранники [8]. Для их предельных аналогов сформулированы необходимые и достаточные условия ограниченности [19–21].

Случай суммарных ограничений на управление в смысле l_p -нормы является менее изученным, и основные результаты по данной тематике представлены в [16–18]. В [17–18] подробно рассмотрен случай $p > 1$. В частности, представлены необходимые и достаточные условия ограниченности предельных множеств достижимости и 0-управляемости, явным образом описана структура их опорных гиперплоскостей, а также предложен эффективный метод формирования внешних оценок произвольного порядка точности на основе принципа сжимающих отображений. В то же время случай $p > 1$ рассмотрен значительно менее подробно: доказаны только достаточные условия ограниченности, а описание их полиэдральной структуры представлено в весьма общем виде.

Целью данной статьи является расширение и уточнение результатов [16]. В частности, необходимо сформулировать и доказать строгий критерий ограниченности множеств достижимости и 0-управляемости линейных систем с дискретным временем и суммарными l_1 -ограничениями на управление. Также требуется определить условия, когда исследуемые множества представляют собой многогранники, и построить их явное описание в этом случае. Полученные теоретические результаты предполагается проиллюстрировать различными примерами численного моделирования систем с дискретным временем.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается автономная линейная система с дискретным временем и суммарными l_1 -ограничениями на скалярное управление:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + bu(k), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ x(0) &= x_0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |u(k)| \leq 1, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u(k) \in \mathbb{R}$ – управляющее воздействие на k -ом шаге, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ – матрицы системы. Заданное ограничение является ограничением на l_1 -норму управления $\{u(k)\}_{k=0}^{\infty}$. В ряде случаев будет предполагаться, что выполнено ранговое условие Калмана:

$$\text{rank}(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = n. \quad (2)$$

Для произвольного $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ обозначим через $\mathcal{Y}_1(N)$ множество достижимости системы (1), т.е. множество тех состояний, в которые можно перевести систему (1) за N шагов из 0 посредством выбора допустимого управления:

$$\mathcal{Y}_1(N) = \begin{cases} \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-k-1} bu(k), \sum_{k=0}^{N-1} |u(k)| \leq 1 \right\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0 \end{cases} \quad (3)$$



Введем также предельное множество достижимости $\mathcal{Y}_{1,\infty}$ – множество тех состояний, в которые можно перевести систему (1) за конечное число шагов из 0 посредством выбора допустимого управления:

$$\mathcal{Y}_{1,\infty} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{Y}_1(N). \quad (4)$$

Аналогично для произвольного $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ обозначим через $\mathcal{X}_1(N)$ множество 0-управляемости системы (1), т.е. множество тех начальных состояний, из которых можно перевести систему (1) за N шагов в 0 посредством выбора допустимого управления:

$$\mathcal{X}_1(N) = \begin{cases} \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n : -A^N x_0 = \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-k-1} b u(k), \sum_{k=0}^{N-1} |u(k)| \leq 1 \right\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases} \quad (5)$$

И также введем предельное множество 0-управляемости $\mathcal{X}_{1,\infty}$ – множество тех начальных состояний, из которых можно перевести систему (1) за конечное число шагов в 0 посредством выбора допустимого управления:

$$\mathcal{X}_{1,\infty} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}_1(N). \quad (6)$$

Обозначим через $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ спектр матрицы A , т.е. множество всех собственных значений A с учетом кратности, и приведем следующие известные результаты.

Лемма 1. ([16, лемма 1]). Пусть семейства множеств $\{\mathcal{Y}_1(N)\}_{N=0}^{\infty}$ и $\{\mathcal{X}_1(N)\}_{N=0}^{\infty}$ для системы (1) определяются соотношениями (3) и (5) соответственно, $N \in \mathbb{N}$. Тогда

1. множество $\mathcal{Y}_1(N)$ допускает представление

$$\mathcal{Y}_1(N) = \text{conv}\{b, -b, Ab, -Ab, \dots, A^{N-1}b, -A^{N-1}b\};$$

2. если $\det A \neq 0$, то множество $\mathcal{X}_1(N)$ допускает представление

$$\mathcal{X}_1(N) = \text{conv}\{A^{-1}b, -A^{-1}b, \dots, A^{-N}b, -A^{-N}b\}.$$

Теорема 1 ([16, теорема 1]). Пусть множества $\mathcal{Y}_{1,\infty}$ и $\mathcal{X}_{1,\infty}$ для системы (1) определяются соотношениями (4) и (6) соответственно. Тогда

1. если система (1) устойчива, т.е. $\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| < 1$, то существует такая величина $N'_{\max} \in \mathbb{N}$, что

$$\mathcal{Y}_{1,\infty} = \mathcal{Y}_1(N'_{\max});$$

2. если система (1) неустойчива, т.е. $\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| > 1$, то существует такая величина $N_{\max}'' \in \mathbb{N}$, что

$$\mathcal{X}_{1,\infty} = \mathcal{X}_1(N_{\max}'').$$

Можно заметить, что теорема 1 задает исключительно достаточные условия ограниченности множеств (4) и (6), которые являются в действительности довольно жесткими. В [17] для случая l_p -ограничений на управление продемонстрировано, что необходимые и достаточные условия ограниченности предельных множеств достижимости и 0-управляемости в действительности зависят от соотношения A и b , а не только от спектрального радиуса A . С другой стороны, теорема 1 в совокупности с леммой 1 гарантируют, что множества (4) и (6) при определенных условиях окажутся многогранниками, однако в [16] не дается конструктивных указаний на то, как априорно вычислить величины $N_{\max}'$ и $N_{\max}''$.

В данной работе требуется определить необходимые и достаточные условия ограниченности предельных множеств достижимости (4) и 0-управляемости (6), а также построить верхние оценки величин $N_{\max}'$ и $N_{\max}''$:

$$N_{\max}' \leq \overline{N_{\max}'}(A, b), \quad N_{\max}'' \leq \overline{N_{\max}''}(A, b).$$

3. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ $N_{\max}'$ И $N_{\max}''$

На основе утверждений из выпуклого анализ и матричной алгебры предложим способ априорного оценивания величин $N_{\max}'$ и $N_{\max}''$ из теоремы 1.

Лемма 2. Пусть семейства множеств $\{\mathcal{Y}_1(N)\}_{N=0}^{\infty}$ и $\{\mathcal{X}_1(N)\}_{N=0}^{\infty}$ для системы (1) определяются соотношениями (3) и (5) соответственно. Тогда

1. если $A^N b \in \mathcal{Y}_1(N)$, то для любого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ также выполнено включение $A^{N+k} b \in \mathcal{Y}_1(N)$;
2. если $\det A \neq 0$ и $A^{-(N+1)} b \in \mathcal{X}_1(N)$, то для любого $k \in \mathbb{N}$ также выполнено включение $A^{-(N+k)} b \in \mathcal{X}_1(N)$;

Доказательство. Докажем сначала пункт 1. Пусть $A^N b \in \mathcal{Y}_1(N)$. Тогда в силу пункта 1 леммы 1 найдутся $\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1}$ такие, что

$$A^N b = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i A^i b, \quad \sum_{i=0}^{N-1} |\lambda_i| = 1.$$

Предположим, что для некоторого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнено включение

$$A^N, \dots, A^{N+k} b \in \mathcal{Y}_1(N).$$

Тогда в силу пункта 1 леммы 1 верно, что

$$\mathcal{Y}_1(N) = \dots = \mathcal{Y}_1(N+k+1).$$



Отсюда получаем включение

$$A^{N+k+1}b = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i A^{i+k+1}b \in \text{conv}\{-A^{k+1}b, A^{k+1}b, \dots, -A^{N+k}b, A^{N+k}b\} \subset \\ \subset \mathcal{Y}(N+k+1) = \mathcal{Y}(N).$$

Таким образом, по принципу математической индукции $A^{-(N+k)}b \in \mathcal{Y}(N)$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Пункт 2 доказывается в силу леммы 1 аналогично при замене A на A^{-1} , b на $A^{-1}b$.

Лемма 2 доказана.

Обозначим для произвольного $x \in \mathcal{X}$ и выпуклого $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, содержащего 0 в качестве внутренней точки, через $\mu(x, \mathcal{X})$ функционал Минковского [22, разд. 3, § 2, Гл. III]:

$$\mu(x, \mathcal{X}) \stackrel{\Delta}{=} \|x\|_{\mathcal{X}} = \inf\{\alpha > 0 : x \in \alpha\mathcal{X}\}.$$

Также для произвольной квадратной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ определим следующую норму:

$$\|A\|_1 = \max_{i=1, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Данная матричная норма в действительности является операторной нормой для случая, когда в $\mathbb{R}^n$ введена норма

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Согласно лемме 2 величины $N'_{\max}$ и $N''_{\max}$ однозначно определяются включениями

$$A^{N'_{\max}}b \in \mathcal{Y}_1(N'_{\max}),$$

$$A^{-(N'_{\max}+1)}b \in \mathcal{X}_1(N''_{\max}).$$

С учетом определения функционала Минковского данные включения эквивалентны неравенствам

$$\mu(A^{N'_{\max}}b, \mathcal{Y}_1(N'_{\max})) \leq 1,$$

$$\mu(A^{-(N'_{\max}+1)}b, \mathcal{X}_1(N''_{\max})) \leq 1.$$

Данные неравенства в общем случае достаточно сложно разрешить из-за неявной зависимости функционала Минковского в левой части от $N'_{\max}$ или $N''_{\max}$. Однако для

случаев $N'_{\max}, N''_{\max} \geq n$ можно получить простые верхние оценки $\overline{N'_{\max}}$ и $\overline{N''_{\max}}$, используя более строгие условия

$$A^{\overline{N'_{\max}}} b \in \mathcal{Y}_1(n) \subset \mathcal{Y}_1(N'_{\max}),$$

$$A^{-(\overline{N''_{\max}}+1)} b \in \mathcal{X}_1(n) \subset \mathcal{X}_1(N''_{\max}),$$

которые в свою очередь эквивалентны неравенствам.

$$\mu\left(A^{\overline{N'_{\max}}} b, \mathcal{Y}_1(n)\right) \leq 1, \quad (7)$$

$$\mu\left(A^{-(\overline{N''_{\max}}+1)} b, \mathcal{X}_1(n)\right) \leq 1. \quad (8)$$

Представим точное выражение для функционалов Минковского $\mu(x, \mathcal{Y}_1(n))$ и $\mu(x, \mathcal{X}_1(n))$ для управляемых систем в виде следующей леммы.

Лемма 3. Пусть выполнено условие (2), семейства множеств $\{\mathcal{Y}_1(N)\}_{N=0}^{\infty}$ и $\{\mathcal{X}_1(N)\}_{N=0}^{\infty}$ для системы (1) определяются соотношениями (3) и (5) соответственно. Тогда

1. справедливы соотношения

$$\mu(x, \mathcal{Y}_1(n)) = \|A_n^{-1} x\|_1 \leq \|A_n^{-1}\|_1 \|x\|_1, \quad A_n = (b, \dots, A^{n-1}b);$$

2. если $\det A \neq 0$, то справедливы соотношения

$$\mu(x, \mathcal{X}_1(n)) = \|B_n^{-1} x\|_1 \leq \|B_n^{-1}\|_1 \|x\|_1, \quad B_n = (A^{-1}b, \dots, A^{-n}b).$$

Доказательство. Докажем сначала пункт 1. Из определения (3), полагая $N = n$, получим цепочку равенств

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_1(n) &= \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k-1} b u(k) : \sum_{k=0}^{n-1} |u(k)| \leq 1 \right\} = \\ &= \left\{ (b, \dots, A^{n-1}b) u : u \in \mathbb{R}^n, \|u\|_1 \leq 1 \right\} = \left\{ A_n u : u \in \mathbb{R}^n, \|u\|_1 \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Учтем, что из (2) следует обратимость матрицы A_n , и получим следующие соотношения для функционала Минковского:

$$\begin{aligned} \mu(x, \mathcal{Y}_1(n)) &= \inf \{ \alpha > 0 : x \in \alpha \mathcal{Y}_1(n) \} = \inf \{ \alpha > 0 : x = \alpha A_n u, \quad u \in \mathbb{R}^n, \|u\|_1 \leq 1 \} = \\ &= \inf \left\{ \alpha > 0 : \frac{A_n^{-1} x}{\alpha} = u, u \in \mathbb{R}^n, \|u\|_1 \leq 1 \right\} = \inf \left\{ \alpha > 0 : \left\| \frac{A_n^{-1} x}{\alpha} \right\|_1 \leq 1 \right\} = \end{aligned}$$



$$= \inf \{ \alpha > 0 : \| A_n^{-1} x \|_1 \leq \alpha \} = \| A_n^{-1} x \|_1.$$

Окончательно, в силу неравенства Гельдера

$$\mu(x, \mathcal{Y}_1(n)) = \| A_n^{-1} x \|_1 \leq \| A_n^{-1} \|_1 \| x \|_1.$$

Пункт 2 доказывается в силу леммы 1 аналогично при замене A на A^{-1} , b на $A^{-1}b$ и A_n на B_n .

Лемма 3 доказана.

Обозначим через $[\alpha]$ наименьшее целое, которое не меньше чем α :

$$[\alpha] = \min \{ k \in \mathbb{Z} : k \geq \alpha \}.$$

При помощи леммы 3 построим величины $\overline{N}_{\max}'$ и $\overline{N}_{\max}''$ явным образом для случая, когда A диагонализуема.

Теорема 2. Пусть верно (2), множества $\mathcal{Y}_{1,\infty}$ и $\mathcal{X}_{1,\infty}$ для системы (1) определяются соотношениями (4) и (6) соответственно, матрица A диагонализуема, т.е. существуют невырожденная матрица $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_1}$, $r_1, \dots, r_{n_2} > 0$, $\varphi_1, \dots, \varphi_{n_2} \in \mathbb{R}$ такие, что

$$A = SAS^{-1}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_{n_1} & & \\ \vdots & & & r_1 A_{\varphi_1} & \vdots \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & r_{n_2} A_{\varphi_{n_2}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (9)$$

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad n_1, n_2 \geq 0, \quad n_1 + 2n_2 = n.$$

Тогда для $y = S^{-1}b$

1. если система (1) устойчива, т.е. $\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| < 1$, то

$$\overline{N}_{\max}' \leq \overline{N}_{\max}' \triangleq \left[-\frac{\ln \left(\| A_n^{-1} \|_1 \| S \|_1 \left(\sum_{j=1}^{n_1} |y_j| + \sum_{i=1}^{n_2} \sqrt{2(y_{n_1+2i-1}^2 + y_{n_1+2i}^2)} \right) \right)}{\ln \left(\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \right)} \right];$$

2. если система (1) неустойчива, т.е. $\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| > 1$, то

$$N_{\max}^* \leq \overline{N_{\max}^*} = \left\lceil \frac{\ln \left(\|B_n^{-1}\| \|S\| \left(\sum_{j=1}^{n_1} |y_j| + \sum_{i=1}^{n_2} \sqrt{2(y_{n_1+2i-1}^2 + y_{n_1+2i}^2)} \right) \right)}{\ln \left(\min_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \right)} \right\rceil - 1.$$

Доказательство. Докажем сначала пункт 1. Из спектрального разложения (9) для любого $k \in \mathbb{N}$ следует представление

$$A^k = S \Lambda^k S^{-1} = S \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{n_1}^k & \\ \vdots & & r_1^k A_{k\varphi_1} & \vdots \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & r_{n_2}^k A_{k\varphi_{n_2}} \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Тогда верны соотношения

$$\begin{aligned} \|A^k b\| &= \|S \Lambda^k S^{-1} b\| \leq \|S\| \|\Lambda^k S^{-1} b\| = \|S\| \|\Lambda^k y\| = \|S\| \sum_{j=1}^{n_1} |\lambda_j^k y_j| + \\ &+ \|S\| \sum_{i=1}^{n_2} r_i^k \left(|y_{n_1+2i-1} \cos(k\varphi_i) + y_{n_1+2i} \sin(k\varphi_i)| + |y_{n_1+2i} \cos(k\varphi_i) - y_{n_1+2i-1} \sin(k\varphi_i)| \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим оптимизационную задачу

$$a + b \rightarrow \max_{\substack{a^2 + b^2 = C^2 \\ a, b \geq 0}}.$$

Применяя метод множителей Лагранжа, можно установить, что

$$\max_{\substack{a^2 + b^2 = C^2 \\ a, b \geq 0}} (a + b) = \sqrt{2}C.$$

Если положить

$$\begin{aligned} C &= |y_{n_1+2i-1} \cos(k\varphi_i) + y_{n_1+2i} \sin(k\varphi_i)|^2 + |y_{n_1+2i} \cos(k\varphi_i) - y_{n_1+2i-1} \sin(k\varphi_i)|^2 = \\ &= y_{n_1+2i-1}^2 + y_{n_1+2i}^2, \end{aligned}$$

то для всех $i = \overline{1, n_2}$ верны оценки

$$|y_{n_1+2i-1} \cos(k\varphi_i) + y_{n_1+2i} \sin(k\varphi_i)| + |y_{n_1+2i} \cos(k\varphi_i) - y_{n_1+2i-1} \sin(k\varphi_i)| \leq$$



$$\leq \sqrt{2(y_{n_1+2i-1}^2 + y_{n_1+2i}^2)}.$$

Таким образом, окончательно справедливы оценки

$$\|A^k b\| \leq \|S\| \left(\sum_{j=1}^{n_1} |\lambda_j^k y_j| + \sum_{i=1}^{n_2} r_i^k \sqrt{2(y_{n_1+2i-1}^2 + y_{n_1+2i}^2)} \right).$$

С учетом леммы (3)

$$\begin{aligned} \mu(A^k b, \mathcal{Y}_1(n)) &\leq \|A_n^{-1}\| \|A^k b\| \leq \\ &\leq \|A_n^{-1}\| \|S\| \left(\sum_{j=1}^{n_1} |\lambda_j^k y_j| + \sum_{i=1}^{n_2} r_i^k \sqrt{2(y_{n_1+2i-1}^2 + y_{n_1+2i}^2)} \right) \leq \\ &\leq \|A_n^{-1}\| \|S\| \left(\max \left\{ \max_{j=1, n_1} |\lambda_j|; \max_{j=1, n_2} r_j \right\} \right)^k \left(\sum_{j=1}^{n_1} |y_j| + \sum_{i=1}^{n_2} \sqrt{2(y_{n_1+2i-1}^2 + y_{n_1+2i}^2)} \right) = \\ &= \|A_n^{-1}\| \|S\| \left(\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \right)^k \left(\sum_{j=1}^{n_1} |y_j| + \sum_{i=1}^{n_2} \sqrt{2(y_{n_1+2i-1}^2 + y_{n_1+2i}^2)} \right). \end{aligned}$$

Тогда неравенство $\mu(A^k b, \mathcal{Y}_1(n)) \leq 1$ будет следовать из условия

$$\begin{aligned} &\|A_n^{-1}\| \|S\| \left(\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \right)^k \left(\sum_{j=1}^{n_1} |y_j| + \sum_{i=1}^{n_2} \sqrt{2(y_{n_1+2i-1}^2 + y_{n_1+2i}^2)} \right) \leq 1, \\ &\left(\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \right)^k \leq \frac{1}{\|A_n^{-1}\| \|S\| \left(\sum_{j=1}^{n_1} |y_j| + \sum_{i=1}^{n_2} \sqrt{2(y_{n_1+2i-1}^2 + y_{n_1+2i}^2)} \right)}, \quad (10) \\ &k \ln \left(\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \right) \leq -\ln \left(\|A_n^{-1}\| \|S\| \left(\sum_{j=1}^{n_1} |y_j| + \sum_{i=1}^{n_2} \sqrt{2(y_{n_1+2i-1}^2 + y_{n_1+2i}^2)} \right) \right), \end{aligned}$$

Положим $k = \overline{N_{\max}^*}$ и получим из (7) искомые оценки

$$\overline{N_{\max}^*} \geq -\frac{\ln \left(\|A_n^{-1}\| \|S\| \left(\sum_{j=1}^{n_1} |y_j| + \sum_{i=1}^{n_2} \sqrt{2(y_{n_1+2i-1}^2 + y_{n_1+2i}^2)} \right) \right)}{\ln \left(\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \right)}.$$

Из последнего неравенства следует пункт 1 теоремы 2.

Для доказательства пункта 2 проведем аналогичные рассуждения, заменив в силу леммы 1 A на A^{-1} , A_n на B_n и $\mathcal{Y}(N)$ на $\mathcal{X}_1(N)$. Учтем, что собственные значения A и A^{-1} взаимнообратны и выберем $k = \overline{N_{\max}^*} + 1$ в условии (10):

$$\left(\overline{N_{\max}^*} + 1\right) \ln \left(\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|^{-1} \right) \leq -\ln \left(\|B_n^{-1}\| \|S\| \left(\sum_{j=1}^{n_1} |y_j| + \sum_{i=1}^{n_2} \sqrt{2(y_{n_1+2i-1}^2 + y_{n_1+2i}^2)} \right) \right).$$

Отсюда в силу (8) следуют искомые оценки

$$\overline{N_{\max}^*} + 1 \geq \frac{\ln \left(\|B_n^{-1}\| \|S\| \left(\sum_{j=1}^{n_1} |y_j| + \sum_{i=1}^{n_2} \sqrt{2(y_{n_1+2i-1}^2 + y_{n_1+2i}^2)} \right) \right)}{\ln \left(\min_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \right)}.$$

Из последнего неравенства следует пункт 2 теоремы 2.

Теорема 2 полностью доказана.

Заметим, что в теореме 2 возможны ситуации, когда $n_1 = 0$, т.е. все собственные значения A существенно комплексные, и когда $n_2 = 0$, т.е. все собственные значения A действительные. В этих случаях оценки, представленные в теореме 2, несколько упрощаются. Важным является частный случай $n = 2$, так как для него возможно только две ситуации: $n_1 = 2, n_2 = 0$ или $n_1 = 0, n_2 = 1$. Приведем оценки для двумерных систем в виде следствия.

Следствие 1. Пусть выполнены предположения теоремы 2, $n = 2$. Тогда для $y = S^{-1}b$

1. если система (1) устойчива, т.е. $\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| < 1$, то

$$N_{\max}^* \leq \overline{N_{\max}^*} = \begin{cases} \left[-\frac{\ln(\|A_2^{-1}\| \|S\| \|y\|)}{\ln(\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\})} \right], & \sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\} \subset \mathbb{R}, \\ \left[-\frac{\ln(\|A_2^{-1}\| \|S\| \|y\| \sqrt{2})}{\ln r_1} \right], & \sigma(A) = \{r_1 e^{\pm i\varphi}\} \not\subset \mathbb{R}; \end{cases}$$

2. если система (1) неустойчива, т.е. $\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| > 1$, то

$$N_{\max}^* \leq \overline{N_{\max}^*} = \begin{cases} \left[\frac{\ln(\|B_2^{-1}\| \|S\| \|y\|)}{\ln(\min\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\})} \right] - 1, & \sigma(A) = \{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} \subset \mathbb{R}, \\ \left[\frac{\ln(\|B_2^{-1}\| \|S\| \|y\| \sqrt{2})}{\ln r_1} \right] - 1, & \sigma(A) = \{r_1 e^{\pm i\varphi}\} \not\subset \mathbb{R}. \end{cases}$$



Доказательство. Доказательство следствия 1 вытекает непосредственно из теоремы 2 при замене $n = 2$.

4. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОГРАНИЧЕННОСТИ МНОЖЕСТВ $\mathcal{U}_{1,\infty}$, $\mathcal{X}_{1,\infty}$

В [17] доказано, что для случая суммарных l_p -ограничений на управление ограниченность множеств $\mathcal{U}_{1,\infty}$, $\mathcal{X}_{1,\infty}$ определяется соотношением A и b . В частности, разложением b по вещественному жорданову базису матрицы A .

Жордановым базисом матрицы A называется набор линейно независимых векторов $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R}^n$, который задает преобразование подобия матрицы A в ее вещественную жорданову каноническую форму [23, разд. 3.4, Гл. 3]. Такой базис единственен с точностью до ненулевых сомножителей и порядка векторов $h_1, \dots, h_n$, и каждый базисный вектор соответствует некоторой жордановой клетке, т.е. некоторому собственному значению матрицы A . Если разбить элементы жорданова базиса на три множества по критерию того, соответствуют ли они собственному значению матрицы A большему, равному или меньшему 1 по модулю, то получится определить следующие три инвариантных подпространства:

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_{<1} &= \text{Lin}\{h_i: h_i \text{ соответствует с. з. } \lambda, |\lambda| < 1\}, \\ \mathbb{L}_{=1} &= \text{Lin}\{h_i: h_i - \text{собственный вектор, соответствующий с. з. } \lambda, |\lambda| = 1\}, \\ \mathbb{L}_{>1} &= \text{Lin}\{h_i: h_i \text{ соответствует с. з. } \lambda, |\lambda| > 1\}.\end{aligned}$$

Заметим, что $\mathbb{L}_{=1}$ не включает в себя присоединенные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda, |\lambda| = 1$.

Теорема 3. Пусть множества $\mathcal{U}_{1,\infty}$ и $\mathcal{X}_{1,\infty}$ для системы (1) определяются соотношениями (4) и (6) соответственно. Тогда

1. множество $\mathcal{U}_{1,\infty}$ ограничено тогда и только тогда, когда

$$b \in \text{Lin}(L_{<1} \cup L_{=1});$$

2. множество $\mathcal{X}_{1,\infty}$ ограничено тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$ и

$$b \in \text{Lin}(L_{>1} \cup L_{=1}).$$

Доказательство. Докажем сначала пункт 1. Обозначим через l_1 пространство суммируемых числовых последовательностей:

$$l_1 = \left\{ (u_1, u_2, \dots) : \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| < \infty \right\}, \|u\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|.$$

Предельное множество достижимости $\mathcal{Y}_{1,\infty}$ в силу определений (3), (4) и [17, лемма 9] с точностью до замыкания является проекцией шара из нормированного пространства l_1 на конечномерное пространство $\mathbb{R}^n$:

$$\overline{\mathcal{Y}_{1,\infty}} = (b, Ab, A^2b, \dots) \{u \in l_1 : \|u\|_1 \leq 1\}.$$

Отсюда следует, что множество $\mathcal{Y}_{1,\infty}$ ограничено тогда и только тогда, когда ограничен оператор

$$B' = (b, Ab, A^2b, \dots) = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

Оператор B' ограничен в свою очередь в том и только в том случае, когда образующие его линейные функционалы y^i , $i = \overline{1, n}$, являются ограниченными. Это в силу теоремы Рисса [22] эквивалентно ограниченности последовательностей $y^1, \dots, y^n$. Таким образом, множество $\mathcal{Y}_{1,\infty}$ ограничено тогда и только тогда, когда последовательность $\{A^k b\}_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ ограничена.

Рассмотрим ограниченность последовательности $\{A^k b\}_{k=0}^\infty$. Пусть вектор b допускает разложение

$$b = \alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_n h_n.$$

Через $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ обозначим невырожденную матрицу, задающую преобразование A к её вещественной жордановой форме:

$$S^{-1}AS = J = \overset{\Delta}{=} \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_m \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где J_i соответствует либо вещественному собственному значению $\lambda_i \in \mathbb{R}$ и имеет вид

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, \quad (12)$$

либо соответствует паре комплексно-сопряженных собственных значений $re^{\pm i\varphi} \in \mathbb{C}$:



$$J_i = \begin{pmatrix} r_i A_{\varphi_i} & E & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_i A_{\varphi_i} & E & \dots & 0 \\ 0 & 0 & r_i A_{\varphi_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_i A_{\varphi_i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_i \times 2n_i}. \quad (13)$$

Заметим, что в силу (11) справедливы равенства

$$(b, Ab, A^2b, \dots) = (b, SJS^{-1}b, SJ^2S^{-1}b, \dots) = S(S^{-1}b, JS^{-1}b, J^2S^{-1}b, \dots).$$

Отсюда следует, что последовательности $\{A^k b\}_{k=0}^\infty$ и $\{J^k S^{-1}b\}_{k=0}^\infty$ ограничены одновременно. Сгруппируем координаты вектора $S^{-1}b$ в соответствии с размерностями и расположением жордановых клеток в разложении (11):

$$S^{-1}b = (\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,n_1}, \dots, \alpha_{m,1}, \dots, \alpha_{m,n_m})^T,$$

Аналогично для всех $k \in \mathbb{N}$ обозначим

$$J^{-k} S^{-1}b = (\alpha_{1,1}(k), \dots, \alpha_{1,n_1}(k), \dots, \alpha_{m,1}(k), \dots, \alpha_{m,n_m}(k))^T.$$

С учетом (11) для любых $i = \overline{1, m}$ верно соотношение

$$\begin{pmatrix} \alpha_{i,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i}(k) \end{pmatrix} = J_i^k \begin{pmatrix} \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i} \end{pmatrix}.$$

В случае, определенном соотношением (12), для всех $k \geq n_i - 1$ справедливо

$$J_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & C_k^1 \lambda_i^{k-1} & C_k^2 \lambda_i^{k-2} & \dots & C_k^{n_i-1} \lambda_i^{k-n_i+1} \\ 0 & \lambda_i^k & C_k^1 \lambda_i^{k-1} & \dots & C_k^{n_i-2} \lambda_i^{k-n_i+2} \\ 0 & 0 & \lambda_i^k & \dots & C_k^{n_i-3} \lambda_i^{k-n_i+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i^k \end{pmatrix},$$

где здесь и везде далее через C_k^j обозначено число сочетаний из k по j :

$$C_k^j = \frac{k!}{(k-j)!j!}.$$

Получим представление

$$\alpha_{i,j}(k) = \sum_{l=j}^{n_i} \alpha_{i,l} C_k^{l-j} \lambda_i^{k-l+j}, \quad j = \overline{1, n_i}.$$

Если $|\lambda_i| < 1$ и $k > 2(n_i - 1)$, то справедливы оценки:

$$\begin{aligned} |\alpha_{i,j}(k)| &\leq \sum_{l=j}^{n_i} |\alpha_{i,l}| C_k^{l-j} |\lambda_i|^{k-l+j} \leq C_k^{n_i-1} |\lambda_i|^{k-n_i+1} \sum_{l=1}^{n_i} |\alpha_{i,l}| \leq \\ &\leq \frac{\sum_{l=1}^{n_i} |\alpha_{i,l}|}{(n_i - 1)!} \frac{k!}{(k - n_i + 1)!} |\lambda_i|^{k-n_i+1} \leq \frac{\sum_{l=1}^{n_i} |\alpha_{i,l}|}{(n_i - 1)!} k^{n_i-1} |\lambda_i|^{k-n_i+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $(\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j}(1), \alpha_{i,j}(2), \dots)$ сходится, а следовательно, ограничена.

Пусть $|\lambda_i| > 1$ и найдется $j = \overline{1, n_i}$ такой, что $\alpha_{i,j} \neq 0$. Без ограничений общности будем считать, что $j = n_i$ или $\alpha_{i,j+1} = \dots = \alpha_{i,n_i} = 0$. Тогда

$$\alpha_{i,j}(k) = \alpha_{i,j} \lambda_i^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty.$$

Следовательно, $(\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j}(1), \alpha_{i,j}(2), \dots)$ не является ограниченной последовательностью.

Если же $\alpha_{i,1} = \dots = \alpha_{i,n_i} = 0$, то при любом $\lambda_i \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}$ справедливо, что $\alpha_{i,j}(k) = 0$, $j = \overline{1, n_i}$, т.е. $(\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j}(1), \alpha_{i,j}(2), \dots)$ ограничена.

Пусть $|\lambda_i| = 1$ и $\alpha_{i,1} \neq 0$, но $\alpha_{i,j} = 0$ для всех остальных $j = \overline{2, n_i}$. Тогда

$$\begin{aligned} |\alpha_{i,1}(k)| &= |\alpha_{i,1} \lambda_i^k| = |\alpha_{i,1}|, \\ \alpha_{i,j}(k) &= 0, \quad j = \overline{2, n_i}. \end{aligned}$$

Таким образом, для всех $j = \overline{1, n_i}$ последовательность $(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,1}(1), \alpha_{i,1}(2), \dots)$ ограничена.

Пусть $|\lambda_i| = 1$ и существует такой $\alpha_{i,j'} \neq 0$, где $j' = \overline{2, n_i}$. Без ограничения общности будем полагать, что $j = n_i$ или $\alpha_{i,j+1} = \dots = \alpha_{i,n_i} = 0$. Тогда

$$\alpha_{i,j-1}(k) = \alpha_{i,j-1} \lambda_i^k + k \alpha_{i,j} \lambda_i^{k-1},$$

т.е. последовательность $(\alpha_{i,j-1}, \alpha_{i,j-1}(1), \alpha_{i,j-1}(2), \dots)$ не ограничена.

Получаем, что в случае (12) последовательность

$$\begin{pmatrix} \alpha_{i,1} & \alpha_{i,1}(1) & \alpha_{i,1}(2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \alpha_{i,n_i} & \alpha_{i,n_i}(1) & \alpha_{i,n_i}(2) & \dots \end{pmatrix}$$



ограничена тогда и только тогда, когда либо $|\lambda_i| < 1$, либо $|\lambda_i| = 1$ и $\alpha_{i,j} = 0$ для всех $j \neq 1$, либо $\alpha_{i,1} = \dots = \alpha_{i,n_i} = 0$.

Рассмотрим случай (13), и для всех $j = \overline{1, n_i}$ введем обозначения

$$\tilde{\alpha}_{i,j} = \begin{pmatrix} \alpha_{i,2j-1} \\ \alpha_{i,2j} \end{pmatrix}, \tilde{\alpha}_{i,j}(k) = \begin{pmatrix} \alpha_{i,2j-1}(k) \\ \alpha_{i,2j}(k) \end{pmatrix}.$$

Для всех $k \geq n_i - 1$ справедливо

$$J_i^k = \begin{pmatrix} r_i^k A_{k\varphi_i} & C_k^1 r_i^{k-1} A_{(k-1)\varphi_i} & C_k^2 r_i^{k-2} A_{(k-2)\varphi_i} & \dots & C_k^{n_i-1} r_i^{k-n_i+1} A_{(k-n_i+1)\varphi_i} \\ 0 & r_i^k A_{k\varphi_i} & C_k^1 r_i^{k-1} A_{(k-1)\varphi_i} & \dots & C_k^{n_i-2} r_i^{k-n_i+2} A_{(k-n_i+2)\varphi_i} \\ 0 & 0 & r_i^k A_{k\varphi_i} & \dots & C_k^{n_i-3} r_i^{k-n_i+3} A_{(k-n_i+3)\varphi_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_i^k A_{k\varphi_i} \end{pmatrix},$$

Получим представление

$$\tilde{\alpha}_{i,j}(k) = \sum_{l=j}^{n_i} C_k^{l-j} r_i^{k-l+j} A_{(k-l+j)\varphi_i} \tilde{\alpha}_{i,l}, j = \overline{1, n_i}.$$

Если $r_i < 1$ и $k > 2(n_i - 1)$, то справедливы оценки:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\alpha}_{i,j}(k)\| &\leq \sum_{l=j}^{n_i} C_k^{l-j} r_i^{k-l+j} \|A_{(k-l+j)\varphi_i} \tilde{\alpha}_{i,l}\| \leq C_k^{n_i-1} r_i^{k-n_i+1} \sum_{l=1}^{n_i} \|\tilde{\alpha}_{i,l}\| \leq \\ &\leq \frac{\sum_{l=1}^{n_i} \|\tilde{\alpha}_{i,l}\|}{(n_i - 1)!} \frac{k!}{(k - n_i + 1)!} r_i^{k-n_i+1} \leq \frac{\sum_{l=1}^{n_i} \|\tilde{\alpha}_{i,l}\|}{(n_i - 1)!} k^{n_i-1} r_i^{k-n_i+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $(\tilde{\alpha}_{i,j}, \tilde{\alpha}_{i,j}(1), \tilde{\alpha}_{i,j}(2), \dots)$ сходится в $\mathbb{R}^2$, а следовательно, сходится и по координатам. Т.е. также сходятся и, как следствие, ограничены последовательности $(\alpha_{i,2j-1}, \alpha_{i,2j-1}(1), \alpha_{i,2j-1}(2), \dots)$ и $(\alpha_{i,2j}, \alpha_{i,2j}(1), \alpha_{i,2j}(2), \dots)$.

Пусть $r_i > 1$ и найдется $j = \overline{1, n_i}$ такой, что $\tilde{\alpha}_{i,j} \neq 0$. Без ограничений общности будем считать, что $j = n_i$ или $\tilde{\alpha}_{i,j+1} = \dots = \tilde{\alpha}_{i,n_i} = 0$. Тогда

$$\|\tilde{\alpha}_{i,j}(k)\| = \|r_i^k A_{k\varphi_i} \tilde{\alpha}_{i,j}\| = r_i^k \|\tilde{\alpha}_{i,j}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty.$$

Таким образом, $(\tilde{\alpha}_{i,j}, \tilde{\alpha}_{i,j}(1), \tilde{\alpha}_{i,j}(2), \dots)$ не является ограниченной последовательностью в $\mathbb{R}^2$. Отсюда с учетом неравенства Минковского следует, что хотя бы одна из последовательностей $(\alpha_{i,2j-1}, \alpha_{i,2j-1}(1), \alpha_{i,2j-1}(2), \dots)$ или $(\alpha_{i,2j}, \alpha_{i,2j}(1), \alpha_{i,2j}(2), \dots)$ также не является ограниченной.

Если же $\tilde{\alpha}_{i,1} = \dots = \tilde{\alpha}_{i,n_i} = 0$, то при любом $r_i \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}$ справедливо, что $\tilde{\alpha}_{i,j}(k) = 0$, $j = \overline{1, n_i}$, т.е. обе последовательности $(\alpha_{i,2j-1}, \alpha_{i,2j-1}(1), \alpha_{i,2j-1}(2), \dots)$ или $(\alpha_{i,2j}, \alpha_{i,2j}(1), \alpha_{i,2j}(2), \dots)$ являются тождественно нулевыми и, как следствие, ограничены.

Пусть $r_i = 1$ и $\tilde{\alpha}_{i,1} \neq 0$, но $\tilde{\alpha}_{i,j} = 0$ для всех остальных $j = \overline{2, n_i}$. Тогда

$$\|\tilde{\alpha}_{i,1}(k)\| = \|r_i^k A_{k\varphi_i} \tilde{\alpha}_{i,1}\| = \|\tilde{\alpha}_{i,1}\|,$$

$$\tilde{\alpha}_{i,j}(k) = 0, j = \overline{2, n_i}.$$

Таким образом, для всех $j = \overline{1, n_i}$ последовательности $(\alpha_{i,2j-1}, \alpha_{i,2j-1}(1), \alpha_{i,2j-1}(2), \dots)$ и $(\alpha_{i,2j}, \alpha_{i,2j}(1), \alpha_{i,2j}(2), \dots)$ ограничены.

Пусть $r_i = 1$ и существует такой $\alpha_{i,j'} \neq 0$, где $j' = \overline{2, n_i}$. Без ограничения общности будем полагать, что $j = n_i$ или $\tilde{\alpha}_{i,j+1} = \dots = \tilde{\alpha}_{i,n_i} = 0$. Тогда

$$\|\tilde{\alpha}_{i,j-1}(k)\| = \|r_i^k A_{k\varphi_i} \tilde{\alpha}_{i,j-1} + k r_i^{k-1} A_{(k-1)\varphi_i} \tilde{\alpha}_{i,j}\| \geq$$

$$\geq \|k r_i^{k-1} A_{(k-1)\varphi_i} \tilde{\alpha}_{i,j}\| - \|r_i^k A_{k\varphi_i} \tilde{\alpha}_{i,j-1}\| = k \|\tilde{\alpha}_{i,j}\| - \|\tilde{\alpha}_{i,j-1}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty.$$

Таким образом, $(\tilde{\alpha}_{i,j}, \tilde{\alpha}_{i,j}(1), \tilde{\alpha}_{i,j}(2), \dots)$ не является ограниченной последовательностью в $\mathbb{R}^2$. Отсюда с учетом неравенства Минковского следует, что хотя бы одна из последовательностей $(\alpha_{i,2j-1}, \alpha_{i,2j-1}(1), \alpha_{i,2j-1}(2), \dots)$ или $(\alpha_{i,2j}, \alpha_{i,2j}(1), \alpha_{i,2j}(2), \dots)$ также не является ограниченной.

Получаем, что в случае (13) последовательность

$$\begin{pmatrix} \alpha_{i,1} & \alpha_{i,1}(1) & \alpha_{i,1}(2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \alpha_{i,2n_i} & \alpha_{i,2n_i}(1) & \alpha_{i,2n_i}(2) & \dots \end{pmatrix}$$

ограничена тогда и только тогда, когда либо $r_i < 1$, либо $r_i = 1$ и $\tilde{\alpha}_{i,j} = 0$ для всех $j \neq 1$, либо $\tilde{\alpha}_{i,1} = \dots = \tilde{\alpha}_{i,n_i} = 0$. А в свою очередь ограниченность последовательностей $\{A^k b\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{J^k S^{-1} b\}_{k=0}^{\infty}$ равносильна тому, что данные условия будут выполняться для всех $i = \overline{1, m}$, что эквивалентно включению

$$b \in \text{Lin}(L_{<1} \cup L_{=1}).$$

Рассмотрим вопросы ограниченности $\mathcal{X}_{1,\infty}$. Если $\det A = 0$, то у матрицы A существует собственный вектор $h \in \mathbb{R}^n$, соответствующий собственному значению $\lambda = 0$. Тогда согласно (5) верно включение $\text{Lin}\{h\} \subset \mathcal{X}_1(1)$, что с учетом (6) приводит к включению $\text{Lin}\{h\} \subset \mathcal{X}_{1,\infty}$, откуда следует, что $\mathcal{X}_{1,\infty}$ неограничено. Если $\det A \neq 0$, то существует матрица A^{-1} , собственные значения которой взаимнообратны собственным



значениям A [23, Гл. I]. Отсюда ясно, что доказательство пункта 2 теоремы 3 аналогично доказательству пункта 1, если заменить A на A^{-1} .

Теорема 3 доказана.

Важно сопоставить результаты теоремы 3 с результатами [17]. Напомним, что в случае l_p -ограничений на скалярное управление при $p > 1$ предельные множества достижимости (4) и 0-управляемости (6) оказываются ограниченными тогда и только тогда, когда $b \in \mathbb{L}_{<1}$ и $b \in \mathbb{L}_{>1}$ соответственно [17, теоремы 2, 3]. Эти условия исключают возможность одновременной ограниченности этих множеств, за исключением тривиального случая $b = 0$. Для систем с суммарными l_1 -ограничениями, как следует из теоремы 3, такая ситуация возможна. Представим данный факт в виде следствия.

Следствие 2. Пусть множества $\mathcal{X}_{1,\infty}$ и $\mathcal{X}_{1,\infty}$ для системы (1) определяются соотношениями (4) и (6) соответственно. Тогда данные множества ограничены тогда и только тогда, когда

$$b \in L_{=1}$$

Доказательство. Доказательство следствия 2 следует непосредственно из теоремы 3.

5. ПРИМЕРЫ

На языке Maple была написана программа, которая в соответствии с разработанными методами строит множества достижимости и 0-управляемости. В качестве фазового пространства было выбрано $\mathbb{R}^2$.

Пример 1. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0.31 & -0.11 \\ 0.33 & 0.79 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Матрица собственных значений Λ и матрица S из разложения (9) имеют вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -0.76 & 0.27 \\ 0.65 & -0.96 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы A по модулю меньше единицы, значит, мы имеем дело с устойчивой системой.

Искомая величина $N'_{\max}$, вычисленная в соответствие с пунктом 1 следствия 1, для этой системы равна 3. На рис. 1 изображен многогранник $\mathcal{X}_1(3) = \mathcal{X}_{1,\infty}$. Также при помощи леммы 2 вычислено точное значение $N'_{\max} = 2$.

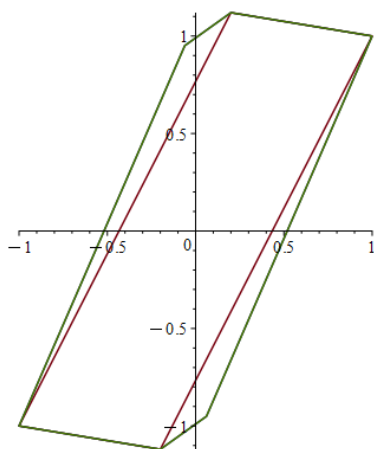


Рис. 1. Множества достижимости для системы (14)

Пример 2. Пусть

$$A = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Матрица A имеет только комплексно-сопряженные собственные значения. Матрица собственных значений Λ и матрица S из разложения (9) имеют вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0.65 & 0.38 \\ -0.38 & 0.65 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0.71 & 0 \\ 0 & -0.71 \end{pmatrix}.$$

Модуль собственных значений матрицы A меньше единицы, следовательно, система устойчива.

Априорная оценка $\overline{N'_{\max}}$, вычисленная в соответствии с пунктом 1 следствия 1, для этой системы равна 5. На рис. 2 изображен многогранник $\mathcal{Y}_1(5) = \mathcal{Y}_{1,\infty}$. Также при помощи леммы 2 вычислено точное значение $N'_{\max} = 3$.

Пример 3. Пусть

$$A = \frac{10}{19} \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Матрица собственных значений Λ и матрица S из разложения (9) имеют вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1.05 & 0 \\ 0 & 1.58 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -0.89 & 0.83 \\ 0.45 & -0.55 \end{pmatrix}.$$



Собственные значения матрицы A оказались больше единицы по модулю, следовательно, система является неустойчивой, а значит, мы можем для нее построить предельные множества 0-управляемости.

Априорная оценка $N''_{\max}$, вычисленная в соответствии с пунктом 2 следствия 1, для этой системы равна 88. На рис. 3 изображен многогранник $\mathcal{X}_1(88) = \mathcal{X}_{1,\infty}$. Также при помощи леммы 2 вычислено точное значение $N''_{\max} = 7$.

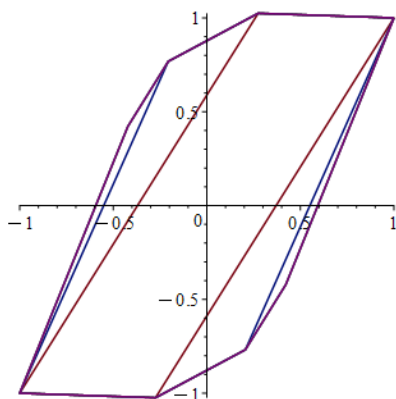


Рис. 2. Множества достижимости для системы (15)

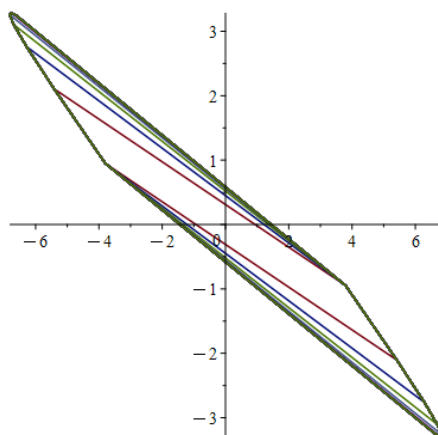


Рис. 3. Множества 0-управляемости для системы (16)

Пример 4. Пусть

$$A = \frac{6}{5} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Матрица A имеет только комплексно-сопряженные собственные значения. Матрица собственных значений Λ и матрица S из разложения (9) имеют вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.85 \\ -0.85 & 0.85 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0.71 & 0 \\ 0 & -0.71 \end{pmatrix}.$$

Модуль комплексно-сопряженных собственных значений матрицы A больше единицы, следовательно система неустойчива, поэтому можем построить предельные множества 0-управляемости.

Априорная оценка $\overline{N''_{\max}}$, вычисленная в соответствии с пунктом 2 следствия 1, для этой системы равна 7. На рис. 4 изображен многоугольник $\mathcal{X}_1(7) = \mathcal{X}_{1,\infty}$. Также при помощи леммы 2 вычислено точное значение $N''_{\max} = 3$.

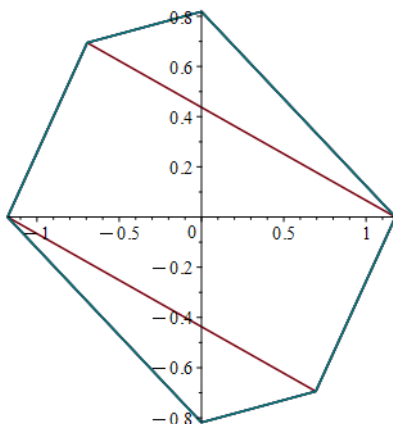


Рис. 4. Множества 0-управляемости для системы (17)

Пример 5. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} \cos 1 & -\sin 1 \\ \sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Матрица A совпадает со своей вещественной жордановой формой из разложения (9):

$$\Lambda = A, \quad S = I.$$

В таком случае матрица системы имеет только комплексно-сопряженные собственные значения, равные по модулю единице. По этой причине нельзя воспользоваться результатами теорем 1 и 2 для построения предельных множества достижимости и 0-управляемости, хотя в силу теоремы 3 множества $\mathcal{Y}_{1,\infty}$ и $\mathcal{X}_{1,\infty}$ являются ограниченными, и представляют собой круг радиуса 1 с центром в начале координат. Докажем это.



Множество достижимости является выпуклой оболочкой множества точек, полученных путем умножения возведенной в степень N матрицы системы A на вектор b . Последовательность $\{\pm A^N b\}_{N=0}^{\infty}$ является плотной в окружности радиуса 1, поскольку матрица A является матрицей поворота на угол, отношение которого к π не является рациональным числом. То есть замыкание этого множества точек является окружностью, следовательно, замыкание выпуклой оболочки данной последовательности точек должно совпадать с выпуклой оболочкой окружности, то есть с кругом [10, Теорема 17.2]. Из этого следует, что с точностью до замыкания предельное множество достижимости совпадает с кругом.

Аналогичные рассуждения справедливы также для последовательности $\{\pm A^{-N} b\}_{N=1}^{\infty}$ и множеств 0-управляемости.

Пример 6. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Матрица собственных значений Λ и матрица S из разложения (9) имеют вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица A имеет одно собственное значение кратности 2, а вектор b – присоединенный вектор, соответствующий этому собственному значению. Согласно теореме 3 предельные множества достижимости и 0-управляемости будут неограниченными. На рис. 6 изображена последовательность множеств 0-управляемости данной системы для $N \in \{2, \dots, 10\}$, которая неограниченно возрастает.

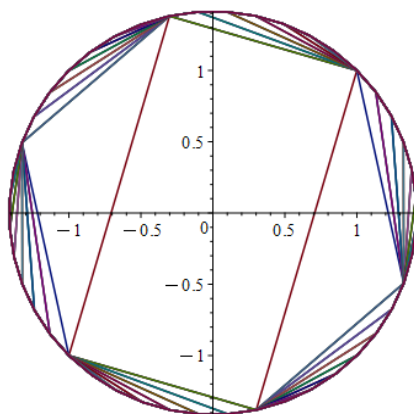


Рис. 5. Множества достижимости для системы (18)

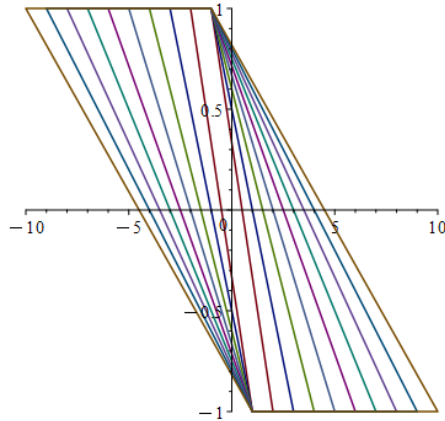


Рис. 6. Множества 0-управляемости для системы (19)

Пример 7. В ранее рассмотренном примере 5 система не имела действительных собственных значений, а лишь комплексно-сопряженные. Выясним, существуют ли такие системы, собственные значения которых будут действительными, а им соответствующие множества достижимости и 0-управляемости будут ограниченными, однако не будут являться многогранниками.

Рассмотрим систему следующего вида для $n = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in (0,1). \quad (20)$$

Вещественная жорданова форма Λ и матрица S из разложения (9) для данной системы имеют вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 3, предельное множество 0-управляемости $\mathcal{X}_{1,\infty}$ ограничено, однако оно не удовлетворяет теореме 1 и не является многогранником. Докажем это.

Для матрицы A справедливы следующие тождества:



$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-k} = \begin{pmatrix} \alpha^k & k\alpha^{k-1} & 0 \\ 0 & \alpha^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-k}b = \begin{pmatrix} k\alpha^{k-1} \\ \alpha^k \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим следующий вектор для произвольного фиксированного $k_0 \in \mathbb{N}$:

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{k_0 \ln \alpha + 1}{\alpha \ln \alpha} \\ k_0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$(p, A^{-k}b) = k\alpha^{k-1} - \frac{k_0 \ln \alpha + 1}{\ln \alpha} \alpha^{k+1} + k_0.$$

Найдем максимум этого функционала по $k \in \mathbb{N}$. Для этого введем функцию

$$f(x) = x\alpha^{x-1} - \frac{k_0 \ln \alpha + 1}{\ln \alpha} \alpha^{x+1} + k_0.$$

Вычислим стационарные точки f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x - k_0) \alpha^{x-1} \ln \alpha = 0, \\ x &= k_0. \end{aligned}$$

Определим характер экстремума в точке $x = k_0$, для этого выберем малое $\varepsilon > 0$ и определим знак производной в ε -окрестности точки k_0 .

$$f'(k_0 - \varepsilon) = (k_0 - \varepsilon - k_0) \alpha^{k_0 + \varepsilon - 1} = -\varepsilon \alpha^{k_0 + \varepsilon - 1} \ln \alpha > 0,$$

$$f'(k_0 + \varepsilon) = (k_0 + \varepsilon - k_0) \alpha^{k_0 + \varepsilon - 1} = \varepsilon \alpha^{k_0 + \varepsilon - 1} \ln \alpha < 0.$$

Таким образом,

$$(p, A^{-k}b) < (p, A^{-k_0}b), \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{k_0\}.$$

Теперь рассмотрим величину

$$(p, -A^{-k}b) = -k\alpha^{k-1} + \frac{k_0 \ln \alpha + 1}{\ln \alpha} \alpha^{k+1} - k_0.$$

Найдем максимум этого функционала по $k \in \mathbb{N}$. Для этого введем функцию:

$$g(x) = -x\alpha^{x-1} + \frac{k_0 \ln \alpha + 1}{\ln \alpha} \alpha^{x+1} - k_0.$$

Так как $g(x) = -f(x)$, точка $x = k_0$ является минимумом функции $g(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{x \geq 1} g(x) &= \max \left\{ g(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right\}. \\ g(1) &= -1 + \frac{k_0 \ln \alpha + 1}{\ln \alpha} - k_0 = -1 + \frac{1}{\ln \alpha}, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-x \alpha^{x-1} + \frac{k_0 \ln \alpha + 1}{\ln \alpha} \alpha^{x-1} - k_0 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (-x \alpha^{x-1}) + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{k_0 \ln \alpha + 1}{\ln \alpha} \alpha^{x-1} \right) - k_0 = -k_0, \\ \sup_{x \geq 1} g(x) &= \max \left\{ -1 + \frac{1}{\ln \alpha}, -k_0 \right\} < 0 < f(k_0). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(p, -A^{-k}b) < (p, A^{-k_0}b), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим также два предельных случая. Пусть

$$\begin{aligned} x_{\infty}^{+} = \lim_{N \rightarrow \infty} A^{-N}b &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_{\infty}^{-} = \lim_{N \rightarrow \infty} -A^{-N}b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \\ (p, x_{\infty}^{+}) &= k_0 < (p, A^{-k_0}b), \quad (p, x_{\infty}^{-}) = -k_0 < (p, A^{-k_0}b). \end{aligned}$$

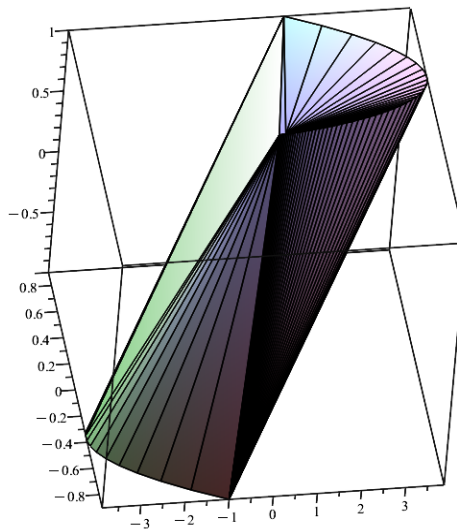


Рис. 7. Множества 0-управляемости для системы (20)



Следовательно, в k_0 достигается единственный максимум функционала $(p, \pm A^{-k}b)$ по $k \in \mathbb{N}$. Т.е. $A^{-k_0}b$ согласно [10, Следствие 32.3.2] является крайней для замыкания $\mathcal{X}_{1,\infty}$. Но поскольку $k_0 \in \mathbb{N}$ был выбран произвольно, то множество крайних точек $\mathcal{X}_{1,\infty}$ не является конечным.

Проиллюстрируем пример на рис. 7, выбрав $\alpha = 0.9$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для решения задач анализа и численного моделирования линейных систем с дискретным временем и геометрическими ограничениями на управление в статье решена задача построения предельных множеств достижимости и 0-управляемости. Определен и доказан строгий критерий ограниченности этих множеств, сводящийся к построению вещественного жорданова базиса матрицы системы. В виде теоремы 2 предложен метод построения априорных оценок предельных множеств достижимости и 0-управляемости. Определены условия, при которых исследуемые множества являются многогранниками.

Эффективность теоретических результатов продемонстрирована на примере построения множеств достижимости и 0-управляемости для различных систем. Отдельно стоит упомянуть примеры, демонстрирующие существование систем, для которых рассматриваемые множества не являются многогранниками, несмотря на то, что они ограничены.

Литература

1. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.
2. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.
3. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973.
4. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. М.: Наука, 2005.
5. Yang H., Xia Y., Geng Q. Stabilization on Null Controllable Region / In: Analysis and Synthesis of Delta Operator Systems with Actuator Saturation. Studies in Systems, Decision and Control. 2019. V. 193. P. 39–65. DOI: 10.1007/978-981-13-3660-7_3.
6. Amato F., Cosentino C., Tommasi G.D., Pironti A., Romano M. Input–Output Finite-Time Stabilization of Linear Time-Varying Discrete-Time Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2022. V. 67. No. 9. P. 4438–4450. DOI: 10.1109/TAC.2022.3161374.
7. Ибрагимов Д.Н. О задаче быстрогодействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // АиТ. 2019. № 3. С. 3–25. DOI: 10.1134/S0005231019030012.
8. Ибрагимов Д.Н., Новожилкин Н.М., Порцева Е.Ю. О достаточных условиях оптимальности гарантирующего управления в задаче быстрогодействия для линейной нестационарной дискретной системы с ограниченным управлением // АиТ. 2021. № 12. С. 48–72. DOI: 10.31857/S0005231021120047.
9. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИИЛ, 1960.
10. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
11. Мордухович Б.Ш. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988.

12. Зыков И.В. Приближенное вычисление множеств достижимости линейных управляемых систем при разнотипных ограничениях на управление // Известия института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2022. Т. 60 С. 16–33. DOI: 10.35634/2226-3594-2022-60-02
13. Зайцева М.В., Точилин П.А. Методы построения оценок множеств достижимости в задаче моделирования потоков людей // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 8. С. 1381–1394. DOI: 10.31857/S0044466923070190
14. Kuntsevich V.M., Kurzhanski A.B. Attainability Domains for Linear and Some Classes of Nonlinear Discrete Systems and Their Control // J. Autom. Inform. Sci. 2010. V. 42. No. 1. P. 1–18. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v42.i1.10.
15. Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н. О методе построения внешних оценок предельного множества управляемости для линейной дискретной системы с ограниченным управлением // АиТ. 2023. № 2. С. 3–34. DOI: 10.31857/S0005231023020010
16. Ибрагимов Д.Н., Осокин А.В., Сиротин А.Н., Сыпало К.И. О свойствах предельных множеств управляемости для класса неустойчивых линейных систем с дискретным временем и l_1 -ограничениями // Известия РАН. Теория и системы управления. 2022. № 4. С. 3–21. DOI: 10.31857/S0002338822040102
17. Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н. О некоторых свойствах множеств ограниченной управляемости для стационарных линейных дискретных систем с суммарным ограничением на управление // Известия РАН. Теория и системы управления. 2023. № 6. С. 3–32. DOI: 10.31857/S0002338823050086
18. Ибрагимов Д.Н. О внешнем оценивании предельных множеств достижимости и 0-управляемости для линейных дискретных систем с суммарным ограничением на скалярное управление // АиТ. 2024. № 4. С. 3–30. DOI: 10.31857/S0005231024040018
19. Сиротин А.Н., Формальский А.М. Достижимость и управляемость дискретных систем при ограниченных по величине и импульсу управляющих воздействиях // АиТ. 2003. № 12. С. 17–32.
20. Colonius F., Cossich J.A.N., Santana A.J. Controllability properties and invariance pressure for linear discrete-time systems // J. Dynam. Different. Equat. 2022. Vol. 34. P. 5–22. DOI: 10.1007/s10884-021-09966-4.
21. Darup M.S., Mönnigmann M. On general relations between null-controllable and controlled invariant sets for linear constrained systems // 53rd IEEE Conference on Decision and Control. Los Angeles. 2014. P. 6323–6328. DOI: 10.1109/CDC.2014.7040380.
22. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.
23. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.



On the Conditions of Limited Sets of Reachability and Controllability for Linear Systems with Discrete Time and Total First-Order Constraints on Scalar Control

Danis N. Ibragimov *

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI)

Moscow, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7472-5520>

e-mail: rikk.dan@gmail.com

Stepan S. Samonov **

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI)

Moscow, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7472-5520>

e-mail: stepan.samonov.s@gmail.com

The article discusses linear systems with discrete time and summary constraints on first-order scalar control. For this class of systems, the reachable and null-controllable sets in a finite number of steps and their limit analogues are studied. The criterion for the boundedness of reachable and null-controllable limit sets in terms of matrices of the system is formulated and proved. In the case of their boundedness, the conditions under which the studied sets are polyhedra are determined. The structure of polyhedra is defined. Examples are presented, and numerical modeling of reachable and null-controllable sets of various systems is carried out.

Keywords: linear system, discrete time, summary constraints, reachable sets, controllable sets, controllability

For citation:

Ibragimov D.N., Samonov S.S. On the Conditions of Limited Sets of Reachability and Controllability for Linear Systems with Discrete Time and Total First-Order Constraints on Scalar Control // *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2025. Vol. 15, no. 1, pp. 51–80. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2025150104> (In Russ., abstr. in Engl.).

***Danis N. Ibragimov**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Probability Theory and Computer Modeling, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7472-5520>, e-mail: rikk.dan@gmail.com

****Stepan S. Samonov**, student, Department of Probability Theory and Computer Modeling, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-5188-1727>, e-mail: stepan.samonov.s@gmail.com

References

1. Moiseev N.N. Elementy teorii optimal'nykh sistem [Elements of the theory of optimal systems]. Moskva: Nauka=Moscow: The science., 1975. (In Russ).
2. Boltyanskij V.G. Optimal'noe upravlenie diskretnymi sistemami [Optimal control of discrete systems]. Moskva: Nauka=Moscow: The science. 1973. (In Russ.).
3. Propoi A.I. Elementy teorii optimal'nykh diskretnykh protsessov [Elements of the theory of optimal discrete processes]. Moskva: Nauka=Moscow: The science. 1973. (In Russ.).
4. Agrachev A.A., Sachkov YU.L. Geometricheskaya teoriya upravleniya [Geometric control theory]. Moskva: Nauka=Moscow: The science. 2005. (In Russ.).
5. Yang H., Xia Y., Geng Q. Stabilization on Null Controllable Region / In: Analysis and Synthesis of Delta Operator Systems with Actuator Saturation. Studies in Systems, Decision and Control. 2019. V. 193. P. 39–65. DOI: 10.1007/978-981-13-3660-7_3.
6. Amato F., Cosentino C., Tommasi G.D., Pironti A., Romano M. Input–Output Finite-Time Stabilization of Linear Time-Varying Discrete-Time Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2022. V. 67. No. 9. P. 4438–4450. DOI: 10.1109/TAC.2022.3161374.
7. Ibragimov D.N. On the Optimal Speed Problem for the Class of Linear Autonomous Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control and Degenerate Operator // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 3. P. 393–412. DOI: 10.1134/S0005117919030019.
8. Ibragimov D.N., Novozhilin N.M., Portseva E.Yu. On Sufficient Optimality Conditions for a Guaranteed Control in the Speed Problem for a Linear Time-Varying Discrete-Time System with Bounded Control // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 12. P. 2076–2096. DOI: 10.31857/S0005231021120047
9. Bellman R. Dinamicheskoye programmirovaniye [Dynamic programming]. Moskva: IIL=Moscow: IIL., 1960. (In Russ).
10. Rokafellar R. Vypuklyy analiz [Convex Analysis] Moskva: Mir=Moscow: Mir, 1973.
11. Mordukhovich B.SH. Metody approksimatsiy v zadakh optimizatsii i upravleniya [Approximation methods in optimization and control problems]. Moskva: Nauka=Moscow: The science., 1988. (In Russ).
12. Zykov I.V. Priblizhennoye vychisleniye mnozhestv dostizhimosti lineynykh upravlyayemykh sistem pri raznotipnykh ogranicheniyakh na upravleniye [Approximate calculation of reachability sets of linear control systems under different types of control constraints] // Izvestiya instituta matematiki i informatiki Udmurtskogo gosudarstvennogo universiteta. 2022. T. 60 S. 16–33. [Bulletin of the Institute of Mathematics and Informatics of the Udmurt State University, 2022, Vol. 60, P. 16–33] DOI: 10.35634/2226-3594-2022-60-02 (In Russ.)
13. Zaytseva M.V., Tochilin P.A. Metody postroyeniya otsenok mnozhestv dostizhimosti v zadache modelirovaniya potokov lyudey [Methods for constructing estimates of reachability sets in the problem of modeling people flows] // Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki 2023. T. 63. № 8. S. 1381–1394 [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics 2023. Vol. 63. No. 8. P. 1381–1394]. DOI: 10.31857/S0044466923070190
14. Kuntsevich V.M., Kurzhanski A.B. Attainability Domains for Linear and Some Classes of Nonlinear Discrete Systems and Their Control // J. Autom. Inform. Sci. 2010. V. 42. No. 1. P. 1–18. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v42.i1.10.
15. Berendakova A.V., Ibragimov D.N. About the Method for Constructing External Estimates of the Limit 0-Controllability Set for the Linear Discrete-Time System with Bounded Control // Autom. Remote Control. 2023. V. 84. No. 2. P. 97–120. DOI: 10.25728/arcRAS.2023.95.43.001.
16. Ibragimov D.N., Osokin A.V., Sirotin A.N., Sypalo K.I. On the Properties of the Limit Control Sets for a Class of Unstable Linear Systems with Discrete Time and l_1 -Restrictions // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2022. Vol. 61. No. 4. P. 467–484. DOI: 10.1134/S1064230722040104.



17. Ibragimov D.N., Sirotin A.N. On Some Properties of Sets of Bounded Controllability for Stationary Linear Discrete Systems with Total Control Constraints // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2023. Vol. 62. No. 6. P. 727–756. DOI: 10.1134/S1064230723050088.
18. Ibragimov D.N. On the External Estimation of Reachable and Null-Controllable Limit Sets for Linear Discrete-Time Systems with a Summary Constraint on the Scalar Control // *Autom. Remote Control*. 2024. Vol. 85. No. 4. P. 321–340. DOI: 10.1134/S0005117924040027.
19. Sirotin A.N., Formal'skii A.M. Reachability and Controllability of Discrete-Time Systems under Control Actions Bounded in Magnitude and Norm // *Autom. Remote Control*. 2003. V. 64. No. 12. P. 1844–1857. DOI: 10.1023/B: AURC.0000008423.93495.be
20. Colonius F., Cossich J.A.N., Santana A.J. Controllability properties and invariance pressure for linear discrete-time systems // *J. Dynam. Different. Equat.* 2022. Vol. 34. P. 5–22. DOI: 10.1007/s10884-021-09966-4.
21. Darup M.S., Mönnigmann M. On general relations between null-controllable and controlled invariant sets for linear constrained systems // *53rd IEEE Conference on Decision and Control*. Los Angeles. 2014. P. 6323–6328. DOI: 10.1109/CDC.2014.7040380.
22. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis]. Moskva: Nauka = Moscow: The science, 1981. (In Russ.)
23. Horn R., Johnson C. *Matrichnyy analiz* [Matrix Analysis]. Moskva: Mir = Moscow: Mir, 1989. (In Russ.)

Получена 09.01.2025

Received 09.01.2025

Принята в печать 30.01.2025

Accepted 30.01.2025

УДК 517.977:519.8

Применение модификации метода, имитирующего поведение стаи мотыльков, для решения задачи оптимального программного управления мобильным роботом

Пантелеев А.В.*

Московский авиационный институт

(национальный исследовательский университет) (МАИ)

г. Москва, Российская Федерация

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>

e-mail: avpanteleev@inbox.ru

Надоров И.С.**

Московский авиационный институт

(национальный исследовательский университет) (МАИ)

г. Москва, Российская Федерация

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2085-2987>

e-mail: nnadorovivan@gmail.com

В статье предложена модификация метаэвристического метода оптимизации, имитирующего поведение стаи мотыльков, относящегося к группе биоинспирированных методов. Сформирован пошаговый алгоритм и изучена эффективность модифицированного метода на общепринятом наборе тестовых функций многих переменных со сложной структурой поверхностей уровня, на задаче оптимального программного управления с известным точным решением, а также на задаче определения параметров натяжной/компрессионной пружины с ограничениями типа неравенств. Показано преимущество модифицированного метода над оригинальной версией. Продемонстрировано, что метод позволяет найти решения достаточно хорошего качества за приемлемое с практической точки зрения время. Приведено решение прикладной задачи поиска оптимального программного управления мобильным роботом на плоскости при наличии препятствий. Целью управления является достижение заданной конечной точки при минимизации затрачиваемого времени и выполнении условия огибания запретных областей. Для нахождения закона управления как функции времени применялась кусочно-постоянная аппроксимация, позволяющая свести задачу к нахождению конечного числа неизвестных параметров. Рассмотрены решения терминальной задачи быстрогодействия при различной структуре и параметрах составного функционала качества с помощью последовательного применения



разработанного модифицированного метода, имитирующего поведение стаи мотыльков, метода случайного поиска с последовательной редукцией области исследования и метода перекоммутации. Приведены результаты сравнения с известными решениями, подтвердившие эффективность разработанного алгоритмического и программного обеспечения.

Ключевые слова: глобальная оптимизация, метаэвристические методы, оптимальное управление.

Для цитаты:

Пантелеев А.В., Надоров И.С. Применение модификации метода, имитирующего поведение стаи мотыльков, для решения задачи оптимального программного управления мобильным роботом // Моделирование и анализ данных. 2025. Том 15. № 1. С. 81–109. DOI: 10.17759/mda.2025150105

***Пантелеев Андрей Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики, институт «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: avpanteleev@inbox.ru

****Надоров Иван Сергеевич**, студент, институт «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2085-2987>, e-mail: nnadorovivan@gmail.com

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи параметрической оптимизации при наличии интервальных ограничений возникают при решении разнообразных проблем проектирования сложных авиационно-космических систем. При этом целевые функции, отражающие требования проектировщика к системе, часто оказываются многоэкстремальными, недифференцируемыми или вычисляемыми в результате реализации многошаговых вспомогательных алгоритмов. Поэтому одним из требований к применяемым для решения задачи методам оптимизации является возможность покидать окрестности локальных экстремумов в процессе поиска глобального экстремума. Применение традиционных методов оптимизации первого и второго порядков для целевых функций общего вида, как правило, приводит к нахождению локальных экстремумов. В настоящее время в научной литературе большое внимание уделяется разработке приближённых методов глобальной оптимизации, которые позволяют найти решение достаточно хорошего качества за приемлемое время [1–7]. Как правило, выделяются два класса методов нулевого порядка, в которых для определения направления поиска используется только информация о величине целевой функции: стохастические метаэвристические [1–7] и детерминированные [8, 9]. Метаэвристические методы можно условно разделить на пять групп [1]: эволюционные методы; методы, имитирующие физические процессы; мультистартовые методы; методы роевого интеллекта; биоинспирированные и мультиагентные методы. Биоинспирированные методы



на сегодняшний день получили значительное распространение при решении прикладных задач параметрической оптимизации технических систем и законов управления динамическими системами [1, 7]. К ним относится метод, имитирующий поведение стаи мотыльков (Moth-Flame Optimization, MFO) [10], имеющий свои преимущества и недостатки [11]. Разработка новых и усовершенствование существующих методов является актуальным вследствие справедливости теоремы (No free lunch, NFL) [12] о том, что не существует универсального метода, позволяющего наилучшим образом решить общую задачу конечномерной оптимизации. В данной работе предложена модификация метода MFO, продемонстрирована её эффективность для общеизвестных тестовых функций [13], для задач оптимального программного управления, для задач оптимизации с ограничениями типа неравенств, а также преимущество перед оригинальной версией. Модификация метода MFO применена для решения задачи поиска оптимального программного управления мобильным роботом [14, 15], которая может оказаться полезной на этапе эскизного проектирования планетоходов.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Дана целевая функция $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определённая на параллелепипеде в пространстве допустимых решений $D \subseteq R^n$. Требуется найти глобальный условный минимум функции $f(x)$ на множестве D , т. е. такую точку $x^* \in D$, что

$$f(x^*) = \min_{x \in D} f(x),$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $D = \{x \mid x_i \in [a_i, b_i], i = 1, 2, \dots, n\}$. Задача поиска максимума целевой функции $f(x)$ сводится к задаче поиска минимума путём замены знака перед функцией на противоположный:

$$f(x^*) = \max_{x \in D} f(x) = -\min_{x \in D} [-f(x)].$$

3. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД, ИМИТИРУЮЩИЙ ПОВЕДЕНИЕ СТАИ МОТЫЛЬКОВ. СТРАТЕГИЯ ПОИСКА

Метод мотыльков и источников света (MFO) имитирует поведение мотыльков при их приближении к источникам света. Каждый мотылек из популяции мотыльков реализует движение по спирали к центру – источнику света [10]. В начале создается случайный набор из N_p точек (положений мотыльков) в пространстве допустимых решений, который можно представить следующей матрицей:

$$M(\text{Moth}) = \begin{pmatrix} m_1^1 & \dots & m_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_1^{N_p} & \dots & m_n^{N_p} \end{pmatrix},$$

где m_i^j – значение i -й координаты j -го мотылька, $j = 1, \dots, N_p$, $i = 1, \dots, n$.



Для всех текущих положений мотыльков $m^j = (m_1^j, \dots, m_n^j)^T$ вычисляются значения целевой функции $OM^j = f(m^j)$, $j = 1, \dots, Np$. В результате формируется

$$\text{вектор } OM = \begin{pmatrix} OM^1 \\ OM^2 \\ \vdots \\ OM^{Np} \end{pmatrix}.$$

Помимо мотыльков в решении задачи играют роль источники света – лучшие положения мотыльков, среди всех ранее занятых, с точки зрения достижения наименьшего значения целевой функции. Поэтому число источников света тоже равно Np . Аналогично мотылькам формируется матрица координат источников света и вектор значений целевой функции, упорядоченный по возрастанию (наилучший источник света имеет номер 1):

$$F(\text{Flame}) = \begin{pmatrix} f_1^1 & \dots & f_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{Np} & \dots & f_n^{Np} \end{pmatrix}, \quad OF = \begin{pmatrix} OF^1 \\ OF^2 \\ \vdots \\ OF^{Np} \end{pmatrix},$$

где f_i^j – значение i -й координаты j -го источника света, $j = 1, \dots, Np$, $i = 1, \dots, n$, OF^j – значение целевой функции в точке $f^j = (f_1^j, \dots, f_n^j)^T$, $j = 1, \dots, Np$, соответствующей положению j -го источника света.

В процессе поиска мотыльки меняют свое положение: двигаются по спирали к источникам света по каждой координате. Спираль должна удовлетворять трем требованиям: начальная точка спирали начинается с текущего положения мотылька, в полюсе спирали расположен источник света, точки спирали не должны выходить за пределы множества допустимых решений D . В качестве такой спирали можно взять логарифмическую спираль (рис. 1):

$$S(m^j, f^j) = H^j e^{st} \cos(2\pi t) + f^j,$$

где m^j – положение j -го мотылька, f^j – положение j -го источника света, $H^j = |f^j - m^j|$ – вектор покоординатных расстояний между j -м источником света и j -м мотыльком, s – константа для определения формы спирали, $t \in [r-1, 0]$ – случайное число, определяющее положение мотыльков относительно спирали, задаваемое равномерным законом распределения. Число r – константа, значение которой уменьшается с ростом числа итераций по линейному закону от -1 до -2 .

Модификация метода MFO (MMFO) заключается в рассмотрении сразу нескольких точек на спирали, имитирующих передвижение мотылька к источнику света, в процессе которого реализуется стратегия поиска экстремума. Если одна из таких точек окажется за пределами множества допустимых решений, вместо неё можно

рассматривать случайную точку в пределах D . В качестве следующего положения мотылька следует выбирать то положение, в котором достигается наименьшее значение целевой функции.

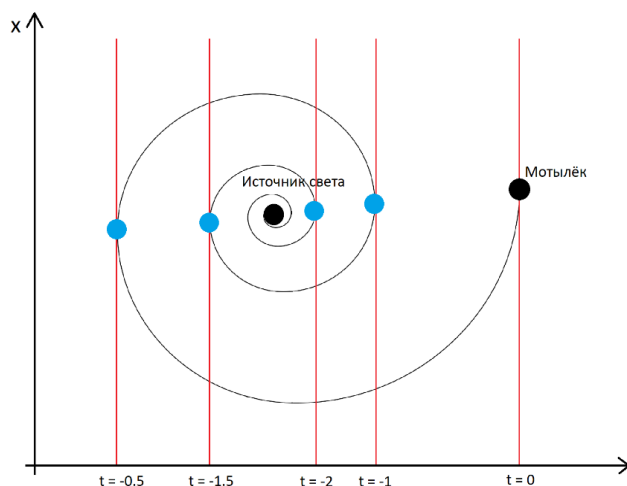


Рис. 1. Логарифмическая спираль

Продвижение мотыльков обеспечивает поиск лучшего решения, а источники света постоянно меняют свое положение. Это происходит следующим образом: рассмотрим положение первого мотылька, сравнивая значения целевой функции в точке его положения и в точке положения последнего источника света (в начале процесса поиска он имеет номер N_p). Если выполняется условие $OM^1 < OF^{last}$, т.е. положение мотылька лучше, то за положение последнего источника света принимается текущее положение первого мотылька: $f^{last} := m^1$ и заменяется значение целевой функции последнего источника света на соответствующее значение для мотылька $OF^{last} := OM^1$. Затем следует упорядочить координаты вектора положений источников света $sort(OF)$ по возрастанию значений целевой функции. Заметим, что при компьютерной реализации для реализации процедуры упорядочения предлагается использовать быструю сортировку Хоара [16]. Описанная последовательность действий повторяется для всех положений мотыльков.

Чтобы мотыльки не находили быстро локальные минимумы и не прекращали поиск, следует связать каждого мотылька ровно с одним источником света: первый летит по спирали к первому источнику, второй – ко второму, последний – к последнему. Учитывая, что источники постоянно меняются и сортируются, произойдет обеспечение тщательного исследования множества допустимых решений. Однако при длительном поиске этот процесс может ослабить целенаправленное движение к минимуму. Чтобы исключить такую возможность, число источников света сокращается постепенно по следующей формуле



$$No_f = \text{round}(Np - k \frac{Np-1}{T}),$$

где $\text{round}(x)$ – округление до ближайшего целого числа, k – номер текущей итерации, Np – первоначальное число источников света, T – максимальное число итераций.

Сокращение числа источников происходит путем удаления из рассмотрения худшего на данный момент источника, т.е. последнего в векторе OF . Мотылек, ранее связанный с этим источником, теперь связывается с источником, бывшим ранее предпоследним. Таким образом, достигается баланс между обширным исследованием множества допустимых решений и движением к минимуму.

Процесс поиска оканчивается при достижении максимального числа итераций или заданного предельного времени работы алгоритма.

4. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД, ИМИТИРУЮЩИЙ ПОВЕДЕНИЕ СТАИ МОТЫЛЬКОВ. АЛГОРИТМ

Шаг 1. Задать параметры метода: $Np > 0$ – размер популяции мотыльков; $n > 0$ – размерность задачи; s – параметр логарифмической спирали; $T > 0$ – максимальное число итераций; $\tau > 0$ – количество возможных положений мотылька на спирали.

Шаг 2. Генерация начальной популяции $\{m^1, \dots, m^{Np}\}$.

2.1. Создание популяции и заполнение матрицы положений мотыльков:

$$m_i^j = (b_i - a_i)x_i^j + a_i, \quad j=1, \dots, Np, \quad i=1, \dots, n,$$

где x_i^j – i -я координата случайного вектора x^j , описываемая равномерным законом распределения на отрезке $[0, 1]$, a, b – векторы границ множества допустимых решений,

$$M = \begin{pmatrix} m_1^1 & \dots & m_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_1^{Np} & \dots & m_n^{Np} \end{pmatrix}.$$

2.2. Положить $k=1$, $No_f = Np$.

Шаг 3. Изменение числа источников света:

$$No_f = \text{round}(Np - k \frac{Np-1}{T}),$$

где $\text{round}(x)$ – округление до ближайшего целого числа.

Если число No_f уменьшилось и $k \leq T$, то удалить последний элемент вектора OF и последнюю строку матрицы F .

Шаг 4. Получить вектор OM значений целевой функции для всех мотыльков

из текущей популяции: $OM = \begin{pmatrix} OM^1 \\ OM^2 \\ \vdots \\ OM^{Np} \end{pmatrix}$, где $OM^j = f(m^j)$, $j = 1, \dots, Np$.

Шаг 5. Получение матрицы положений источников света и соответствующего вектора значений целевой функции.

Если $k = 1$, то упорядочить строки вектора OM по возрастанию величины целевой функции. При этом получить вектор $OF = \text{sort}(OM)$ и соответствующую ему матрицу положений источников света $F = \text{sort}(M)$:

$$OF = \begin{pmatrix} OF^1 \\ OF^2 \\ \vdots \\ OF^{Np} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1^1 & \dots & f_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{Np} & \dots & f_n^{Np} \end{pmatrix}.$$

Если $k > 1$, то сформировать блочную матрицу следующего вида $P = \|p_i^j\| = \begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix}$.

Строки матрицы P соответствуют положениям источников света и мотыльков.

Затем упорядочить строки матрицы P по возрастанию значений целевой функции, соответствующих строкам матрицы.

Составить матрицу F следующим образом: $f_i^j = p_i^j$, $i = 1, \dots, n$ $j = 1, \dots, No_f$ и получить вектор

$$OF = \begin{pmatrix} OF^1 \\ OF^2 \\ \vdots \\ OF^{No_f} \end{pmatrix},$$

где $OF^j = f(f^j)$, $j = 1, \dots, No_f$.

Если $k < T$, перейти к шагу 6, иначе поиск завершить и найти приближенное решение $x^* = f^1$, $f(x^*) = OF^1$.

Шаг 6. Для каждого j -го мотылька определить новое положение:

6.1. Найти r ; t_c , $H^j = (H_1^j, \dots, H_n^j)^T$:

если $k = 1$, то положить $r = -1$, а если $k > 1$, то $r = -1 - \frac{k}{T}$.

Сгенерировать наборы равномерно распределённых случайных чисел $t_c = (t_{\tilde{n},1}, t_{\tilde{n},2}, \dots, t_{\tilde{n},n})$, $t_{\tilde{n},i} \in [r-1, 0]$, $\tilde{n} = 1, \dots, \tau$, $i = 1, \dots, n$.

Если $j \leq No_f$, то $H_i^j = |f_i^j - m_i^j|$, $i = 1, \dots, n$. Если $j > No_f$, то $H_i^j = |f_i^{No_f} - m_i^j|$, $i = 1, \dots, n$.

6.2. Найти новое положение мотылька.

Определить $m^{j(\tilde{n})} := H^j e^{st_{\tilde{n}}} \cos(2\pi t_{\tilde{n}}) + f^j$, $j = 1, \dots, Np$; $\tilde{n} = 1, \dots, \tau$.



Если не выполняется условие $a_i \leq m_i^{j(n)} \leq b_i \quad i=1, \dots, n$, то сгенерировать значение $m_i^{j(n)}$ на отрезке $[a_i, b_i]$ при помощи равномерного закона распределения.

Выбрать $m^j := \arg \min \{f(m^{j(1)}), \dots, f(m^{j(\tau)})\}$.

Шаг 7. Положить $k := k + 1$ и перейти к шагу 3.

5. ТЕСТИРОВАНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА, ИМИТИРУЮЩЕГО ПОВЕДЕНИЕ СТАИ МОТЫЛЬКОВ

На основе изложенного алгоритма разработана программа поиска глобального экстремума функций модифицированным методом MFO. Для ее создания использовалась среда разработки Microsoft Visual Studio, язык программирования C#. Характеристики компьютера, на котором проводились вычисления: процессор Intel Core i7–10750H CPU @ 2.60GHz, 6 ядер, RAM: 16 Gb.

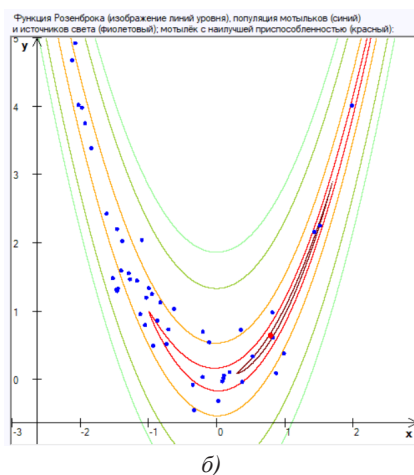
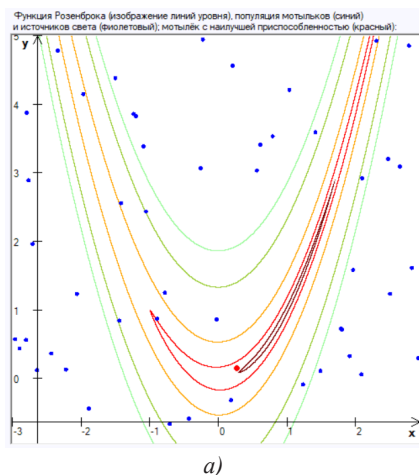
Пример 1. Найти глобальный максимум функции Розенброка

$$f(x, y) = -100(y - x^2)^2 - (1 - x)^2.$$

Зададим множество допустимых решений $x \in [-3; 3], y \in [-1; 5]$. Выберем следующие параметры алгоритма: размер популяции мотыльков $Np = 50$; параметр логарифмической спирали $s = 1$; максимальное число итераций $T = 30$; количество возможных положений мотылька на спирали $\tau = 4$.

На рис. 2 представлена популяция на начальной ($k=1$), промежуточных ($k=3, k=9$) и конечной ($k=30$) итерациях. Красная точка соответствует наилучшему решению на текущей итерации.

Результаты работы алгоритма: наилучшее решение $(x^*, y^*) = (1, 0095; 1, 0196)$; значение целевой функции $f(x^*, y^*) = -0,0001$; отклонение от точного решения $\Delta = 0,0001$. Графики изменения наилучшего и среднего по популяции значений целевой функции представлены на рис. 3.



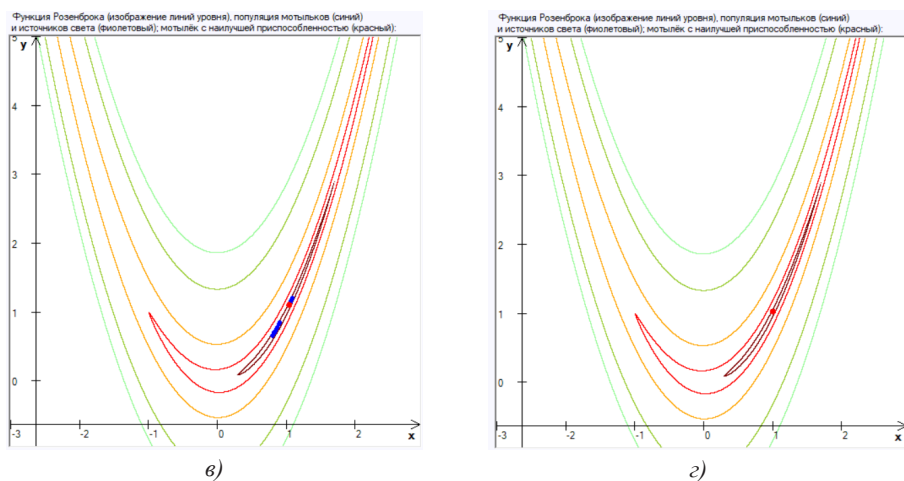


Рис. 2. Начальная, промежуточные и конечная итерации. Пример 1

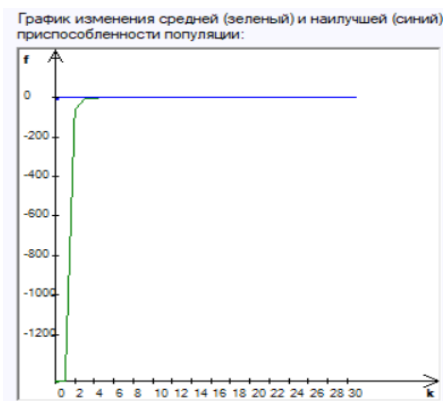


Рис. 3. Графики изменения наилучшего (синий) и среднего значения (зеленый) целевой функции. Пример 1

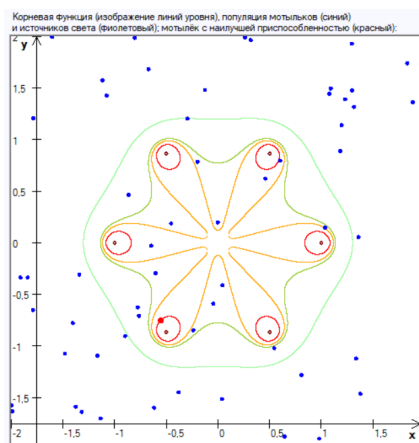
Пример 2. Найти глобальный максимум корневой функции $f(z) = \frac{1}{1 + |z^6 - 1|}$, $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$.

Зададим множество допустимых решений $x \in [-2; 2]$, $y \in [-2; 2]$. Выберем следующие параметры алгоритма: размер популяции мотыльков $Np = 60$; параметр логарифмической спирали $s = 2$; максимальное число итераций $T = 30$; количество возможных положений мотылька на спирали $\tau = 8$.

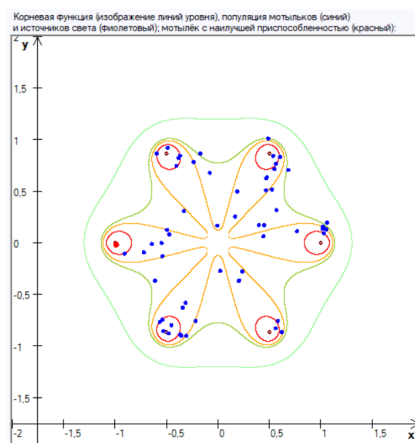
На рис. 4 представлена популяция на начальной ($k=1$), промежуточных ($k=3$, $k=8$) и конечной ($k=30$) итерациях. Красная точка соответствует наилучшему решению на текущей итерации. Результаты работы алгоритма: наилучшее решение $(x^*, y^*) = (-0,5; 0,866)$; значение целевой функции $f(x^*, y^*) = 0,999997$;



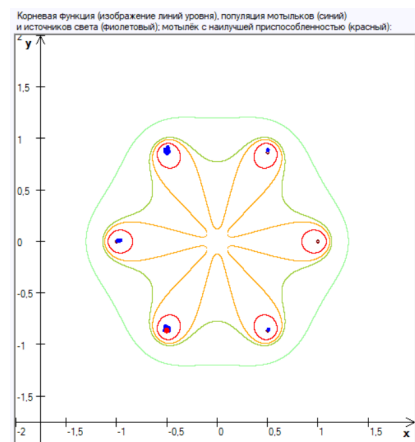
отклонение от точного решения $\Delta = 3 \cdot 10^{-6}$. Графики изменения наилучшего и среднего по популяции значений целевой функции представлены на рис. 5.



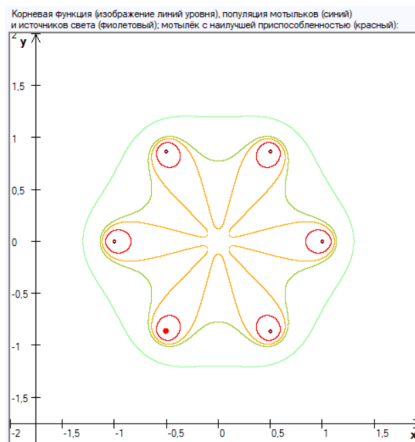
а)



б)



в)



г)

Рис. 4. Начальная, промежуточные и конечная итерации. Пример 2

Пример 3. Найти глобальный максимум функции Швепеля

$$f(x, y) = x \sin(\sqrt{|x|}) + y \sin(\sqrt{|y|}).$$

Зададим множество допустимых решений $x \in [-500; 500], y \in [-500; 500]$. Выберем следующие параметры алгоритма: размер популяции мотыльков $Np = 70$; параметр логарифмической спирали $s = 1$; максимальное число итераций $T = 40$; количество возможных положений мотылька на спирали $\tau = 8$.

На рис. 6 представлена популяция на начальной ($k=1$), промежуточных ($k=4, k=7$) и конечной ($k=40$) итерациях. Красная точка соответствует наилучшему

решению на текущей итерации. Результаты работы алгоритма: наилучшее решение $(x^*, y^*) = (420, 9699; 420, 9679)$; значение целевой функции $f(x^*, y^*) = 837,965774$; отклонение от точного решения $\Delta = 2,6 \cdot 10^{-5}$. Графики изменения наилучшего и среднего по популяции значений целевой функции представлены на рис. 7.

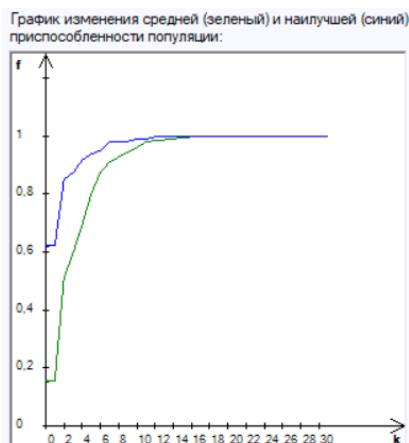


Рис. 5. Графики изменения наилучшего (синий) и среднего значения (зеленый) целевой функции. Пример 2

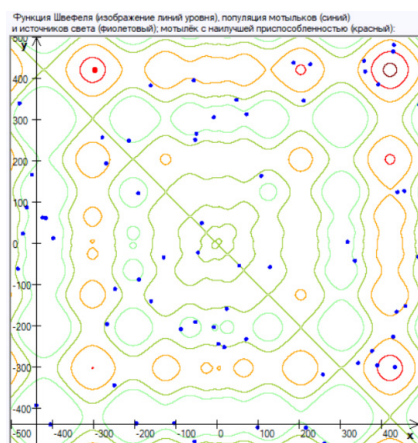
6. ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА БОЛЬЦА С ИЗВЕСТНЫМ ТОЧНЫМ РЕШЕНИЕМ

Для оценки эффективности модификации алгоритм применялся для решения задачи оптимального программного управления. Поведение модели объекта управления описывается системой разностных уравнений:

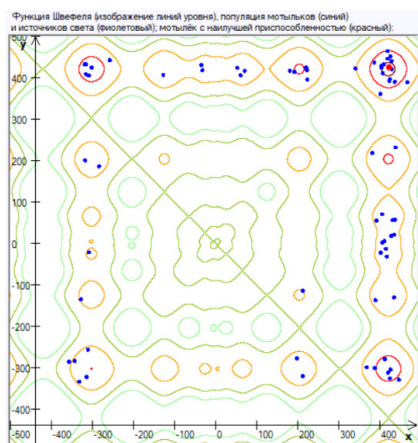
$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_2(t), \\ x_2(t+1) &= 2x_2(t) - x_1(t) + \frac{1}{N^2}u(t), \end{aligned}$$

где $x \in R^2$, $u \in R$, $t = 0, 1, \dots, N-1$. Задано ограничение на управление: $0 \leq u \leq 100$.

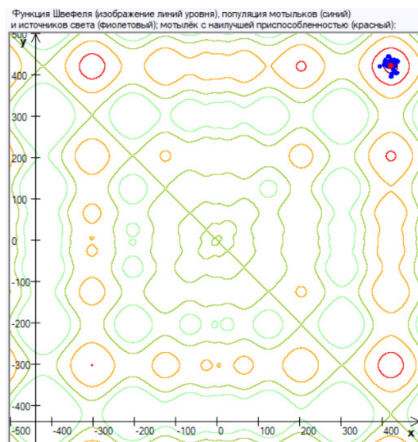
Начальное состояние: $x(0) = (0; 0)^T$.



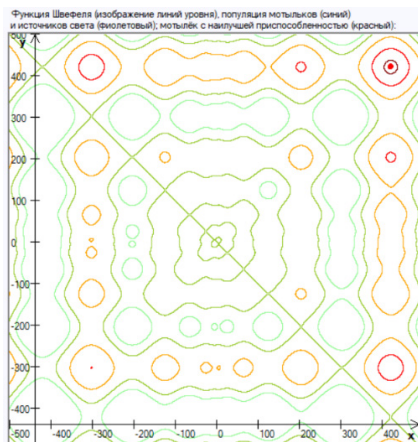
а)



б)



в)



г)

Рис. 6. Начальная, промежуточные и конечная итерации. Пример 3

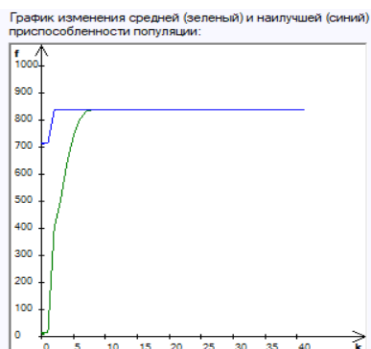


Рис. 7. Графики изменения наилучшего (синий) и среднего значения (зеленый) целевой функции. Пример 3

На множестве допустимых процессов задан функционал

$$I = -x_1(N) + \frac{1}{2N} \sum_{t=0}^{N-1} u^2(t).$$

Требуется найти минимальное значение функционала и оптимальный процесс, на котором это значение достигается.

Сформулированная задача имеет аналитическое решение:

$$u^*(t) = \frac{N-t-1}{N}, \quad \min I = -\frac{1}{3} + \frac{3N-1}{6N^2} + \frac{1}{2N^3} \sum_{t=0}^{N-1} t^2.$$

В монографии [7] эта задача решена при $N = 10$, $\min I = -0,1425$. Авторы получили следующие значения функционала качества методами, имитирующими поведение стаи окуней и стаи синиц, $I_{PSS}^* = -0,142499999999983$ и $I_{TFO}^* = -0,142499999999985$ за 3,69 сек и 0,49 сек соответственно.

С помощью метода, имитирующего поведение стаи мотыльков, с параметрами $Np = 300$, $s = 0,2$, $T = 300$ получено значение функционала: $I = -0,142381123984817$ за 0,1536818 сек. Применение модификации с параметрами $Np = 300$, $s = 0,2$, $T = 300$, $\tau = 16$ привело к следующему результату: $I = -0,1425$ за 2,6901271 сек.

При значительном повышении размерности задачи оптимизации $N = 100$ получены следующие результаты при точном минимальном значении $\min I = -0,164175$: для MFO $I = 39,3240879315545$ за 13,7644471 сек, для MMFO $I = -0,164174999999998$ за 6,7207604483333 мин. Параметры для оригинальной версии: $Np = 1000$, $s = 0,2$, $T = 1000$; параметры для модификации: $Np = 1000$, $s = 0,2$, $T = 1000$, $\tau = 32$.

Полученные результаты свидетельствуют о применимости разработанной модификации для решения задач подобного рода.

7. АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА, ИМИТИРУЮЩЕГО ПОВЕДЕНИЕ СТАИ МОТЫЛЬКОВ

В данном разделе приведены результаты статистического анализа и сравнения работы предложенной модификации метода, имитирующего поведение стаи мотыльков, при различных значениях его параметров. Метод применялся к функциям, выбранным из общеизвестного набора тестовых функций [7, 13]. Для каждой функции проводились серии из 100 решений одной и той же задачи с одними и теми же значениями параметров.

Для полученной выборки $\{f^1, f^2, \dots, f^{100}\}$ вычислялись среднее значение отклонения полученного решения от точного $\overline{\Delta f} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \Delta f_i$, где $\Delta f_i = |f(x^*) - f^i|$;



наименьшее значение отклонения $\Delta f_{best} = \min_i \Delta f_i$; среднеквадратическое отклонение

$\bar{\sigma}_f = \sqrt{\bar{S}_{100}}$, где $\bar{S}_{100} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (\Delta f^i - \bar{\Delta f})^2$; количество успехов $n_{усп}$ (успехом считалось

попадание лучшей точки в ε -окрестность точного решения, $\varepsilon = \frac{\max_{i=1, \dots, n} |b_i - a_i|}{1000}$).

Результаты, полученные для разных функции, представлены в табл. 1–6. Вычисляемые характеристики округлены до 6 знака после запятой.

Таблица 1

Влияние параметров метода. Функция «Кожа»

$$f(x, y) = \left(\cos(2x^2) - 1, 1 \right)^2 + \left(\sin \frac{x}{2} - 1, 2 \right)^2 - \left(\cos(2y^2) - 1, 1 \right)^2 + \left(\sin \frac{y}{2} - 1, 2 \right)^2$$

Параметры метода				$\bar{\Delta f}$	Δf_{best}	$\bar{\sigma}_f$	$n_{усп}$
Np	T	s	τ				
30	200	5	1	0,441289	10^{-6}	0,388672	5
30	200	2	1	0,203057	0	0,237394	26
30	200	1	1	0,115555	0	0,171043	33
30	200	0,5	1	0,071228	10^{-6}	0,121099	45
30	200	0	1	0,038793	10^{-6}	0,060279	55
30	200	0,5	2	0,025898	10^{-6}	0,044631	62
30	200	0,5	12	0,005992	10^{-6}	0,015498	87
30	500	0,5	12	0,007374	10^{-6}	0,016894	84
30	1000	0,5	12	0,003231	10^{-6}	0,011757	93
50	1000	0,5	12	0,000923	10^{-6}	0,006452	98
150	1000	0,5	12	10^{-6}	10^{-6}	0	100

Таблица 2

Влияние параметров метода. Функция Экли

$$f(x, y) = -e + 20 \exp \left(-\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{50}} \right) + \exp \left(\frac{1}{2} (\cos(2\pi x) + \cos(2\pi y)) \right)$$

Параметры метода				$\bar{\Delta f}$	Δf_{best}	$\bar{\sigma}_f$	$n_{усп}$
Np	T	s	τ				
20	200	0	1	0	0	0	100
20	200	0,001	1	0	0	0	100
20	200	0,1	1	0	0	0	100
20	200	0,5	1	0,000917	0	0,007558	99
20	200	1	1	0,197270	0	0,657170	75
20	200	2	1	1,100164	0,000158	1,253369	15
20	200	10	1	4,446471	0,163439	2,106565	0
20	200	100	1	6,256935	1,844658	2,162598	0



Таблица 3

Влияние параметров метода. Функция Розенброка

Параметры метода				$\overline{\Delta f}$	Δf_{best}	$\overline{\sigma}_f$	$n_{усп}$
Np	T	s	τ				
20	300	0	3	0,002209	0	0,008400	92
20	300	0,5	3	0,009439	0	0,027726	81
20	300	1	3	0,026629	0	0,051605	65
20	300	1,5	3	0,033928	0	0,075940	56
20	300	2	3	0,055406	0	0,097329	43
20	300	5	3	0,111751	$8 \cdot 10^{-6}$	0,174780	25
40	300	0	3	0	0	0	100
40	300	1	3	0,000500	0	0,001347	99
40	300	2	3	0,009795	0	0,021987	74

Таблица 4

Число успешных попыток алгоритма для разных целевых функций

Параметры \ Функция	$Np = 40$ $T = 300$ $s = 0,5$ $\tau = 4$	$Np = 20$ $T = 1000$ $s = 2$ $\tau = 4$	$Np = 30$ $T = 100$ $s = 0,3$ $\tau = 2$	$Np = 60$ $T = 100$ $s = 0,6$ $\tau = 5$	$Np = 100$ $T = 100$ $s = 0,2$ $\tau = 8$
Швефеля	99	86	92	100	100
Мульти-функция	100	94	95	100	100
Корневая	100	97	100	100	100
Шаффера	100	100	100	100	100
Растргина	100	71	99	100	100
Экли	100	83	100	100	100
«Кожа»	75	31	59	86	100
«Западняя»	100	82	100	100	100
Розенброка	98	53	91	100	100
Параболическая	100	99	100	100	100
Шаффера (с $\varepsilon/10$)	27	3	11	39	89

Таблица 5

Сравнение модификации и оригинальной версии. Функция «Кожа»

Параметры метода				$\overline{\Delta f}$	Δf_{best}	$\overline{\sigma}_f$	$n_{усп}$
Np	T	s	τ				
30	100	1	1	0,092848	0	0,131947	33
30	100	1	2	0,059833	10^{-6}	0,129252	50
30	100	1	4	0,034315	10^{-6}	0,060489	55
30	100	1	16	0,003236	10^{-6}	0,011756	93



Таблица 6

Сравнение модификации и оригинальной версии. Функция «Западня»

Параметры метода				$\overline{\Delta f}$	Δf_{best}	$\overline{\sigma_f}$	$n_{усп}$
Np	T	s	τ				
10	100	1	1	0,240984	0,001134	0,183174	2
10	100	1	2	0,101525	0	0,128072	22
10	100	1	4	0,029496	0	0,087174	83
10	100	1	16	0,000100	0	$5,362015 \cdot 10^{-5}$	100

Проанализировав данные, полученные в результате выполнения метода, имитирующего поведение стаи мотыльков, установлено, что алгоритм успешно справляется с задачей нахождения глобального экстремума большинства тестовых функций. Даже при задании небольших величин размера популяции, максимального числа итераций и количества возможных положений мотылька на спирали программа находит решение с достаточно высокой точностью.

Установлено, что увеличение параметра τ модификации существенно увеличивает количество успехов по сравнению с оригинальной версией (табл. 5, 6), оригинальной версии соответствует $\tau = 1$.

Наиболее эффективно алгоритм показал себя на примере функций Шаффера, Корневой и параболической функции. При статистическом анализе было получено максимальное число успешных серий из 100 запусков. Следует заметить, что успех

с функцией Шаффера прямо следует из выбора параметра $\varepsilon = \frac{\max_{i=1, \dots, n} |b_i - a_i|}{1000}$; если брать $\varepsilon = \frac{\max_{i=1, \dots, n} |b_i - a_i|}{10000}$, т.е. существенно увеличить требуемую точность решения, то эта функция будет наиболее трудной для оптимизации данным методом (табл. 4). Среди тестовых функций из табл. 4 алгоритм наиболее неудачно работает с функцией «Кожа».

8. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА НЕРАВЕНСТВ

Дана целевая функция

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n),$$

определенная на множестве допустимых решений $D \subseteq R^n$ и удовлетворяющая ограничениям

$$g^1(x) \leq 0, \dots, g^m(x) \leq 0,$$

где $D = \{x | x_i \in [a_i, b_i], i = 1, 2, \dots, n\}$, число m ограничений типа неравенств задано.

Предполагается, что целевая функция и функции, задающие ограничения, непрерывны.

Требуется минимизировать значение целевой функции $f(x)$ с учетом выполнения всех заданных ограничений.

Стратегия поиска решения заключается в переходе от исходной задачи к задаче поиска глобального экстремума вспомогательной функции $F(x_1, \dots, x_n)$, полученной с помощью применения метода внешних штрафов. При этом функция $F(x_1, \dots, x_n)$ принимает вид:

$$F(x, c) = f(x) + \sum_{i=1}^m c_i \cdot [\max\{0, g^i(x)\}]^2 \rightarrow \min_{x \in D},$$

где $c_1, \dots, c_m$ – коэффициенты штрафной функции.

9. ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ НАТЯЖНОЙ/КОМПРЕССИОННОЙ ПРУЖИНЫ

Требуется определить параметры натяжной/ компрессионной пружины, учитывая физические ограничения.

Целью является определение минимальной по весу конструкции пружины, заключающейся в определении вектора параметров $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, соответствующих диаметру проволоки, среднему диаметру витка и числу активных витков. Конструкция пружины должна удовлетворять ограничениям по минимальному отклонению, напряжению сдвига, частоте колебаний и ограничениям на внешний диаметр.

Задача может быть формализована следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_3 + 2) \cdot x_1^2 \cdot x_2, \\ g^1(x) &= 1 - \frac{x_2^3 \cdot x_3}{71875 \cdot x_1^4} \leq 0, \quad g^2(x) = \frac{4 \cdot x_2^2 - x_1 \cdot x_2}{12566 \cdot (x_1^3 \cdot x_2 - x_1^4)} + \frac{2,46}{12566 \cdot x_1^2} - 1 \leq 0, \\ g^3(x) &= 1 - \frac{140,54 \cdot x_1}{x_2^2 \cdot x_3} \leq 0, \quad g^4(x) = \frac{x_1 + x_2}{1,5} - 1 \leq 0, \\ D &= [0,05; 2,0] \times [0,25; 1,3] \times [2,0; 15,0]. \end{aligned}$$

В монографии [7] данная задача решалась с помощью применения нескольких метаэвристических алгоритмов, а также проведено сравнение с решением в первоисточнике [17]. Коэффициенты штрафной функции задавались так: $c_1 = 6$, $c_2 = c_3 = 1$, $c_4 = 0,5$.

Результаты, полученные с помощью применения методов MFO и MMFO при тех же коэффициентах штрафной функции, сравнимы с результатами из [7] и представлены в табл. 7. Параметры применяемых методов: для MFO $Np = 500$, $s = 0,2$, $T = 300$, для MMFO $Np = 500$, $s = 0,2$, $T = 300$, $\tau = 64$.



Таблица 7

Сравнение результатов решения задачи определения параметров натяжной/компрессионной пружины

	Метод, имитирующий поведение стаи мотыльков	Модификация метода, имитирующего поведение стаи мотыльков	Гибридный мультиагентный алгоритм интерполяционного поиска	Метод, имитирующий империалистическую конкуренцию	Решение, полученное в [17]
$f(x^*)$	0,0123870	0,0123868	0,0108	0,0216	0,012665

Указанным в табл. 7 значениям целевой функции соответствуют следующие результаты: $x^* = (0,051, 0,347, 11,719)^T$, $g_1(x^*) = 0,001$, $g_2(x^*) = 0,012$, $g_3(x^*) = -4,098$, $g_4(x^*) = -0,735$ и $x^* = (0,051, 0,354, 11,270)^T$, $g_1(x^*) = 0,001$, $g_2(x^*) = 0,012$, $g_3(x^*) = -4,113$, $g_4(x^*) = -0,730$ для MFO и для MMFO соответственно.

10. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МОБИЛЬНЫМ РОБОТОМ

Математическая модель двухгусеничного мобильного робота описывается системой дифференциальных уравнений [14, 15]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 0,5[u_1(t) + u_2(t)]\cos x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) = 0,5[u_1(t) + u_2(t)]\sin x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = 0,5[u_1(t) - u_2(t)], \end{cases}$$

где $x \in R^3$, $u \in R^2$, $t \in [0, t_f]$. Ограничения на управление: $|u_i| \leq 10, i = 1, 2$. Робот имеет два управления в виде скоростей вращения левой и правой гусениц, поворот осуществляется за счет разности скоростей вращения гусениц. Движение вперед и назад определяется полусуммой управлений, а поворот – полуразностью. Координаты x_1, x_2 задают положение робота на плоскости движения, а x_3 – угол направления.

Начальные условия:

$$x_1(0) = 10, x_2(0) = 10, x_3(0) = 0.$$

Конечные условия:

$$x_{1f} = 0, x_{2f} = 0, x_{3f} = 0.$$

Имеются два фазовых ограничения на плоскости движения робота

$$(x_1 - 2,5)^2 + (x_2 - 2,5)^2 \geq 2,5^2, \quad (x_1 - 7,5)^2 + (x_2 - 7,5)^2 \geq 2,5^2,$$

т.е. две запретные зоны, ограниченные окружностями.

Требуется перевести робота из заданной начальной точки в заданную конечную точку, не нарушая ограничений, за минимальное время.

Для формирования критерия качества в [14] предлагается записать ограничения в форме

$$h_1(x) = 2,5 - \sqrt{(x_1 - 2,5)^2 + (x_2 - 2,5)^2} \leq 0, \quad h_2(x) = 2,5 - \sqrt{(x_1 - 7,5)^2 + (x_2 - 7,5)^2} \leq 0.$$

Тогда функционал представляется в виде

$$I = t_f + \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i(t_f) - x_{if})^2} + \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^2 h_i(x(t)) \cdot 1(h_i(x(t))) dt \rightarrow \min,$$

$$\text{где } t_f = \begin{cases} t, & \text{если } \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i(t) - x_{if})^2} \leq 0,01, \\ 2,5, & \text{иначе,} \end{cases} \quad 1(h_i(x(t))) = \begin{cases} 1, & \text{если } h_i(x(t)) > 0, \\ 0, & \text{если } h_i(x(t)) \leq 0. \end{cases}$$

В [14, 15] для решения поставленной задачи применялась кусочно-линейная аппроксимация закона управления. Здесь для поиска приближенного решения применяется кусочно-постоянное управление. Оно принадлежит классу законов управления с переключениями, что следует из соотношений принципа максимума для данной постановки задачи.

Для реализации более гибкого процесса поиска решения предлагается дополнить функционал весовыми коэффициентами, учитывающими важность каждого из трех слагаемых:

$$I = \lambda_1 t_f + \lambda_2 \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i(t_f) - x_{if})^2} + \lambda_3 \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^2 h_i(x(t)) \cdot 1(h_i(x(t))) dt \rightarrow \min,$$

где $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$ – весовые коэффициенты.

Для уточнения результатов решения поставленной задачи, полученных с помощью применения описанного выше модифицированного метода, имитирующего поведение стаи мотыльков, применялись алгоритмы Luus–Jaakola [18] и перекоммутации [19]. В первом случае полученное на первом этапе решение выбиралось в качестве начального приближения в методе Luus–Jaakola. Во втором случае в результате многократного запуска связки методов из первого случая из найденных решений формируется множество *Pool*. Далее для уточнения полученных решений используется приведенный далее алгоритм перекоммутации (используемые обозначения соответствуют рассматриваемой общей задаче оптимизации).

11. АЛГОРИТМ ПЕРЕКОММУТАЦИИ

Шаг 0. Задать параметры $PR_{\max}, \Delta_{pr}$ – максимальное число итераций и количество точек разбиения.



Шаг 1. Положить $pr = 1$.

Шаг 2. Выбрать три различных случайных решения $x_{pool}^p, x_{pool}^q, x_{pool}^r$ из множества $Pool$.

Шаг 3. Найти решение

$$x_{pool}^{pq} = \arg \min_{j=1, \dots, \Delta_{pr}-1} f(x_{pool}^p + j(x_{pool}^q - x_{pool}^p) / \Delta_{pr}).$$

Шаг 4. Добавить решение

$$x^{new} = \arg \min_{j=1, \dots, \Delta_{pr}-1} f(x_{pool}^{pq} + j(x_{pool}^r - x_{pool}^{pq}) / \Delta_{pr})$$

в множество $Pool$. Положить $pr := pr + 1$.

Шаг 5. Если $pr > PR_{\max}$, то перейти к шагу 6, иначе – к шагу 2.

Шаг 6. Среди решений, принадлежащих множеству $Pool$, выбрать наилучшее.

12. ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА, ИМИТИРУЮЩЕГО ПОВЕДЕНИЕ СТАИ МОТЫЛЬКОВ, ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ МОБИЛЬНЫМ РОБОТОМ

Для решения поставленной задачи разработана программа на основе алгоритма метода, имитирующего поведение стаи мотыльков. Для ее создания использовалась среда разработки Microsoft Visual Studio, язык программирования C#. Характеристики компьютера, на котором проводились вычисления: процессор Intel Core i7–10750H CPU@ 2.60GHz, 6 ядер, RAM:16 Gb.

Поиск управления осуществлялся в классе кусочно-постоянных функций. На основе выполненных экспериментов выбор 25 участков постоянности управлений u_1 и u_2 привёл к наилучшему результату. Для интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей движение робота, применялся численный метод Адамса второго порядка, а для достижения желаемой точности каждый участок управления разбивался на 10 равных частей.

Рассмотрим два варианта задания функционала качества управления.

Вариант 1. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ (слагаемые в функционале имеют одинаковую важность).

Приведены результаты трех способов выбора параметров в реализации последовательного применения модифицированного метода MFO (MMFO), метода случайного поиска с последовательной редукцией области исследования (метода Luus–Jaakola) и метода перекоммутаций (path-relinking).

1. Применялся модифицированный метод MFO с параметрами: $Np = 100$, $Np = 100$, $s = 0.5$, $T = 100$, $\tau = 16$. После многократного применения алгоритма получены результаты, среди которых выбран наилучший $I = 2,50599809962037$ и представлен на рис. 8.

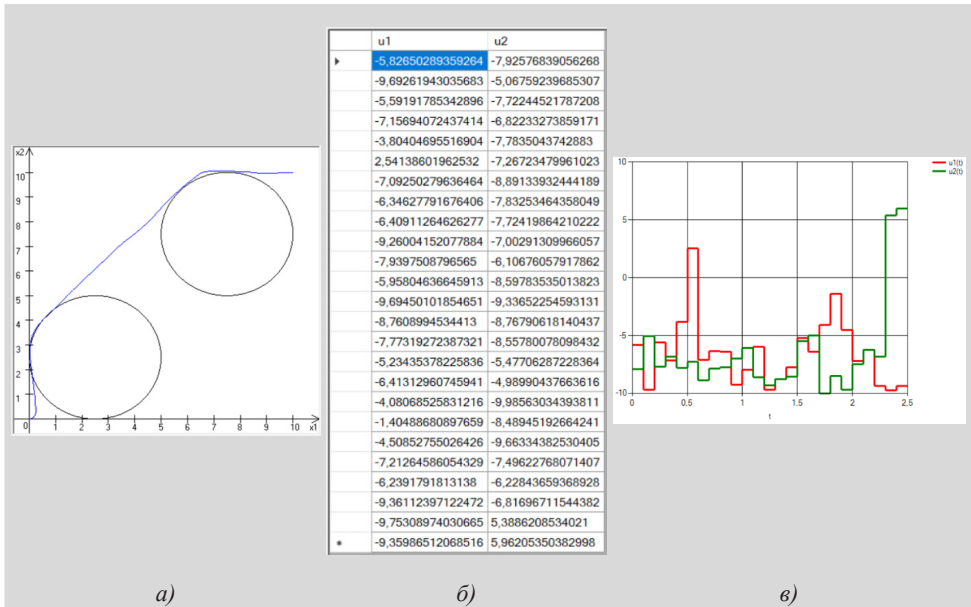


Рис. 8. Вариант 1, № 1; а) траектория движения,
б) программное управление (таблица), в) программное управление (график)

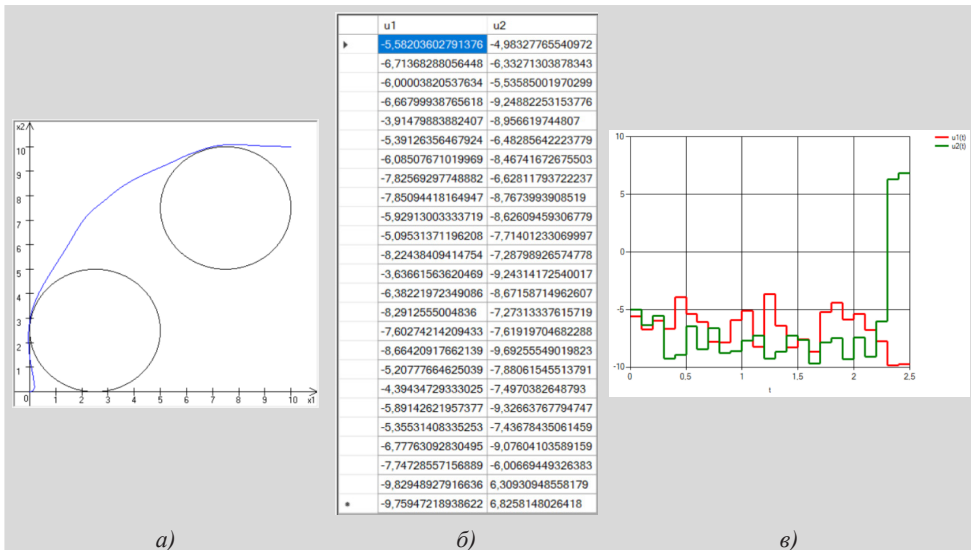


Рис. 9. Вариант 1, № 2; а) траектория движения,
б) программное управление (таблица), в) программное управление (график)



2. Применялся модифицированный метод MFO с параметрами: $Np=100$, $s=0.5$, $T=100$, $\tau=16$, далее метод Luus–Jaakola с параметрами: $R=100$, $\gamma=0.9$, $\eta=0.8$, $P=100$, $ITER=100$, $\varepsilon_1=10^{-10}$, $\varepsilon_2=10^{-10}$, а в качестве начальной точки выбирался результат применения модифицированного MFO. После многократного применения данной связки алгоритмов получены результаты, среди которых выбран наилучший $I = 2,50000000002668$ и представлен на рис. 9.
3. Применялся модифицированный метод MFO с параметрами: $Np=100$, $s=0.5$, $T=100$, $\tau=16$, далее метод Luus–Jaakola с параметрами: $R=300$, $\gamma=0.9$, $\eta=0.8$, $P=300$, $ITER=300$, $\varepsilon_1=10^{-5}$, $\varepsilon_2=10^{-5}$, а в качестве начальной точки выбирался результат применения модифицированного MFO. Из 6 полученных результатов формировалось множество $Pool$, после чего применялся алгоритм перекоммутации на этом множестве с параметрами: $PR_{\max}=5000$, $\Delta_{pr}=50$. После многократного применения данной связки алгоритмов получены результаты, среди которых выбран наилучший $I = 2,45943580840689$ и представлен на рис. 10. Для двух из трех случаев следует отметить небольшое нарушение ограничений в процессе движения, что можно отнести к недостаткам найденных решений.

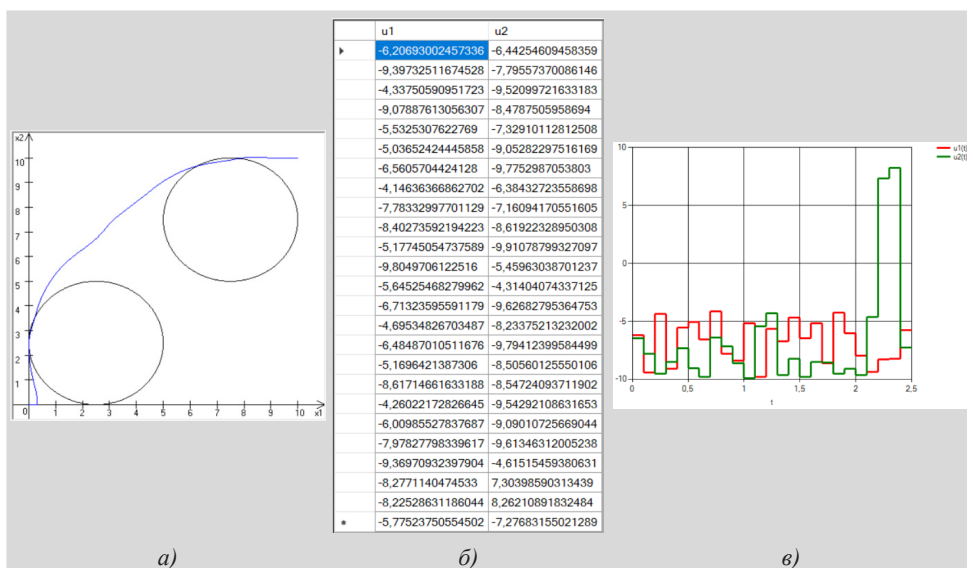


Рис. 10. Вариант 1, № 3; а) траектория движения, б) программное управление (таблица), в) программное управление (график)

Полученные численные результаты: $I = 2,50599809962037$, $I = 2,50000000002668$, $I = 2,45943580840689$ – сравнимы с результатами, полученными в [14, 15]. В своей статье авторы с помощью метаэвристических алгоритмов получили следующие значения функционала, наименьшие среди ранее полученных: пчелиный алгоритм (BA): 2,2404; метод роя частиц (PSO): 2,3777; алгоритм серых волков (GW): 2,4242;

алгоритм летучих мышей (BIA): 2,5138; генетический алгоритм (GA): 2,5054; алгоритм дифференциальной эволюции (DE): 2,9287. Только применение пчелиного алгоритма привело к оптимальной траектории, достигающей конечную точку без нарушения фазовых ограничений. Заметим, что применение связки алгоритмов MMFO и Luus–Jaakola также привело к оптимальной траектории без нарушения фазовых ограничений.

Вариант 2. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 6$ (увеличен штраф за нарушение ограничений). Приведем результаты для трех случаев.

1. Применялся модифицированный метод MFO с параметрами: $Np = 100$, $s = 0.5$, $T = 100$, $\tau = 16$. После многократного применения алгоритма получены результаты, среди которых выбран наилучший $I = 2,50002519885572$ и представлен на рис. 11.
2. Применялся модифицированный метод MFO с параметрами: $Np = 100$, $s = 0.5$, $T = 100$, $\tau = 16$, далее метод Luus–Jaakola с параметрами: $R = 100$, $\gamma = 0.9$, $\eta = 0.8$, $P = 100$, $ITER = 100$, $\varepsilon_1 = 10^{-5}$, $\varepsilon_2 = 10^{-5}$, а в качестве начальной точки выбирался результат применения модифицированного MFO. После многократного применения данной связки алгоритмов получены результаты, среди которых выбран наилучший $I = 2,50000000003196$ и представлен на рис. 12.
3. Применялся модифицированный метод MFO с параметрами: $Np = 100$, $s = 0.5$, $T = 100$, $\tau = 16$, далее метод случайного поиска с последовательной редукцией области исследования с параметрами: $R = 300$, $\gamma = 0.9$, $\eta = 0.8$, $P = 300$, $ITER = 300$, $\varepsilon_1 = 10^{-5}$, $\varepsilon_2 = 10^{-5}$, а в качестве начальной точки выбирался результат применения модифицированного MFO. Из 6 результатов формировалось множество *Pool*. После чего применялся алгоритм перекоммутации на этом множестве с параметрами: $PR_{\max} = 5000$, $\Delta_{pr} = 50$. После многократного применения данной связки алгоритмов получены результаты, среди которых выбран наилучший $I = 2,5$ и представлен на рис. 13.

Анализ полученных результатов свидетельствует о том, что в результате подбора параметров методов удастся добиться выполнения ограничений, попадания в заданную конечную точку с одновременной минимизацией времени, затрачиваемого на маневр.

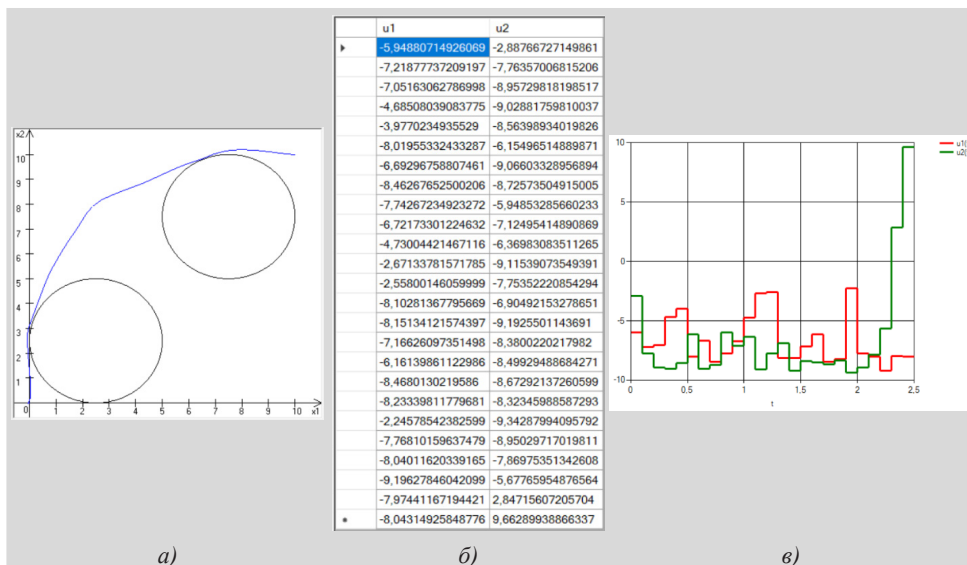


Рис. 11. Вариант 2, № 1; а) траектория движения, б) программное управление (таблица), в) программное управление (график)

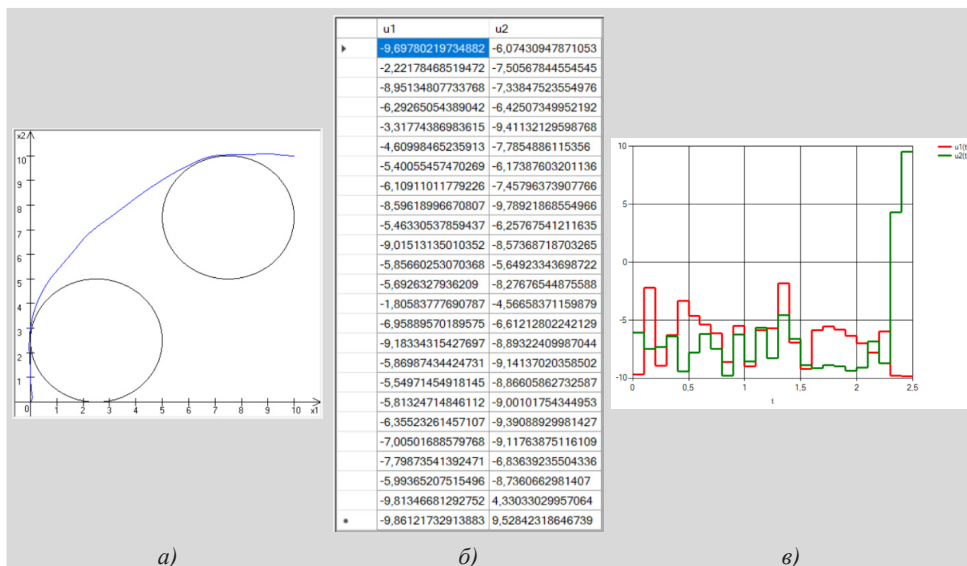


Рис. 12. Вариант 2, № 2; а) траектория движения, б) программное управление (таблица), в) программное управление (график)

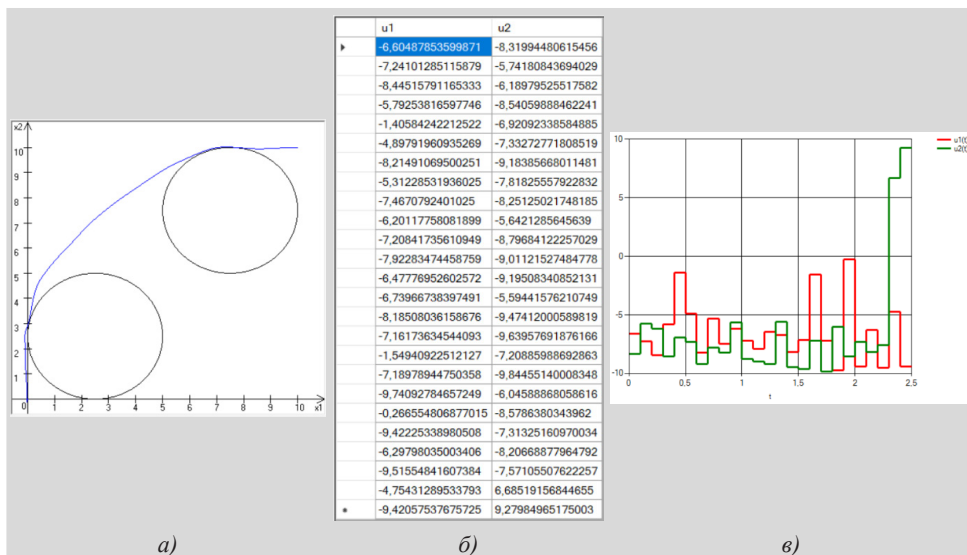


Рис. 13. Вариант 2, № 3; а) траектория движения,
б) программное управление (таблица), в) программное управление (график)

13. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена модификация метода конечномерной оптимизации, имитирующего поведение стаи мотыльков. На основе описанного алгоритма разработана программа для исследования его эффективности. При применении разработанного метода для поиска экстремума тестовых функций из общеизвестного набора, для поиска оптимального программного управления с известным точным решением, а также для определения параметров натяжной/компрессионной пружины с ограничениями типа неравенств получены результаты, позволяющие утверждать об усовершенствовании способности метода находить глобальные экстремумы по сравнению с оригинальной версией.

Для поставленной задачи оптимального программного управления мобильным роботом при наличии препятствий применялся предложенный модифицированный метод в совокупности с методом случайного поиска с последовательной редукцией области исследования и алгоритмом перекоммутации. Для избегания попадания робота в запретные зоны в функционал качества управления добавлены весовые коэффициенты, учитывающие важность вклада отдельных слагаемых, отражающих точность попадания робота в заданную точку, штраф за нарушение ограничений и величину промежутка времени, отведенного для достижения цели. Полученные результаты свидетельствуют о решении поставленной задачи, поскольку мобильный робот добирается из заданной начальной точки в фиксированную конечную точку, огибая запретные зоны с одновременной минимизацией затрачиваемого времени.



Литература

1. Пантелеев А.В. Метаэвристические алгоритмы оптимизации законов управления динамическими системами. М.: Факториал. 2020. 564 с.
2. Handbook of Metaheuristics / Eds M. Gendreau, J-Y. Potvin. N.Y.: Springer. 2019. 610 p.
3. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2021. 448 с.
4. Niculina Dragoi E., Dafinescu V. Review of metaheuristics inspired from the animal kingdom // Mathematics. 2021. Vol. 9. 2335.
5. Tzanetos A., Fister I., Dounias G. A comprehensive database of nature-inspired algorithms // Data in Brief. 2020. Vol. 31. 105792.
6. Bio-inspired computation: Where we stand and what's next / Del Ser J., Osaba E., Molina D., Yang X.-S., Salcedo-Sanz S., Camacho D., Das S., Suganthan P.N., Coello Coello C.A., Herrera F. // Swarm and Evolutionary Computation. 2019. Vol. 48. P. 220–250.
7. Пантелеев А.В., Каранэ М.М.С. Мультиагентные и биоинспирированные методы оптимизации технических систем. М.: Изд-во Доброе слово и Ко. 2024. 336 с.
8. Sergeyev Y.D., Kvasov D.E. Deterministic Global Optimization: An Introduction to the Diagonal Approach. N.Y.: Springer. 2017. 136 p.
9. Sergeyev Y.D., Kvasov D.E., Mukhametzhonov M.S. On the efficiency of nature-inspired metaheuristics in expensive global optimization with limited budget // Scientific Reports. 2018. Vol. 8. P. 453.
10. Mirjalili S. Moth-flame optimization algorithm: A novel nature-inspired heuristic paradigm // Knowledge-Based Systems. 2015. Vol. 89. P. 228–249.
11. A covariance-based Moth–flame optimization algorithm with Cauchy mutation for solving numerical optimization problems / Xiaodong Zhao, Yiming Fang, Le Liu, Miao Xu, Qiang Li. // Applied Soft Computing. 2022. Vol. 119.
12. Wolpert D.H., Macready W.G. No free lunch theorems for optimization // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 1997. Vol. 1. P. 67–82.
13. X.-S. Yang. Test problems in optimization // Engineering Optimization: An Introduction with Metaheuristic Applications (Eds Xin-She Yang). John Wiley & Sons. 2010.
14. Diveev A.I., Konstantinov S.V. Study the practical convergence of evolutionary algorithms for the optimal program control of a wheeled robot // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2018. Vol. 57. No. 4. P. 561–580.
15. Konstantinov S.V., Diveev A.I., Balandina G.I., Baryshnikova A.A. Comparative Research of Random Search Algorithms and Evolutionary Algorithms for the Optimal Control Problem of the Mobile Robot. 13th Intern. Symp. “Intelligent Systems” (INTELS’18). Procedia Computer Science, 150. 2019. P. 462–470.
16. Hoare C.A.R. Algorithm 64: Quicksort // Communications of the ACM. 1961. Vol. 4. P. 321.
17. Golinski J. An adaptive optimization system applied to machine synthesis // Mech. Mash. Theory. 1973. Vol. 8. No. 3. P. 419–436.
18. Luus R. Iterative Dynamic Programming. London: Chapman & Hall/CRC. 2000. 331 p.
19. Glover. F., Marti R., Laguna M. Fundamentals of scatter search and path-relinking // Control & Cybernetics. 2000. Vol. 39. P. 653–684.



Application of the Modified Method Simulating the Behavior of a Flock of Moths to Solve the Optimal Open Loop Control Problem of a Mobile Robot Movement

Andrei V. Pantelev*

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>

e-mail: avpantelev@inbox.ru

Ivan S. Nadorov**

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2085-2987>

e-mail: nnadorovivan@gmail.com

The article proposes a modification of the metaheuristic optimization method simulating the behavior of a swarm of moths, which belongs to the group of bio-inspired methods. A step-by-step algorithm is formed and the efficiency of the modified method is studied on a generally accepted set of test functions of many variables with a complex structure of level surfaces, on the problem of optimal open loop control with a known exact solution, as well as on the problem of determining the parameters of the tension/compression spring with constraints such as inequalities. The advantage of the modified method over the original version is shown. It is demonstrated that the method allows finding solutions of sufficiently good quality in a time acceptable from a practical point of view. A solution to an applied problem of finding the optimal open loop control of a mobile robot on a plane in the presence of obstacles is given. The goal of the control is to achieve a given end point while minimizing the elapsed time and fulfilling the condition of enveloping forbidden areas. To find the control law as a function of time, a piecewise constant approximation was used, which allows reducing the problem to finding a finite number of unknown parameters. The solutions of the terminal problem of speed of response with different structure and parameters of the composite quality functional are considered using the sequential application of the developed modified method simulating the behavior of a swarm of moths, the random search method with sequential reduction of the study area and the path-relinking method. The results of comparison with known solutions are presented.

***Andrei V. Pantelev**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Mathematics and Cybernetics, Institute «Computer Science and Applied Mathematics», Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: avpantelev@inbox.ru

****Ivan S. Nadorov**, Student, «Institute of Computer Science and Applied Mathematics», Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2085-2987>, e-mail: nnadorovivan@gmail.com



Keywords: global optimization, metaheuristic optimization algorithms, optimal open loop control

For citation:

Panteleev A.V., Nadorov I.S. Application of the Modified Method Simulating the Behavior of a Flock of Moths to Solve the Optimal Open Loop Control Problem of a Mobile Robot Movement. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2025. Vol. 15, no. 1, pp. 81–109. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2025150105> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Panteleev A.V. Metaheuristic Algorithms for Optimizing the Laws of Control of Dynamic Systems. Moscow, Faktorial Publ., 2020. 564 p.
2. Handbook of Metaheuristics / Eds M. Gendreau, J-Y. Potvin. N.Y.: Springer, 2019. 610 p.
3. Karpenko A.P. Modern algorithms for search engine optimization. Algorithms inspired by nature. Moscow, Izd-vo MG TU im. N.E. Bauman, 2021. 448 p.
4. Niculina Dragoi E., Dafinescu V. Review of metaheuristics inspired from the animal kingdom. *Mathematics*, 2021. Vol. 9, 2335.
5. Tzanetos A., Fister I., Dounias G. A comprehensive database of nature-inspired algorithms. *Data in Brief*, 2020. Vol. 31, 105792.
6. Bio-inspired computation: Where we stand and what's next / Del Ser J., Osaba E., Molina D., Yang X.-S., Salcedo-Sanz S., Camacho D., Das S., Suganthan P.N., Coello Coello C.A., Herrera F. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2019. Vol. 48, pp. 220–250.
7. Panteleev A.V., Karane M.M.S. Multi-agent and bio-inspired methods for technical systems optimization. M.: Izd-vo Dobroe slovo i Ko, 2024. 336 p.
8. Sergeyev Y.D., Kvasov D.E., Mukhametzhanov M.S. On the efficiency of nature-inspired metaheuristics in expensive global optimization with limited budget. *Scientific Reports*, 2018. Vol. 8, P. 453.
9. Sergeyev Y.D., Kvasov D.E. Deterministic Global Optimization: An Introduction to the Diagonal Approach. Springer, 2017. 136 p.
10. Mirjalili S. Moth-flame optimization algorithm: A novel nature-inspired heuristic paradigm. *Knowledge-Based Systems*, 2015. Vol. 89, pp. 228–249.
11. Xiaodong Zhao, Yiming Fang, Le Liu, Miao Xu, Qiang Li. A covariance-based Moth-flame optimization algorithm with Cauchy mutation for solving numerical optimization problems. *Applied Soft Computing*, 2022. Vol. 119.
12. Wolpert D.H., Macready W.G. No free lunch theorems for optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1997. Vol. 1, pp. 67–82.
13. X.-S. Yang, Test problems in optimization. Engineering Optimization: An Introduction with Metaheuristic Applications (Eds Xin-She Yang), John Wiley & Sons, 2010.
14. Diveev A.I., Konstantinov S.V. Study the practical convergence of evolutionary algorithms for the optimal program control of a wheeled robot. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2018. Vol. 57, no. 4, pp. 561–580.
15. Konstantinov S.V., Diveev A.I., Balandina G.I., Baryshnikova A.A. Comparative Research of Random Search Algorithms and Evolutionary Algorithms for the Optimal Control Problem of the Mobile Robot. 13th Intern. Symp. "Intelligent Systems" (INTELS'18). *Procedia Computer Science*, 150, 2019. pp. 462–470.
16. Hoare C.A.R. Algorithm 64: Quicksort. *Communications of the ACM*, 1961. Vol. 4, P. 321.
17. Golinski J. An adaptive optimization system applied to machine synthesis. *Mech. Mash.Theory*, 1973. Vol. 8, no. 3, pp. 419–436.



18. Luus R. Iterative Dynamic Programming. London, *Chapman & Hall/CRC*, 2000. 331 p.
19. Glover. F., Marti R., Laguna M. Fundamentals of scatter search and path-relinking. *Control & Cybernetics*, 2000. Vol. 39, pp. 653–684.

Получена 19.12.2024

Принята в печать 17.01.2025

Received 19.12.2024

Accepted 17.01.2025

УДК 517.977.55

Априорное оценивание времени быстродействия для линейных дискретных систем с ограниченным управлением на основе аппарата собственных множеств

Гусева С.Р.*

Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4625-7798>
e-mail: son1522@yandex.ru

Ибрагимов Д.Н.**

Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7472-5520>
e-mail: rikk.dan@gmail.com

Рассматривается линейная система с дискретным временем и ограниченным управлением. Предполагается, что матрица системы является невырожденной и диагонализируемой посредством преобразования подобия, а множество допустимых значений управлений представляет собой выпуклый компакт. Для заданной системы изучается задача быстродействия, в частности, требуется построить априорные оценки оптимального значения времени быстродействия как функции от начального состояния и параметров системы, которые не требуют точного построения класса множеств 0-управляемости. Для решения разработан аппарат собственных множеств линейного преобразования, сформулированы и доказаны базовые свойства нетривиальных собственных множеств. Для простейшего случая, когда множество допустимых значений управлений представляет собой нетривиальное собственное множество матрицы системы, функция времени быстродействия для заданного начального состояния построена явно. Для произвольной системы управления предложен метод сведения к простейшему случаю посредством построения внутренней и внешней аппроксимации множества ограничений на управляющие воздействия. Приведены численные расчеты, демонстрирующие эффективность и точность разработанной методики.

Ключевые слова: линейная система, дискретное время, задача быстродействия, оптимальное управление, априорные оценки оптимального значения критериальной функции, собственное множество

Для цитаты:

Гусева С.Р., Ибрагимов Д.Н. Априорное оценивание оптимального времени быстрогодействия для линейных дискретных систем с ограниченным управлением на основе аппарата собственных множеств // Моделирование и анализ данных. 2025. Том 15. № 1. С. 110–132. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2025150106>

***Гусева Софья Романовна**, студент, кафедра «Теория вероятностей и компьютерное моделирование», Московский Авиационный Институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4625-7798>, e-mail: son1522@yandex.ru

****Ибрагимов Данис Наилевич**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Теория вероятностей и компьютерное моделирование», Московский Авиационный Институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7472-5520>, e-mail: rikk.dan@gmail.com

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача быстрогодействия известна достаточно давно как задача оптимального управления с естественным функционалом качества – времени, затрачиваемого системой на достижение некоторого заданного терминального состояния [2, 10, 11]. При рассмотрении систем с непрерывным временем данная задача не обладает какими-либо существенными особенностями, выделяющими ее из общей проблематики теории оптимального управления. Решение, полученное на основе принципа максимума Понтрягина [11], гарантирует релейный характер управления для линейных систем.

В то же время системы с дискретным временем имеют ряд фундаментальных отличий от непрерывных систем при построении оптимального управления [3, 4, 12]. Тогда как в непрерывном случае оптимизационная задача является задачей вариационного исчисления, в дискретном времени она представляет собой задачу выпуклого программирования. Данный факт определяет принципиально иной набор средств для построения оптимальных процессов в дискретном случае. Но, несмотря на то, что посредством дискретного принципа максимума [12, 15] и метода динамического программирования [1] удастся решить большую часть задач теории оптимального управления дискретными системами, для задачи быстрогодействия они оказываются неприменимыми в силу нерегулярности экстремума почти для всех начальных состояний, неединственности оптимальной траектории и дискретного характера критерия качества управления – числа шагов, необходимого для достижения фиксированного терминального состояния из заданного начального [6, 7]. Например, использование известных современных результатов по оптимальному управлению дискретными системами [17, 18, 20, 22] по отношению к задаче быстрогодействия оказывается некорректным.

В связи с этим приобретает актуальность поиск альтернативных подходов для решения поставленной задачи. На данный момент продемонстрировал свою эффективность метод, базирующийся на использовании множеств 0-управляемости – множеств тех начальных состояний, из которых за конечное число шагов можно



перевести систему в начало координат посредством выбора допустимого управления [5, 6, 8, 14]. При этом доказано, что метод решения во многом зависит от ограничений, накладываемых на управление. В случае строго выпуклых ограничений для построения оптимального по быстродействию управления удастся модифицировать известный принцип максимума [6, 7]. Если множество допустимых значений управлений представляет собой многогранник, на основе метода динамического программирования решение исходной задачи может быть сведено к решению ряда задач линейного программирования [5, 8]. Также в [8] описан метод сведения случая произвольных выпуклых ограничений на управление к случаю линейных ограничений за счет проведения полиэдральной аппроксимации множества допустимых значений управления.

Существенным недостатком результатов статей [5, 6, 8] является отсутствие оценок сложности представленных там алгоритмов. Более того, сложность данных методов напрямую зависит от числа множеств 0-управляемости, которые будет необходимо построить для заданного начального состояния, которое совпадает с оптимальным значением критериальной функции в задаче быстрогодействия. Т.е. для вычисления сложности исследуемой задачи необходимо ее решить.

Целью данной статьи является построение оценок времени быстрогодействия в виде функций от начального состояния и параметров системы. Полученное решение базируется на аппроксимации множества допустимых значений управлений собственными множествами матрицы системы – такими множествами, образы которых оказываются конгруэнтными прообразу для заданного линейного преобразования [16, 19]. Успешное проведение аппроксимации позволяет свести задачу построения каждого множества 0-управляемости к вычислению суммы геометрической прогрессии, количество слагаемых в которой и является оценкой времени быстрогодействия.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается линейная стационарная система управления с дискретным временем и геометрическими ограничениями на управление $(A, \mathcal{U})$:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + u(k), \\ x(0) &= x_0, u(k) \in \mathcal{U}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u(k) \in \mathbb{R}^n$ – управляющее воздействие на k -м шаге, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица системы, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – множество допустимых значений управлений. Предполагается, что $\mathcal{U}$ – выпуклый компакт, $0 \in \text{int} \mathcal{U}$, $\det A \neq 0$.

Для системы изучается задача быстрогодействия, т.е. требуется посредством выбора допустимых управляющих воздействий перевести систему из начального состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в начало координат за минимальное число шагов $N_{\min}$:

$$N_{\min} = \min \{ N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \exists u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = 0 \}.$$

Предполагается, что выполнено условие $N_{\min} < \infty$. Вопросы разрешимости задачи быстрогодействия для каждого начального состояния подробно обсуждаются в [14].

Решение данной задачи состоит из двух этапов: вычисление величины $N_{\min}$ и построения оптимального процесса $\{x^*(k-1), u^*(k), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$, удовлетворяющего условию $x^*(N_{\min}) = 0$. В данной работе рассматривается только первый этап.

Известный метод вычисления $N_{\min}$, изложенный в [6, 8], базируется на использовании класса множеств 0-управляемости $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$, где $\mathcal{X}(N) \subset \mathbb{R}^n$ – множество тех начальных состояний, из которых систему можно перевести в начало координат за N шагов посредством выбора допустимого управления:

$$\mathcal{X}(N) = \begin{cases} \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = 0\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Тогда задача вычисления $N_{\min}$ может быть сведена к последовательному построению множеств:

$$N_{\min} = \min \{N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x_0 \in \mathcal{X}(N)\}. \quad (3)$$

Однако такой подход является весьма трудоемкой процедурой, что обусловлено следующим представлением множеств 0-управляемости.

Лемма 1 ([лемма 1; 6]). Пусть последовательность $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется соотношениями, $\det A \neq 0$. Тогда для всех $N \in \mathbb{N}$ верно представление

$$\mathcal{X}(N) = \sum_{k=1}^N A^{-k} \mathcal{U}.$$

Операция сложения множеств по Минковскому зачастую труднореализуема с вычислительной точки зрения. Например, когда $\mathcal{U}$ представляет собой многогранник, а следовательно, каждый $\mathcal{X}(N)$ также является многогранником [следствие 19.3.2; 13], $N_{\min}$ может быть вычислена средствами линейного программирования. На данном свойстве базируется метод вычисления времени быстрогодействия посредством проведения предварительной полиэдральной аппроксимации множества $\mathcal{U}$ [8]. Но описательная сложность (т.е. число вершин) множеств 0-управляемости и, как следствие, размерность соответствующих задач линейного программирования при этом растет экспоненциально по N [теорема 4.1.2; 21].

По этой причине оказывается актуальной задача явного построения зависимости

$$N_{\min} = N_{\min}(x_0; A, \mathcal{U}) \quad (4)$$

либо построения оценок

$$\overline{N_{\min}}(x_0; A, \mathcal{U}) \leq N_{\min} \leq \underline{N_{\min}}(x_0; A, \mathcal{U}). \quad (5)$$



3. СОБСТВЕННЫЕ МНОЖЕСТВА ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Для описания и введем понятие собственного множества линейного оператора A . По определению вектор $h \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ называется собственным вектором квадратной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, соответствующим собственному значению $\lambda \in \mathbb{C}$, если справедливо равенство $Ah = \lambda h$. Обобщим данное определение на случай множеств.

Через $A\mathcal{U}$ для произвольного множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ обозначим образ множества $\mathcal{U}$:

$$A\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{R}^n : x = Au, u \in \mathcal{U}\}.$$

В таком случае можно рассмотреть A в качестве отображения в пространстве компактов $A: \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_n$, где

$$\mathbb{K}_n = \{\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n : \mathcal{X} - \text{компакт}\}.$$

Компакт $\mathcal{U} \in \mathbb{K}_n$ будем называть собственным множеством отображения A , соответствующим собственному значению $\alpha \in \mathbb{R}$, если $\mathcal{U} \neq \{0\}$ и $A\mathcal{U} = \alpha\mathcal{U}$. Фактически определение собственного множества предполагает, что $A\mathcal{U}$ и $\alpha\mathcal{U}$ являются конгруэнтными.

Лемма 2. Пусть $A, S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det S \neq 0$. Тогда множество $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ является собственным по отношению к отображению A , соответствующим собственному значению $\alpha \in \mathbb{R}$, тогда и только тогда, когда $S^{-1}\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ является собственным множеством по отношению к отображению $S^{-1}AS$, соответствующим собственному значению $\alpha \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $S^{-1}\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – собственное множество отображения A , соответствующее собственному значению $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда

$$A\mathcal{U} = \alpha\mathcal{U},$$

$$SS^{-1}ASS^{-1}\mathcal{U} = \alpha\mathcal{U},$$

$$S^{-1}AS \cdot S^{-1}\mathcal{U} = S^{-1}\alpha\mathcal{U} = \alpha S^{-1}\mathcal{U}.$$

Поскольку в силу невырожденности S верно, что $S^{-1}\mathcal{U} \neq \{0\}$ и ограничено, то $S^{-1}\mathcal{U}$ – собственное множество отображения $S^{-1}AS$, соответствующее собственному значению α .

Пусть $S^{-1}\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – собственное множество отображения $S^{-1}AS$, соответствующее собственному значению $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда

$$S^{-1}AS \cdot S^{-1}\mathcal{U} = \alpha S^{-1}\mathcal{U},$$

$$SS^{-1}A\mathcal{U} = S\alpha S^{-1}\mathcal{U},$$

$$A\mathcal{U} = \alpha\mathcal{U}.$$

Поскольку в силу невырожденности S верно, что $\mathcal{U} = S(S^{-1}\mathcal{U}) \neq \{0\}$ и ограничено, то $\mathcal{U}$ – собственное множество отображения A , соответствующее собственному значению α . Лемма 2 доказана.

Требования ограниченности собственных множеств обусловлены тем, что в случае рассмотрения множеств неограниченных возможно, что $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ будет удовлетворять определению собственного множества для непрерывного набора значений α . Т.е. собственное значение для собственного множества может определяться неоднозначно.

Пример 1. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathcal{U}_1 = \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Тогда равенство $A\mathcal{U}_1 = \alpha\mathcal{U}_1$ верно для любого $\alpha \in \mathbb{R}$. С другой стороны, ограниченность собственного множества не гарантирует единственность собственного значения. Пусть $\mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^2$ – симметричное компактное множество. Тогда $A\mathcal{U}_2 = 1 \cdot \mathcal{U}_2 = -1 \cdot \mathcal{U}_2$. Однако далее будет показано, что собственные значения, соответствующие собственным множествам единственны с точностью до знака.

Важным классом множеств, которые рассматриваются на роль собственных, является класс выпуклых тел. Собственное множество $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ преобразования $A: \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_n$ будем называть **нетривиальным**, если $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ является выпуклым телом и $0 \in \text{int}\mathcal{U}$. Интерес представляет поиск именно нетривиальных собственных множеств, которые можно использовать для различных аппроксимаций выпуклых тел.

Лемма 3. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – нетривиальное собственное множество преобразования A , соответствующее собственному значению $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда либо $A = O$ и $\alpha = 0$, либо $\det A \neq 0$ и $\alpha \neq 0$.

Доказательство. Обозначим через $\text{im } A$ и $\ker A$ образ и ядро линейного преобразования $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Поскольку $A\mathcal{U} \subset \text{im } A$, то для $\alpha \neq 0$ верны соотношения

$$n = \dim \alpha\mathcal{U} = \dim A\mathcal{U} \leq \dim \text{im } A \leq n.$$

Тогда $\ker A = \{0\}$, и $\det A \neq 0$.

Для $\alpha = 0$ верны соотношения

$$\begin{aligned} \{0\} &= \alpha\mathcal{U} = A\mathcal{U}, \\ \mathcal{U} &\subset \ker A, \\ n &\geq \dim \ker A \geq \dim \mathcal{U} = n. \end{aligned}$$

Тогда $\ker A = \mathbb{R}^n$ и $A = O$.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ обладает собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ такими, что $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$. Тогда у отображения A не существует нетривиального собственного множества.

Доказательство. Предположим обратное, и $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – нетривиальное собственное множество отображения A , соответствующее собственному значению $\alpha \in \mathbb{R}$. Поскольку λ_1 и λ_2 различные и не комплексно-сопряжённые, то существуют



соответствующие им собственные векторы $h_1, h_2 \in \mathbb{C}^n$. Причём $\operatorname{Re} h_1, \operatorname{Re} h_2 \in \mathbb{R}^n$ линейно независимы. В силу нетривиальности $\mathcal{U}$ найдутся $\beta_1, \beta_2 > 0$ такие, что

$$\tilde{h}_1 = \beta_1 \operatorname{Re} h_1 \in \mathcal{U},$$

$$\tilde{h}_2 = \beta_2 \operatorname{Re} h_2 \in \mathcal{U}.$$

Поскольку матрица A обладает двумя различными собственными значениями, то $A \neq O$. Следовательно, в силу леммы 3 A обратима и $\alpha \neq 0$, что с учётом определения собственного множества приводит для любого $k \in \mathbb{Z}$ к равенствам

$$A^k \mathcal{U} = \alpha^k \mathcal{U},$$

$$\alpha^{-k} A^k \tilde{h}_i \in \mathcal{U}, i \in \{1, 2\}.$$

При этом по построению

$$\begin{aligned} \alpha^{-k} A^k \tilde{h}_i &= \alpha^{-k} A^k \beta_i \operatorname{Re} h_i = |\alpha|^{-k} \beta_i |A^k \operatorname{Re} h_i| = |\alpha|^{-k} \beta_i |\lambda_i|^k \operatorname{Re} h_i = \\ &= |\alpha|^{-k} |\lambda_i|^k \beta_i \operatorname{Re} h_i = |\alpha|^{-k} |\lambda_i|^k \tilde{h}_i. \end{aligned}$$

Поскольку $\mathcal{U}$ ограничено, то для любого $i \in \{1, 2\}$ последовательности $\{|\lambda_i / \alpha|^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ и $\{|\lambda_i / \alpha|^{-k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ также ограничены. Это возможно только в том случае, когда

$$1 = \left| \frac{\lambda_1}{\alpha} \right| = \left| \frac{\lambda_2}{\alpha} \right|,$$

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\alpha|.$$

Получили противоречие. Следовательно, не существует нетривиального собственного множества отображения A .

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ недиагонализируема. Тогда у отображения A не существует нетривиального собственного множества.

Доказательство. Предположим обратное, и $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – нетривиальное собственное множество отображения A , соответствующее собственному значению $\alpha \in \mathbb{R}$. Поскольку матрица A недиагонализируема, то $A \neq O$. Следовательно, в силу леммы 3, A обратима и $\alpha \neq 0$. Согласно лемме 2 допустимо полагать, что A совпадает со своей вещественной жордановой формой, которая в силу недиагонализируемости содержит по крайней мере одну из следующих двух жордановых клеток:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} rA_\varphi & I & \cdots & O & O \\ O & rA_\varphi & \cdots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & \cdots & rA_\varphi & I \\ O & O & \cdots & O & rA_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, r > 0, \varphi \in [0; 2\pi), A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда в силу нетривиальности $\mathcal{U}$ существует $h \in \mathcal{U}$, такой что

$$A^k h \geq \begin{cases} k\lambda^{k-1}h, & k \in \mathbb{N}, \\ k\lambda^{k+1}h, & -k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (6)$$

Для этого достаточно положить все координаты h равными 0, кроме координаты, соответствующей второй строке вещественной жордановой клетки или третьей строке комплексной жордановой клетки.

Также для всех $k \in \mathbb{Z}$ должны быть справедливы соотношения

$$\begin{aligned} A^k \mathcal{U} &= \alpha^k \mathcal{U}, \\ \alpha^{-k} A^k h &\in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Поскольку $\mathcal{U}$ ограничено, то с учётом последовательности $\{|\lambda_i / \alpha|^k k\}_{k \in \mathbb{N}}$ и $\{|\lambda_i / \alpha|^{-k} k\}_{k \in \mathbb{N}}$ должны быть ограничены одновременно, что невозможно. Получили противоречие. Следовательно, не существует нетривиального собственного множества отображения A .

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, отображение A обладает нетривиальным собственным множеством $\mathcal{U}$, соответствующим собственному значению α . Тогда α по модулю совпадает со всем собственными значениями матрицы A .

Доказательство. Равенство всех собственных значений по модулю матрицы A следует из лемм 3 и 4. Их равенство по модулю α также следует из доказательства леммы 4.

Лемма 7. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, отображение A обладает нетривиальным собственным множеством $\mathcal{U}$, соответствующим собственному значению $\alpha \neq 0$. Тогда $\mathcal{U}$ – собственное множество отображения βA , соответствующее собственному числу $\alpha\beta$ для всех $\beta \neq 0$.

Доказательство. Доказательство следует из определения нетривиального собственного множества и леммы 3.

Сформулируем окончательный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ обладает нетривиальным собственным множеством $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, соответствующим собственному значению α .

Тогда либо $A = O$ и любое компактное множество будет собственным, $\alpha = 0$. Либо $\alpha \neq 0$ и выполняются следующие условия:

1. A обратима;
2. A диагонализуема, т.е. обладает n линейно независимыми собственными векторами;



3. все собственные значения матрицы A равны по модулю $|\alpha|$;
4. $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ является нетривиальным собственным множеством A тогда и только тогда, когда $S^{-1}\mathcal{U}$ является нетривиальным собственным множеством Λ , где

$$A = \alpha S \Lambda S^{-1},$$

$$\Lambda = \text{diag} \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n_2}, A_{\varphi_1}, \dots, A_{\varphi_{n_3}} \right), \quad (7)$$

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \varphi \in [0; 2\pi), n_1 + n_2 + 2n_3 = n.$$

Доказательство. Доказательство следует непосредственно из лемм 2–7.

Теорема 1 определяет основные принципы, которыми следует пользоваться при построении нетривиальных собственных множеств для линейного преобразования A . В общем случае данная задача либо не имеет решения, либо может быть сведена к аналогичной для матрицы вида (7).

4. ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ НА ОСНОВЕ АППАРАТА СОБСТВЕННЫХ МНОЖЕСТВ

Если в системе множество $\mathcal{U}$ является собственным множеством отображения A , то в силу леммы 1 построение множества 0-управляемости оказывается тривиальным и сводится к вычислению суммы геометрической прогрессии. Однако, как следует из теоремы 1, такое возможно только тогда, когда все собственные значения A равны по модулю, что является весьма частным случаем. Тем не менее к данному условию можно свести любую систему $(A, \mathcal{U})$ посредством декомпозиции.

Лемма 8. Пусть $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_i, \mathcal{X}_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$, $i = \overline{1, m}$. Тогда

$$\mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m + \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_m = (\mathcal{U}_1 + \mathcal{X}_1) \times \dots \times (\mathcal{U}_m + \mathcal{X}_m).$$

Доказательство. Пусть $u_1, \dots, u_m \in \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m$, $x_1, \dots, x_m \in \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_m$. Т.е. для всех $i = \overline{1, m}$ верны включения $u_i \in \mathcal{U}_i$, $x_i \in \mathcal{X}_i$. Следовательно, $u_i + x_i = \mathcal{U}_i + \mathcal{X}_i$. Тогда

$$u_1 + x_1, \dots, u_m + x_m \in (\mathcal{U}_1 + \mathcal{X}_1) \times \dots \times (\mathcal{U}_m + \mathcal{X}_m),$$

$$\mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m + \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_m \subset (\mathcal{U}_1 + \mathcal{X}_1) \times \dots \times (\mathcal{U}_m + \mathcal{X}_m).$$

Пусть $y_1, \dots, y_m \in (\mathcal{U}_1 + \mathcal{X}_1) \times \dots \times (\mathcal{U}_m + \mathcal{X}_m)$. Т.е. для всех $i = \overline{1, m}$ верны включения $y_i \in \mathcal{U}_i + \mathcal{X}_i$. Следовательно, найдутся $u_i \in \mathcal{U}_i$, $x_i \in \mathcal{X}_i$ такие, что $y_i = u_i + x_i$. Тогда

$$y_1, \dots, y_m = u_1 + x_1, \dots, u_m + x_m =$$

$$u_1, \dots, u_m + x_1, \dots, x_m \in \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m + \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_m.$$

$$(\mathcal{U}_1 + \mathcal{X}_1) \times \dots \times (\mathcal{U}_m + \mathcal{X}_m) \subset \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m + \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_m.$$

Лемма 8 доказана.

Введем функцию $\hat{N}(\cdot, \cdot, \mathcal{U}): \mathbb{R}^n \times (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\hat{N}(x_0, \alpha, \mathcal{U}) = \begin{cases} \mu(x_0, \mathcal{U}), & \alpha = 1, \\ -\frac{\ln(1 - (\alpha - 1)\mu(x_0, \mathcal{U}))}{\ln \alpha}, & \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Здесь предполагается, что $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклый компакт, содержащий 0 в качестве своей внутренней точки, а через $\mu(x, \mathcal{U})$ для $x \in \mathbb{R}^n$ обозначен функционал Минковского [разд. 3.2, Гл. III; 9]:

$$\mu(x, \mathcal{U}) = \inf \{ \alpha > 0 : x \in \alpha \mathcal{U} \}.$$

Также для произвольного $\gamma \in \mathbb{R}$ под $[\gamma]$ будем понимать минимальное целое число не меньшее, чем γ :

$$[\gamma] = \min \{ k \in \mathbb{Z} : \gamma \leq k \}.$$

Получим представление для важного частного случая системы.

Теорема 2. Пусть $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$, $n_1 + \dots + n_m = n$, $\mathcal{U}_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ – нетривиальное собственное множество матрицы $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, соответствующее собственному числу $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1, m}$, справедливы представления

$$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_m) \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m \subset \mathbb{R}^n.$$

Тогда

1. для всех $N \in \mathbb{N}$ верно представление

$$\mathcal{X}(N) = - \left(\sum_{k=1}^N \alpha_1^{-k} \mathcal{U}_1 \right) \times \dots \times \left(\sum_{k=1}^N \alpha_m^{-k} \mathcal{U}_m \right);$$

2. для произвольного $x_0 \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условию $N_{\min} < \infty$, включение $x_0 \in \mathcal{X}(N)$ верно тогда и только тогда, когда

$$N \geq \max_{i=\overline{1, m}} \hat{N}(x_{0,i}, \alpha_i, -\mathcal{U}_i),$$

где $x_{0,i} \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = \overline{1, m}$, $x_0 = (x_{0,1}^T, \dots, x_{0,m}^T)^T$;



3. при этом верно равенство

$$N_{\min} = \left[\max_{i=1, m} \hat{N}(x_{0,i}, \alpha_i, -\mathcal{U}_i) \right].$$

Доказательство. Поскольку для каждого $i = \overline{1, m}$ матрица A_i обладает нетривиальным собственным множеством, соответствующим собственному числу $\alpha_i > 0$, то $\det A_i \neq 0$ согласно теореме 1. Следовательно, $\det A \neq 0$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо представление

$$\begin{aligned} A^{-k} \mathcal{U} &= \text{diag}(A_1^{-k}, \dots, A_m^{-k}) \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m = \\ &= A_1^{-k} \mathcal{U}_1 \times \dots \times A_m^{-k} \mathcal{U}_m = \alpha_1^{-k} \mathcal{U}_1 \times \dots \times \alpha_m^{-k} \mathcal{U}_m. \end{aligned}$$

Отсюда в силу лемм 1 и 8 следует пункт 1 теоремы 2.

Из определения декартова произведения включение $x_0 \in \mathcal{X}(N)$ равносильно тому, что для всех $i = \overline{1, m}$ будет выполнено условие

$$x_{0,i} \in \sum_{k=1}^N \alpha_i^{-k} \mathcal{U}_i,$$

что с учетом определения функционала Минковского эквивалентно неравенствам

$$\begin{aligned} \mu(x_{0,i}, -\mathcal{U}_i) &\leq \sum_{k=1}^N \alpha_i^{-k} = \begin{cases} N, & \alpha_i = 1, \\ \frac{1 - \alpha_i^{-N}}{\alpha_i - 1}, & \alpha_i \neq 1, \end{cases} \\ \begin{cases} N \geq \mu(x_{0,i}, -\mathcal{U}_i), & \alpha_i = 1, \\ 1 - \alpha_i^{-N} \geq (\alpha_i - 1) \mu(x_{0,i}, -\mathcal{U}_i), & \alpha_i > 1, \\ 1 - \alpha_i^{-N} \leq (\alpha_i - 1) \mu(x_{0,i}, -\mathcal{U}_i), & 0 < \alpha_i < 1, \end{cases} \\ N \geq \begin{cases} \mu(x_{0,i}, -\mathcal{U}_i), & \alpha_i = 1, \\ -\frac{\ln(1 - (\alpha_i - 1) \mu(x_{0,i}, -\mathcal{U}_i))}{\ln \alpha_i}, & \alpha_i \neq 1, \end{cases} = \hat{N}(x_{0,i}, \alpha_i, \mathcal{U}_i). \end{aligned}$$

Отсюда следует пункт 2 теоремы 2. А в совокупности с (3) и пункт 3.

Теорема 2 доказана.

Результаты теоремы 2 имеют весьма частный характер. Однако их можно обобщить на случай произвольного выпуклого $\mathcal{U}$ посредством следующей леммы, переходя от равенства к оценкам.

Лемма 9. Пусть справедливо включение $\mathcal{U} \subset \mathcal{U} \subset \bar{\mathcal{U}}$, где $\mathcal{U}, \mathcal{U}, \bar{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклые и компактные множества, содержащие 0, задача быстройдействия для

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ разрешима для систем $(A, \underline{U})$, $(A, \mathcal{U})$, $(A, \bar{U})$, а величины $N_{\min}$, $N_{\min}$, $\overline{N_{\min}}$ – оптимальные значения критерия в задаче быстрогодействия для данных систем соответственно.

Тогда

$$\overline{N_{\min}} \leq N_{\min} \leq \underline{N_{\min}}.$$

Доказательство. Из определения следует, что для любого $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно включение

$$\underline{\mathcal{X}}(N) \subset \mathcal{X}(N) \subset \bar{\mathcal{X}}(N),$$

где $\underline{\mathcal{X}}(N), \mathcal{X}(N), \bar{\mathcal{X}}(N)$ – множества 0-управляемости за N шагов для систем $(A, \underline{U})$, $(A, \mathcal{U})$, $(A, \bar{U})$, соответственно. Тогда доказательство леммы 9 следует непосредственно из представления (3).

Теорема 3. Пусть в системе (1) матрица A диагонализируема, $\det A \neq 0$, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – невырожденная матрица перехода в вещественный жорданов базис A , выбранная так, чтобы для некоторых $\Lambda_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}, \dots, \Lambda_m \in \mathbb{R}^{n_m \times n_m}$ вида (7) и $\alpha_1, \dots, \alpha_m > 0$ было верно представление

$$S^{-1}AS = \Lambda = \text{diag}(\alpha_1 \Lambda_1, \dots, \alpha_m \Lambda_m).$$

Тогда для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условию $N_{\min} < \infty$, справедливы оценки

$$\left[\max_{i=1, m} \hat{N}(y_{0,i}, \alpha_i, -\bar{U}_i) \right] \leq N_{\min} \leq \left[\max_{i=1, m} \hat{N}(y_{0,i}, \alpha_i, -\underline{U}_i) \right],$$

где $S^{-1}x_0 = (y_{0,1}^T, \dots, y_{0,m}^T)^T$, для всех $i = \overline{1, m}$ верно, что $y_{0,i} \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\bar{U}_i$, $\underline{U}_i$ – нетривиальные собственные множества отображения Λ_i , соответствующие собственному числу 1 и удовлетворяющие включению

$$\underline{U}_1 \times \dots \times \underline{U}_m \subset S^{-1}\mathcal{U} \subset \bar{U}_1 \times \dots \times \bar{U}_m.$$

Доказательство. Обозначим через $\{\tilde{\mathcal{X}}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ класс множеств 0-управляемости системы $(\Lambda, S^{-1}\mathcal{U})$. Согласно лемме 1 верно представление

$$\mathcal{X}(N) = S\tilde{\mathcal{X}}(N).$$

Отсюда следует, что включение $x_0 \in \mathcal{X}(N)$ верно тогда и только тогда, когда справедливо условие $S^{-1}x_0 \in \tilde{\mathcal{X}}(N)$. Т.е. с учетом оптимальное значение критерия в задаче быстрогодействия для систем $(A, \mathcal{U})$ и $(\Lambda, S^{-1}\mathcal{U})$ совпадает для начальных состояний x_0 и $S^{-1}x_0$ соответственно.



Для краткости введем обозначения:

$$\underline{\mathcal{U}} = \underline{\mathcal{U}}_1 \times \dots \times \underline{\mathcal{U}}_m, \bar{\mathcal{U}} = \bar{\mathcal{U}}_1 \times \dots \times \bar{\mathcal{U}}_m.$$

В силу пункта 3 теоремы 2 оптимальное значение критерия в задаче быстройдействия $\underline{N}_{\min}$ для системы $(\Lambda, \underline{\mathcal{U}})$ и начального состояния $S^{-1}x_0$ имеет вид

$$\underline{N}_{\min} = \left[\max_{i=1, m} \hat{N}(y_{0,i}, \alpha_i, -\underline{\mathcal{U}}_i) \right].$$

Аналогично, оптимальное значение критерия в задаче быстройдействия $\overline{N}_{\min}$ для системы $(\Lambda, \bar{\mathcal{U}})$ и начального состояния $S^{-1}x_0$ имеет вид

$$\overline{N}_{\min} = \left[\max_{i=1, m} \hat{N}(y_{0,i}, \alpha_i, -\bar{\mathcal{U}}_i) \right].$$

Тогда в силу леммы 9 теорема 3 полностью доказана.

Теорема 3 позволяет получить априорные оценки величины $\underline{N}_{\min}$ для начального состояния x_0 только в случае, когда у матрицы системы A существует n линейно независимых собственных векторов. Данный факт существен, так как в силу леммы 5 у недиагонализированной матрицы не существует нетривиальных собственных множеств.

Вообще говоря из условия $\underline{N}_{\min} < \infty$ для исходной системы $(A, \underline{\mathcal{U}})$ не следует аналогичное условие для вспомогательной системы $(\Lambda, \underline{\mathcal{U}})$, если система не является устойчивой, а предельное множество 0-управляемости ограничено. В этом случае можно положить значение $\underline{N}_{\min}$ равным бесконечности, что сохранит формальную корректность теоремы 3, но сделает полученные оценки менее конструктивными.

Также применение теоремы 3 на практике предполагает знание нетривиальных собственных множеств $\underline{\mathcal{U}}_i, \bar{\mathcal{U}}_i, i = 1, m$. Однако формулировка теоремы не дает конкретных указаний на их вычисление, хотя из леммы 1 и соотношения следует, что лучшая точность оценок будет достигаться при наибольших по включению $\underline{\mathcal{U}}_i$ и наименьших по включению $\bar{\mathcal{U}}_i$. В таком случае, если зафиксировано некоторое нетривиальное собственное множество $\mathcal{U}_i$, то можно на его основе однозначно построить $\bar{\mathcal{U}}_i$ в ходе решения задачи выпуклого программирования:

$$\bar{\mathcal{U}}_i = \mathcal{U}_i \max_{(y_1^T, \dots, y_m^T) \in S^{-1}\mathcal{U}} \mu(y_i, \mathcal{U}_i), i = \overline{1, m}. \quad (8)$$

При этом множества $\underline{\mathcal{U}}_i$, как правило, определяются неоднозначно и их линейные размеры во многом зависят от формы выбранных нетривиальных собственных множеств $\mathcal{U}_i$, что может значительно определять точность результирующей оценки.

5. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ ВРЕМЕНИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Рассмотрим системы вида, полагая фазовое пространство трехмерным: $n = 3$. Матрицу перехода в вещественный жорданов базис и набор начальных состояний для всех примеров положим общими:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, S^{-1}(x_0^1, \dots, x_0^5) = \begin{pmatrix} -76 & -32 & 27 & 99 & 92 \\ -72 & -74 & 8 & 29 & -31 \\ -2 & -4 & 69 & 44 & 67 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Рассмотрим систему $(A_1, \mathcal{U}_1)$:

$$A_1 = S \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} 0.4667 & 0 & 0.0333 \\ 0 & 0.7 & 0 \\ 0.0667 & 0 & 0.4333 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{U}_1 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Данная система удовлетворяет условиям теоремы 3 при $m = 3$, $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0.4$, $\alpha_3 = 0.7$. В этом случае все нетривиальные собственные множества $\underline{\mathcal{U}}_i, \bar{\mathcal{U}}_i$, $i = 1, 3$, согласно теореме 1 являются отрезками. С учетом симметрии множества $\mathcal{U}_1$ данные отрезки следует выбирать симметричными относительно 0. Тогда справедливо представление

$$\underline{\mathcal{U}} = \underline{\mathcal{U}}_1 \times \underline{\mathcal{U}}_2 \times \underline{\mathcal{U}}_3 = [-u'_1; u'_1] \times [-u'_2; u'_2] \times [-u'_3; u'_3],$$

$$\bar{\mathcal{U}} = \bar{\mathcal{U}}_1 \times \bar{\mathcal{U}}_2 \times \bar{\mathcal{U}}_3 = [-u''_1; u''_1] \times [-u''_2; u''_2] \times [-u''_3; u''_3].$$

Значения u''_1, u''_2, u''_3 могут быть вычислены из решения задачи:

$$u''_1 = \frac{2}{3}, u''_2 = \frac{1}{3}, u''_3 = 1.$$

Значения u'_1, u'_2, u'_3 определяют вписанный в $S^{-1}\mathcal{U}_1$ параллелепипед и могут быть определены неединственным образом. В данном примере были выбраны следующие значения:

$$u'_1 = 0.35, u'_2 = 0.18, u'_3 = 0.12.$$

Для любого $x \in \mathbb{R}$ верно представление для функционала Минковского $\mu(x, [-u; u]) = |x|/u$. Отсюда следует, что



$$\hat{N}(y_{0,1}, \alpha_1, [-u''_1; u''_1]) = 1.4427 \ln(1 + 0.75|y_{0,1}|),$$

$$\hat{N}(y_{0,1}, \alpha_1, [-u'_1; u'_1]) = 1.4427 \ln(1 + 1.4286|y_{0,1}|),$$

$$\hat{N}(y_{0,2}, \alpha_2, [-u''_2; u''_2]) = 1.0914 \ln(1 + 0.8|y_{0,2}|),$$

$$\hat{N}(y_{0,2}, \alpha_2, [-u'_2; u'_2]) = 1.0914 \ln(1 + 3.3333|y_{0,2}|),$$

$$\hat{N}(y_{0,3}, \alpha_3, [-u''_3; u''_3]) = 2.8037 \ln(1 + 0.3|y_{0,3}|),$$

$$\hat{N}(y_{0,3}, \alpha_3, [-u'_3; u'_3]) = 2.8037 \ln(1 + 2.5|y_{0,3}|).$$

Тогда на основе теоремы 3 можно получить следующие оценки времени быстрогодействия для системы $(A_1, \mathcal{U}_1)$ для различных начальных состояний:

$$6 \leq N_{\min}(x_0^1, A_1, \mathcal{U}_1) \leq 7, 6 \leq N_{\min}(x_0^2, A_1, \mathcal{U}_1) \leq 7,$$

$$9 \leq N_{\min}(x_0^3, A_1, \mathcal{U}_1) \leq 15, 8 \leq N_{\min}(x_0^4, A_1, \mathcal{U}_1) \leq 14,$$

$$9 \leq N_{\min}(x_0^5, A_1, \mathcal{U}_1) \leq 15.$$

Пример 3. Рассмотрим систему $(A_2, \mathcal{U}_2)$:

$$A_2 = S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 4/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{U}_2 = \{u \in \mathbb{R}^3 : u^T H u \leq 1\}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Данная система удовлетворяет положениям теоремы 3 при $m = 2$, $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0.5$. В этом случае согласно теореме 1 все нетривиальные собственные множества $\mathcal{U}_2, \bar{\mathcal{U}}_2$ являются некоторыми отрезками, а $\mathcal{U}_1, \bar{\mathcal{U}}_1$ – двухмерными симметричными выпуклыми компактами.

Множество $S^{-1}\mathcal{U}_2$ изображено на рис. 1 и является эллипсоидальным множеством, ориентированным вдоль оси третьей координаты:

$$S^{-1}\mathcal{U}_2 = \{u \in \mathbb{R}^3 : u^T H' u \leq 1\}, H' = S^T H S = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 5 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда в качестве нетривиального собственного множества $\bar{\mathcal{U}}_1$ можно выбрать сечение $S^{-1}\mathcal{U}_2$ плоскостью, определяемой условием $u_3 = 0$:

$$S^{-1}\bar{\mathcal{U}}_1 = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : u \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} u \leq 1 \right\}^2, \mu(x, \bar{\mathcal{U}}_1) = \sqrt{4x_1^2 + 10x_1x_2 + 13x_2^2}.$$

Отрезок $\bar{\mathcal{U}}_2 = [-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}]$ определяется из решения задачи.

Аналогично примеру 2 множества $\underline{\mathcal{U}}_1$ и $\underline{\mathcal{U}}_2$ определяются неоднозначно. В данном примере были рассмотрены два варианта:

$$\underline{\mathcal{U}}_1' = \frac{1}{\sqrt{1.1647}}\bar{\mathcal{U}}_1, \underline{\mathcal{U}}_2' = 0.1\bar{\mathcal{U}}_2,$$

$$\underline{\mathcal{U}}_2' = \frac{1}{\sqrt{1.0143}}\bar{\mathcal{U}}_1, \underline{\mathcal{U}}_2' = 0.01\bar{\mathcal{U}}_2.$$

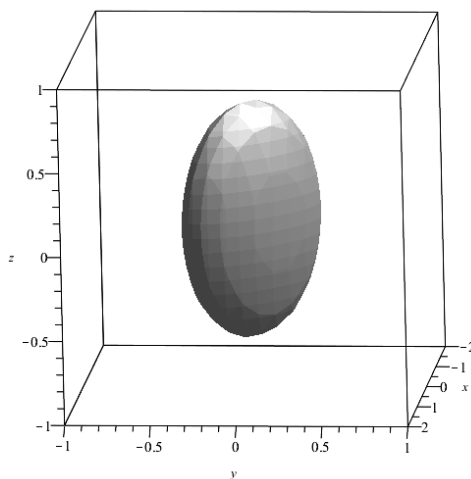
Различные внутренние аппроксимации множества $S^{-1}\mathcal{U}_2$ могут дать различные верхние оценки для $N_{\min}$, из которых следует выбрать наименьшее значение. Так было получено

$$\begin{aligned} \hat{N}(y_{0,1}, y_{0,2}, \alpha_1, -\bar{\mathcal{U}}_1) &= \sqrt{4y_{0,1}^2 + 10y_{0,1}y_{0,2} + 13y_{0,2}^2}, \\ \hat{N}(y_{0,1}, y_{0,2}, \alpha_1, -\underline{\mathcal{U}}_1') &= \sqrt{1.1647(4y_{0,1}^2 + 10y_{0,1}y_{0,2} + 13y_{0,2}^2)}, \\ \hat{N}(y_{0,1}, y_{0,2}, \alpha_1, -\underline{\mathcal{U}}_1') &= \sqrt{1.0143(4y_{0,1}^2 + 10y_{0,1}y_{0,2} + 13y_{0,2}^2)}, \\ \hat{N}(y_{0,3}, \alpha_2, -\bar{\mathcal{U}}_2) &= 1.4427 \ln(1 + 0.7071|y_{0,3}|), \\ \hat{N}(y_{0,3}, \alpha_2, \underline{\mathcal{U}}_1') &= 1.4427 \ln(1 + 7.0711|y_{0,3}|), \\ \hat{N}(y_{0,3}, \alpha_2, \underline{\mathcal{U}}_2') &= 1.4427 \ln(1 + 70.7107|y_{0,3}|). \end{aligned}$$

С учетом теоремы 3 можно получить следующие оценки времени быстрогодействия для системы $(A_2, \mathcal{U}_2)$ для различных начальных состояний:

$$\begin{aligned} 382 &\leq N_{\min}(x_0^1, A_2, \mathcal{U}_2) \leq \min\{412, 384\} = 384, \\ 315 &\leq N_{\min}(x_0^2, A_2, \mathcal{U}_2) \leq \min\{340, 317\} = 317, \\ 77 &\leq N_{\min}(x_0^3, A_2, \mathcal{U}_2) \leq \min\{83, 78\} = 78, \\ 281 &\leq N_{\min}(x_0^4, A_2, \mathcal{U}_2) \leq \min\{304, 283\} = 283, \\ 134 &\leq N_{\min}(x_0^5, A_2, \mathcal{U}_2) \leq \min\{145, 135\} = 135, \end{aligned}$$

Более точные оценки были получены при выборе в качестве внутренней аппроксимации множества $\underline{\mathcal{U}}_1' \times \underline{\mathcal{U}}_2' \subset S^{-1}\mathcal{U}_2$.

Рис. 1. Множество $S^{-1}\mathcal{U}_2$ в примере 3

Пример 3. Рассмотрим систему $(A_3, \mathcal{U}_3)$:

$$A_3 = S \begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.45\sqrt{2} & 0.45\sqrt{2} \\ 0 & -0.45\sqrt{2} & 0.45\sqrt{2} \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} 0.6 + 0.15\sqrt{2} & -0.45\sqrt{2} & 0.3 - 0.15\sqrt{2} \\ 0.15\sqrt{2} & 0.45\sqrt{2} & -0.15\sqrt{2} \\ 0.6 - 0.3\sqrt{2} & 0.9\sqrt{2} & 0.3 + 0.3\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{U}_3 = [-1; 1] \times [-1; 1] \times [-1; 1].$$

Данная система удовлетворяет положениям теоремы 3 при $m=1$, $n_1=3$, $\alpha_1=0.9$. С учетом теоремы 1 искомые нетривиальные собственные множества могут быть выбраны в виде замкнутых трехмерных шаров с центром в 0:

$$\underline{\mathcal{U}} = \mathcal{B}_{R'}(0), \bar{\mathcal{U}} = \mathcal{B}_{R''}(0), \mu(x, \mathcal{B}_R(0)) = \frac{x}{R}.$$

Значения $R'=0.4472$, $R''=0.7071$ определены численно. Тогда имеют место соотношения

$$\hat{N}(y_0, \alpha_1, -\bar{\mathcal{U}}) = 9.4912 \ln(1 + 0.0707 y_0),$$

$$\hat{N}(y_0, \alpha_1, -\underline{\mathcal{U}}) = 9.4912 \ln(1 + 0.2236 y_0).$$

Графически данные зависимости от y_0 изображены на рис. 2.

С учетом теоремы 3 можно получить следующие оценки времени быстрогодействия для системы $(A_3, \mathcal{U}_3)$ для различных начальных состояний:

$$\begin{aligned} 21 \leq N_{\min}(x_0^1, A_3, \mathcal{U}_3) \leq 31, 19 \leq N_{\min}(x_0^2, A_3, \mathcal{U}_3) \leq 28, \\ 18 \leq N_{\min}(x_0^3, A_3, \mathcal{U}_3) \leq 28, 21 \leq N_{\min}(x_0^4, A_3, \mathcal{U}_3) \leq 31, \\ 22 \leq N_{\min}(x_0^5, A_3, \mathcal{U}_3) \leq 32. \end{aligned}$$

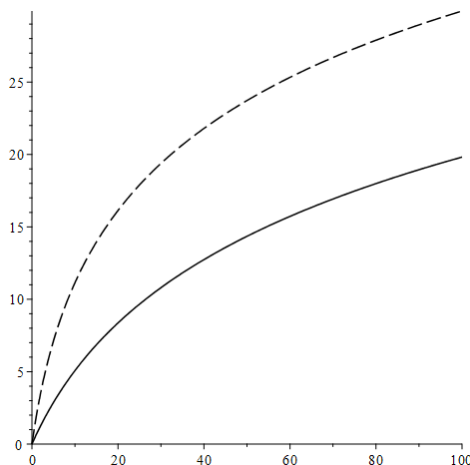


Рис. 2. Зависимости $\hat{N}(y_0, \alpha_1, -\bar{U})$ (сплошная линия) и $\hat{N}(y_0, \alpha_1, -U)$ (пунктирная линия) от y_0 в примере 4

Из примеров следует, что точность оценок существенно зависит от выбора нетривиальных собственных множеств в теореме 3. Причем неоднозначность выбора внутренней аппроксимации также может быть использована для уточнения верхней оценки $N_{\min}$, как это было продемонстрировано в примере 3.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрена задача быстрогодействия для стационарной линейной дискретной системы с ограниченным управлением. В частности, разработан метод априорного оценивания оптимального времени быстрогодействия. Для решения поставленной задачи построен аппарат собственных множеств линейного отображения. Доказано, что нетривиальные собственные множества существует только для диагонализируемых матриц, у которых все собственные значения равны по модулю. Также удается свести задачу построения такого множества к аналогичной задаче для вещественной жордановой формы исходной матрицы.

Полученные в разделе 4 оценки времени быстрогодействия базируется на приведении матрицы системы к ее вещественной жордановой форме. Это позволяет провести декомпозицию исходной системы так, чтобы в каждой подсистеме матрица обладала равными по модулю собственными значениями, а следовательно, и нетривиальными



собственными множествами. Данные множества могут быть использованы для построения внутренних и внешних аппроксимаций исходных ограничений на управление, что позволит получить искомые оценки времени быстрогодействия.

Установлено, что точность полученных методов зависит от большого числа параметров: от собственных значений и устойчивости системы, от формы выбранных для аппроксимации нетривиальных собственных множеств, от начального состояния и выбора внутренней аппроксимации. Варьируя различные параметры, можно добиться более качественных оценок. Дальнейшего изучения требуют методы, позволяющие определить оптимальный набор параметров.

Литература

1. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИИЛ, 1960.
2. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.
3. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.
4. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их приложения в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
5. Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н. О задаче оптимального быстрогодействия для линейной дискретной системы с ограниченным скалярным управлением на основе множеств 0-управляемости // *АиТ*. 2015. № 9. С. 3–30. DOI: 10.1134/S0005117915090015
6. Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н. О задаче быстрогодействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем и ограниченным управлением // *АиТ*. 2017. № 10. С. 3–32. DOI: 10.1134/S0005117917100010
7. Ибрагимов Д.Н. О задаче быстрогодействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // *АиТ*. 2019. № 3. С. 3–25. DOI: 10.1134/S0005117919030019
8. Ибрагимов Д.Н., Новожилкин Н.М., Порцева Е.Ю. О достаточных условиях оптимальности гарантирующего управления в задаче быстрогодействия для линейной нестационарной дискретной системы с ограниченным управлением // *АиТ*. 2021. № 12. С. 48–72. DOI: 10.31857/S0005231021120047.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012.
10. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.
11. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Б.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
12. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973.
13. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
14. Сиротин А.Н., Формальский А.М. Достижимость и управляемость дискретных систем при ограниченных по величине и импульсу управляющих воздействиях // *АиТ*. 2003. № 12. С. 17–32.
15. Holtzman J.M., Halkin H. Directional convexity and the maximum principle for discrete systems // *J. SIAM Control*. V. 4. No. 2. 1966. P. 263–275. DOI: 10.1137/0304023
16. Johnson C.R. Eigenset Generalizations of the Eigenvalue Concept // *Journal of research of the National Bureau of Standards*. V. 82. No. 2. P. 1977. 133–136. DOI: 10.6028/jres.082.013
17. Kurzhanskiy A., Varaiya P. Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis of Discrete-Time Linear Systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2007. V. 52. No.1. P. 26–38. DOI: 10.1109/TAC.2006.887900



18. *Lin X. Zhang W.* A maximum principle for optimal control of discrete-time stochastic Systems with multiplicative noise // IEEE Trans. Automatic Control. V. 60. No. 4. 2015. P. 1121–1126. DOI: 10.1109/TAC.2014.2345243
19. *Murota K.* Eigensets and power products of a bimatroid // Advances in Mathematics. V. 80. No. 1. 1990. P. 78–91. DOI: 10.1016/0001-8708(90)90015-F
20. *Wang G., Yu Z.* A Pontryagin's maximum principle for non-zero sum differential games of BSDEs with applications // IEEE Trans. Autom. Control. V. 55. No. 7. 2010. P. 1742–1754.
21. *Weibel C.* Minkowski sums of polytopes: combinatorics and computation. Suisse: EPFL, 2007.
22. *Wu Z.* A general maximum principle for optimal control of forward-backward stochastic systems // Automatica. V. 49. No. 5. 2013. P. 1473–1480.



A Priori Estimation of the Minimal Stabilization Time for Linear Discrete-Time Systems with Bounded Control Based on the Apparatus of Eigensets

Sofya R. Guseva*

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI)

Moscow, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4625-7798>

e-mail: son1522@yandex.ru

Danis N. Ibragimov**

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI)

Moscow, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7472-5520>

e-mail: rikk.dan@gmail.com

A linear system with discrete time and bounded control is considered. It is assumed that the system matrix is non-singular and diagonalizable, and the set of admissible control values is convex and compact. For a given system, the time-optimization problem is studied. In particular, it is required to construct a priori estimates of the optimal value of the minimal time as a function of the initial state and system parameters that do not require an exact construction of the class of null-controllable sets. To solve the problem, an apparatus of eigensets of a linear transformation is developed, and basic properties of non-trivial eigensets are formulated and proven. For the simplest case, when the set of admissible control values is a non-trivial eigenset of the system matrix, the response time function for a given initial state is constructed explicitly. For an arbitrary control system, a method is proposed for reducing to the simplest case by constructing internal and external approximations of a set of constraints on control values. Numerical calculations are presented demonstrating the efficiency and accuracy of the developed technique.

Keywords: linear system, discrete time, time-optimization problem, optimal control, a priori estimates of the optimal value of the objective function, eigenset

For citation:

Guseva S.R., Ibragimov D.N. A Priori Estimation of the Minimal Stabilization Time for Linear Discrete-Time Systems with Bounded Control Based on the Apparatus of Eigensets. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2025. Vol. 15, no. 1, pp. 110–132. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2025150106> (In Russ., abstr. in Engl.).

***Sofya R. Guseva**, Student, Department of Probability Theory and Computer Modeling, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4625-7798>, e-mail: son1522@yandex.ru

****Danis N. Ibragimov**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Probability Theory and Computer Modeling, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7472-5520>, e-mail: rikk.dan@gmail.com

References

1. Bellman R. Dinamicheskoye programmirovaniye [Dynamic programming]. Moskva: IIL=Moscow: IIL., 1960. (In Russ.).
2. Boltyanskij V.G. Matematicheskie metody optimal'nogo upravleniya [Mathematical methods of optimal control]. Moskva: Nauka=Moscow: The science. 1969. (In Russ.).
3. Boltyanskij V.G. Optimal'noe upravlenie diskretnymi sistemami [Optimal control of discrete systems]. Moskva: Nauka=Moscow: The science. 1973. (In Russ.).
4. Evtushenko Yu.G. Metody resheniya ekstremal'nykh zadach i ih prilozheniya v sistemakh optimizatsii [Methods for solving extreme problems and their applications in optimization systems]. Moskva: Nauka=Moscow: The science. 1982. (In Russ.).
5. Ibragimov D.N., Sirotin A.N. On the Problem of Optimal Speed for the Discrete Linear System with Bounded Scalar Control on the Basis of 0-controllability Sets // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 9. P. 1517–1540. DOI: 10.1134/S0005117919030019
6. Ibragimov D.N., Sirotin A.N. On the Problem of Operation Speed for the Class of Linear Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 10. P. 1731–1756. DOI: 10.1134/S0005117917100010
7. Ibragimov D.N. On the Optimal Speed Problem for the Class of Linear Autonomous Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control and Degenerate Operator // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 3. P. 393–412. DOI: 10.1134/S0005117919030019.
8. Ibragimov D.N., Novozhilin N.M., Portseva E.Yu. On Sufficient Optimality Conditions for a Guaranteed Control in the Speed Problem for a Linear Time-Varying Discrete-Time System with Bounded Control // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 12. P. 2076–2096. DOI: 10.31857/S0005231021120047
9. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis]. Moskva: Nauka = Moscow: The science, 1981. (In Russ.)
10. Moiseev N.N. Elementy teorii optimal'nykh sistem [Elements of the theory of optimal systems]. Moskva: Nauka=Moscow: The science., 1975. (In Russ.).
11. Pontryagin L.S., Boltyanskij V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko B.F. Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov [Mathematical theory of optimal processes]. Moskva: Nauka=Moscow: The science., 1969. (In Russ.).
12. Propoi A.I. Elementy teorii optimal'nykh diskretnykh protsessov [Elements of the theory of optimal discrete processes]. Moskva: Nauka=Moscow: The science. 1973. (In Russ.).
13. Rokafellar R. Vypuklyy analiz [Convex Analysis] Moskva: Mir=Moscow: Mir, 1973.
14. Sirotin A.N., Formal'skii A.M. Reachability and Controllability of Discrete-Time Systems under Control Actions Bounded in Magnitude and Norm // Autom. Remote Control. 2003. V. 64. No. 12. P. 1844–1857. DOI: 10.1023/B: AURC.0000008423.93495.be
15. Holtzman J.M., Halkin H. Directional convexity and the maximum principle for discrete systems // J. SIAM Control. V. 4. No. 2. 1966. P. 263–275. DOI: 10.1137/0304023
16. Johnson C.R. Eigenset Generalizations of the Eigenvalue Concept // Journal of research of the National Bureau of Standards. V. 82. No. 2. P. 1977. 133–136. DOI: 10.6028/jres.082.013



17. Kurzanskiy A., Varaiya P. Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis of Discrete-Time Linear Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2007. V. 52. No.1. P. 26–38. DOI: 10.1109/TAC.2006.887900
18. Lin X. Zhang W. A maximum principle for optimal control of discrete-time stochastic Systems with multiplicative noise // IEEE Trans. Automatic Control. V. 60. No. 4. 2015. P. 1121–1126. DOI: 10.1109/TAC.2014.2345243
19. Murota K. Eigensets and power products of a bimatroid // Advances in Mathematics. V. 80. No. 1. 1990. P. 78–91. DOI: 10.1016/0001-8708(90)90015-F
20. Wang G., Yu Z. A Pontryagin's maximum principle for non-zero sum differential games of BSDEs with applications // IEEE Trans. Autom. Control. V. 55. No. 7. 2010. P. 1742–1754.
21. Weibel C. Minkowski sums of polytopes: combinatorics and computation. Suisse: EPFL, 2007.
22. Wu Z. A general maximum principle for optimal control of forward-backward stochastic systems // Automatica. V. 49. No. 5. 2013. P. 1473–1480.

Получена 13.01.2025

Принята в печать 17.01.2025

Received 13.01.2025

Accepted 17.01.2025

◇◇ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ◇◇

УДК 004.942

Экспертная оценка для формирования стохастических матриц поведения экипажа воздушного судна

Орищенко В.А.*

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-6696-5147>
e-mail: vitalyorischenko@gmail.com

В статье рассматривается методология экспертной оценки при формировании математической имитационной модели деятельности экипажа воздушного судна. Подход позволяет преобразовать целевой вектор времени нахождения в состояниях марковской цепи для более достоверной оптимизации матрицы вероятностей переходов. В подходе учитывается информация об относительной сложности и времени прохождения каждого из этапов ситуации согласно руководству по летной эксплуатации.

Ключевые слова: имитационное моделирование, модель пилота, марковские цепи, экспертная оценка

Для цитаты:

Орищенко В.А. Экспертная оценка для формирования стохастических матриц поведения экипажа воздушного судна // Моделирование и анализ данных. 2025. Том 15. № 1. С. 133–144. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2025150107>

*Орищенко Виталий Алексеевич, студент, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-6696-5147>, e-mail: vitalyorischenko@gmail.com

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ЭКИПАЖА НА БОРТУ ВОЗДУШНОГО СУДНА

При проектировании кабины экипажа воздушного судна гражданской авиации инженеры уделяют особое внимание компоновке информационно-управляющего поля (ИУП). Грамотное позиционирование и компоновка органов управления



является одним из ключевых факторов для принятия правильных решений и осуществлению действий пилотов, особенно при возникновении серьезных внештатных ситуаций, требующих незамедлительного и верного решения. Для эффективной компоновки ИУП необходимо большое количество данных о реальных полетах, известных авиакатастрофах, вовлечение достаточного количества опытных пилотов с достаточным налетом на воздушных судах такого типа. Не всегда это является возможным, что может быть причиной временных задержек в проектировании или в недостаточно качественном результате.

Одним из вариантов решения подобной задачи является создание математических и прикладных инструментов, которые могут заменить использование реальных данных. Создание «виртуального пилота» может существенно улучшить процесс проектирования воздушного судна не только в рамках компоновки ИУП, но и в других инженерных задачах, например, создание вспомогательных авиационных систем корректировки воздействия на органы управления и др. Также «виртуальный пилот» может быть эффективен в вопросе создания авиационных тренажеров, формированию дополнительных программ подготовки экипажа.

В рамках предыдущей работы была разработана математическая модель и сопутствующее программное обеспечение для имитационного моделирования поведения экипажа при пилотировании воздушного судна [1]. Данное решение позволяет эффективно и с приемлемыми временными затратами оценивать действия экипажа при возникновении штатных и внештатных ситуаций на борту воздушного судна согласно сценариям из руководства по летной эксплуатации (РЛЭ).

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПИЛОТА

Основой математической модели деятельности пилотов является Марковский процесс с дискретным временем и дискретным состоянием (Марковская цепь). Этот выбор обусловлен относительной простотой восприятия связи работы полученной модели с реальными действиями на борту, небольшим количеством требуемых данных для имитационного моделирования, а также несущественными требованиями к вычислительным ресурсам.

Каждая штатная или внештатная ситуация на борту представляется в виде сценария, в котором каждое целевое действие, согласно РЛЭ, представляет собой уровень (кластер). Нахождение на уровне N в сценарии подразумевает, что на данный момент у экипажа воздушного судна стоит задача в выполнении действия N из РЛЭ в рамках текущей штатной/внештатной ситуации. Для каждого сценария формируется своя Марковская цепь со своей матрицей вероятностей переходов (МВП) на основании вводных данных в модель.

Для каждого кластера состояний имеется три возможных состояния в цепи (Рис. 1). Состояния $S_1 \dots S_n$ обозначают целевые действия, предписанные к выполнению согласно РЛЭ. Переход из состояния S_k в $S(k+1)$ обозначает безошибочное выполнение действий экипажем.

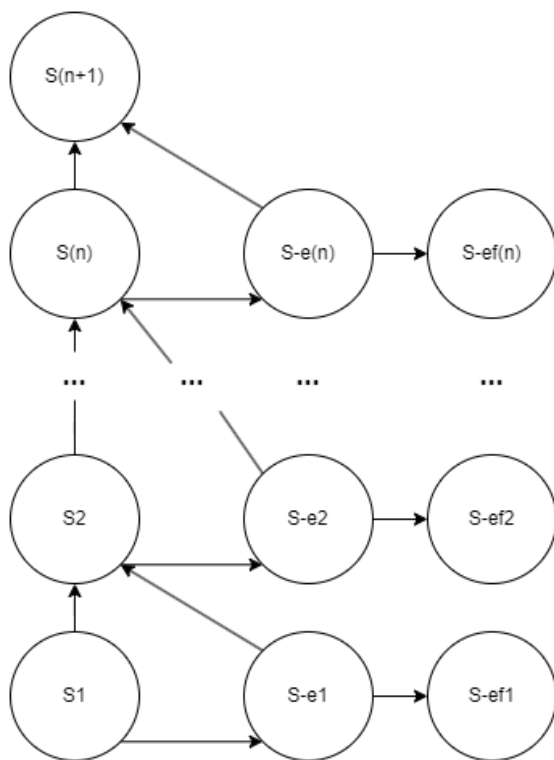


Рис. 1. Модель Марковской цепи поведения пилотов для сценария с n шагами

Состояния $S-e1 \dots S-en$ обозначают промежуточные ошибочные состояния, при которых требуемые сценарием действия не были выполнены корректно и экипаж допустил ошибку, либо сильно приближается к провалу действия в соответствии с ограничениями по времени. В реальном мире при совершении ошибки пилоты обычно имеют возможность исправить ситуацию, соответственно, имеется возможность перехода из состояния $S-en$ в состояние $S(n+1)$.

Состояния $S-ef1 \dots S-efn$ обозначают конечные ошибочные состояния, при которых считается, что экипаж не выполнил корректно сценарий и допустил ошибку в кластере N . При попадании в одно из таких состояний завершается инициализация модели.

Переход между кластерами может осуществляться только вперед, движений назад не предусмотрено. Если экипаж перешел из кластера K в $K+1$, то это обозначает, что действие K было выполнено успешно, пилоту необходимо теперь выполнить действие $K+1$.

В соответствии с указанной логикой работы Марковской цепи, матрица вероятностей переходов имеет размерность $(3N+1) \times (3N+1)$. Ключевым моментом в эффективном имитационном моделировании полученной Марковской цепи является формирование матрицы вероятностей переходов.



3. ПРОЦЕСС ФОРМИРОВАНИЯ МАТРИЦ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПЕРЕХОДОВ ДЛЯ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ

Матрица вероятностей переходов формируется путем итерационной оптимизации исходной стохастической матрицы к целевому вектору распределения времени нахождения в каждом состоянии. Именно от целевого вектора зависит итоговая МВП, которая и определяет качество поведения полученной модели.

Исходная матрица формируется в зависимости от количества шагов в сценарии, в ней сразу отражены возможные переходы и конечные состояния цепи (с вероятностями переходов $P \in (0,1)$ и $P = 1$, соответственно).

Целевой вектор распределения формируется в зависимости от сложности выполнения каждого из шага сценария, а также частоты ошибок для каждого кластера. Вектор нахождения в каждом состоянии формирует эксперт (подробнее в главе 4). После изменения вектора в соответствии со сложностью выполнения каждого из действий он корректируется в соответствии с уровнем подготовки пилота, который получается с помощью предобученной нейронной сети на основании возраста, общего налета в часах, налета в часах на данном типе воздушного судна. В зависимости от коэффициента опытности пилота происходит вычисление целевого коэффициента пропорции суммы первой части вектора ко второй (нахождению в состояниях благоприятных и неблагоприятных состояниях):

$$C = 0.5 + 0.2 \times Q,$$

где Q – коэффициент опытности пилота, C – коэффициент пропорции времени нахождения в положительных состояниях.

4. ЭКСПЕРТНАЯ ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ И ВРЕМЕНИ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНКРЕТНЫХ ЭТАПОВ СЦЕНАРИЕВ РЛЭ

Так как на итоговую МВП наибольшее влияние имеет целевой вектор распределения, то качество его формирования и определяет итоговое поведение пилота. В соответствии с этим от экспертной оценки зависит итоговое качество имитационного моделирования.

Для проведения достоверных и информативных исследований поведения экипажа эксперту необходимо обладать достаточным опытом в пилотировании воздушным судном (возможно в рамках полетов на авиационных тренажерах), включая знания обо всех значимых органах управления, работе информационных и управляющих системах на борту, поведении воздушного судна в разных условиях эксплуатации (включая внештатные). Также немаловажным фактором является понимание о психофизиологическом состоянии пилотов в разных состояниях и этапах полета, а также о взаимодействии экипажа друг с другом и о внешней коммуникации

с диспетчерским центром. Указанные навыки и знания позволят эксперту с высокой долей достоверности определять сложность выполнения конкретных действий в рамках сценариев РЛЭ.

При необходимости моделирования нескольких сценариев оценка должна быть проведена для каждого из сценариев отдельно, предпочтительно, если она будет проведена одним экспертом для одного полета. Полученный набор исходных данных для моделирования в рамках нескольких сценариев может быть использован для имитации конкретных фрагментов полета, которые в совокупности могут отражать результат моделирования целого полета.

Основными входными данными оценки являются:

- Массив оценок сложности выполнения каждого из шага рассматриваемого сценария;
- Время, которое необходимо пилоту среднего уровня подготовки в нормальном состоянии, для завершения всего сценария;
- Массив соотношения среднего времени нахождения в каждом из кластеров;
- Ограничение по времени выполнению сценария (если оно имеется).

В рамках массива с оценками сложности каждого шага принимается массив из N элементов (для сценария с N шагами). Каждый элемент массива обозначает оценку сложности по шкале от 1 до 100, где 1 обозначает отсутствие всяких трудностей, а 100 – наиболее сложный шаг в сценарии (рис. 2). С помощью данной оценки можно классифицировать шаги в сценариях на 4 группы (легкие <25 баллов, умеренной сложности 25–50 баллов, сложные 50–75 баллов, очень сложные 75–100 баллов). При оценке рядовых и штатных ситуаций сложности будут находиться преимущественно в первых двух по сложности секциям шкалы. Для внештатных случаев, особенно для ситуаций, сопряженных с попаданием в сложные пространственные положения, требующих немедленного принятия решений, оценки будут находиться преимущественно в правой части шкалы. Таким образом получается массив из «сырых» баллов по сложности.

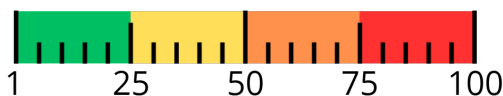


Рис. 2. Шкала «сырой» оценки сложности

Элементы данного массива нормируются, на выходе получается массив с коэффициентами сложности, сумма всех элементов которого равна 1.

На основании заданного среднего времени формируется отношение времени нахождения в конечном успешном состоянии цепи к сумме времен нахождения во всех остальных состояниях. По умолчанию в модели указано значение для сценария с N -шагами равное $7N$ секунд, то есть, время нахождения в каждом кластере



в среднем составляет около 7 секунд. Для более быстрых и, наоборот, тяжелых, значения могут сильно варьироваться, все зависит от экспертной оценки.

Формирование массива среднего времени для каждого из кластеров Марковской цепи происходит по аналогии с оценкой сложности – в формате оценки 100 бальной шкалы, где 1 – минимальное время, 100 – максимальное время. Далее массив нормируется аналогичным образом до суммы элементов массива, равной 1.

Первоначальный вектор для сценария с N-шагами в первую очередь преобразуется в соответствии со средним временем выполнения сценария по заданной экспертом информации. После этого вектор, который имеет одинаковое конечное распределение между кластерами (кроме состояния успешного выполнения всего сценария), преобразовывается в соответствии с нормированным массивом весов сложности каждого шага сценария.

Преобразование происходит путем обработки сначала соотношения между распределением времени внутри одного кластера между положительными, промежуточными и отрицательными состояниями (в соответствии с заданной оценкой сложности выполнения действий), а затем соотношением времени нахождения между кластерами (в соответствии с заданной оценкой длительности действий на этом кластере).

После всех итераций получается итоговый целевой вектор распределения, с помощью которого и происходит итерационная оптимизация матрицы вероятностей переходов [1], которая в таком формате будет учитывать информацию о сложности выполнения отдельных фрагментов, о длительности относительно друг друга, а также об общем времени выполнения сценария.

Стоит отметить, что в силу ограничений, связанных с отсутствием приемлемого количества эмпирически данных, итоговые коэффициенты корректировки целевого вектора распределения времени нахождения в состояниях могут быть изменены. Это требует большего количества экспериментов в реальных прикладных задачах.

5. ПРИМЕРЫ КОРРЕКТИРОВКИ СЦЕНАРИЕВ В СООТВЕТСТВИИ С ИХ СЛОЖНОСТЬЮ

В рамках имитационного моделирования рассмотрим сценарий с отказом одного из двигателей. В рамках данного сценария представлено 3 требуемых действия, соответственно, модель марковской цепи состоит из 4 кластеров.

Требуемые шаги в соответствии с руководством по летной эксплуатации (РЛЭ):

- Перевод РУД L (R) в положение IDLE
- Перевод переключателя L (R) RUN-OFF в состояние OFF
- Принятие решения о продолжении полета

Если рассматривать каждый шаг отдельно, становится очевидным, что первые два действия не являются сложными к выполнению, так как являются рядовыми и не требуют серьезной подготовки. Ключевым моментом будет выявление неисправности, координация верного порядка действий согласно РЛЭ. Учитывая указанные обстоятельства, а также то, что возникновение данного сценария является внештатной

ситуацией, хоть и первые два действия имеют примерно одинаковую сложность, но для перевода РУД неисправного двигателя стоит задать сложность выше.

Так как по методологии имитационной модели мы учитываем состояния строго согласно РЛЭ, предшествующие действия не могут напрямую формировать кластеры состояний. Поэтому для внештатных ситуаций необходимо закладывать сложность всех подготовительных процессов (обнаружение внештатной ситуации на борту, поиск необходимого алгоритма действий в РЛЭ, координацию движений между экипажем воздушного судна) в сложность выполнения первого целевого действия. В случае со сценариями, предусмотренными штатными ситуациями, не требуется существенно закладывать сложность подготовительного этапа в первый кластер, однако, это всегда возможно и остается на решении эксперта, оценивающего сценарий.

Если говорить про шаг сценария, связанный с принятием корректного решения о продолжении полета, очевидно, что это действие является более сложным и важным, так как требует всесторонней оценки текущего состояния воздушного судна, этапа полета, показателей остальных авиационных систем, а также достаточной опытности в пилотировании воздушного судна, в том числе при возникновении внештатных ситуаций. Исходя из этого можно с уверенностью говорить, что сложность выполнения данного действия существенно выше, чем для предыдущих двух действий.

В рамках рассматриваемого сценария можно сформировать следующий массив оценок сложности: $D = [40, 10, 50]$.

С точки зрения выполняемого времени можно предположить, что данный сценарий для пилота среднего уровня подготовки будет выполнен примерно за $t = 25$ с (при базовом среднем уровне выполнения сценария с 3 шагами, равном 21 секунде). Ограничение по времени для данного сценария может быть установлено в размере 50 секунд.

Массив среднего распределения нахождения в каждом целевом шаге может быть следующим: $T = [50, 15, 70]$, так как для первого шага необходимо выполнить ряд подготовительных действий, а третий шаг является сложным с точки зрения принятия верного решения.

К примеру, исходный вектор распределения:

$$[0.20, 0.20, 0.20, 7.00, 0.10, 0.10, 0.10, 0.80, 0.80, 1.40]$$

после осуществления всех итераций приобретает следующий вид:

$$[0.27, 0.08, 0.38, 5.88, 0.27, 0.07, 0.38, 0.49, 0.16, 0.67]$$

Матрица вероятностей переходов (рис. 3) для полученного вектора распределений выглядит следующим образом (серым выделены переходы, вероятности которых равно 0, либо 1, которые не изменяются в процессе оптимизации матрицы).

Рассмотрим в качестве примера другой сценарий, связанный с отказом автоматической коррекции механизации крыла. Данный сценарий требует выполнения 4 целевых действий, марковская цепь будет состоять из 5 кластеров.



Список рассматриваемых действий:

- Переход на ручное управление
- Определение исправного ADS
- Ручной контроль эксплуатационных ограничений
- Посадка воздушного судна

	S1	S2	S3	S4	Se1	Se2	Se3	Sef1	Sef2	Sef3
S1	0,92	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
S2	0,01	0,03	0,00	0,00	0,12	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
S3	0,00	0,96	0,95	0,00	0,00	0,99	0,00	0,00	0,00	0,00
S4	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,02	0,00	0,00	0,00
Se1	0,07	0,00	0,00	0,00	0,88	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Se2	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
Se3	0,00	0,00	0,05	0,00	0,00	0,00	0,97	0,00	0,00	0,00
Sef1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00
Sef2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00
Sef3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00

Рис. 3. МВП для сценария с отказом двигателя

В контексте текущего сценария начальное состояние также предполагает определенную предварительную подготовку, соответственно, это стоит учитывать в формировании сложности первого кластера. Однако в отличие от предыдущего сценария, в случае с отказом механизации нет односложных действий, которые экипаж выполняет на постоянной основе на борту. Сам по себе переход на ручное управления существенно сложнее, чем перевод ручки управления двигателем, так как предполагает постоянное управляющее воздействие на воздушное судно, а также непрерывную и качественную координацию действий экипажем.

Определение исправного ADS представляет собой более простое действие, но все же требующее определенной умственной нагрузки.

Ручной контроль эксплуатационных ограничений является сложной задачей, особенно в стрессовых условиях экипажа, тем более что контроль ограничений будет осуществляться до окончания полета.

Конечным действием является посадка воздушного судна. Сам процесс посадки является непростым и требует значимых усилий. Все это особенно усложняется техническими ограничениями, связанными с отказом механизации крыла, а также необходимостью полного ручного управления. Поэтому можно сделать вывод, что посадка в контексте рассматриваемой ситуации будет наиболее сложным действием, даже в сравнении со сценарием посадки в штатном режиме. Именно поэтому и необходимо оценивать каждый сценарий отдельно, учитывая контекст возникающей ситуации.

Учитывая все вышесказанное, можно сформировать следующий массив оценок сложностей для сценария с отказом механизации: $D = [50, 40, 70, 100]$.



С точки зрения среднего времени выполнения сложно достоверно оценить конкретную ситуацию, так как есть множество влияющих на это факторов, например, высота воздушного судна в момент принятия решения об аварийной посадке, наличие возможных аэродромов поблизости. В соответствии с этими ограничениями будем имитировать процесс посадки в контексте выполнения всех необходимых для этого действий, не дожидаясь окончания приземления. Пусть весь сценарий в среднем будет занимать 90 секунд.

Массив распределения времен в каждом из шагов можно задать следующим образом: $T = [20, 10, 25, 95]$. Так как оценка времен нахождения в каждом из шагов проводится относительно других кластеров, нужно учитывать это в формировании оценки.

Ограничение по времени в рамках данного сценария задавать не будем, потому что из-за предполагаемой длительности фактическое время инициализации имитационной модели может сильно варьироваться от целевого.

На основании указанных значений оценок начальный вектор распределения следующего вида:

[0.20, 0.20, 0.20, 0.20, 7.00, 0.10, 0.10, 0.10, 0.10, 0.80, 0.80, 0.80, 1.40]

после преобразований приобретает следующий вид:

[0.35, 0.17, 0.44, 1.55, 2.18, 0.35, 0.17, 0.44, 1.55, 0.08, 0.04, 0.08, 0.57]

После процесса оптимизации получается следующая матрица вероятностей переходов (рис. 4).

	S1	S2	S3	S4	S5	Se1	Se2	Se3	Se4	Sef1	Sef2	Sef3	Sef4
S1	0,77	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
S2	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,38	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
S3	0,00	0,99	0,93	0,00	0,00	0,00	0,99	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
S4	0,00	0,00	0,00	0,97	0,00	0,00	0,00	0,13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
S5	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00
Se1	0,19	0,00	0,00	0,00	0,00	0,61	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Se2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Se3	0,00	0,00	0,06	0,00	0,00	0,00	0,00	0,87	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Se4	0,00	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,97	0,00	0,00	0,00	0,00
Sef1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00
Sef2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00
Sef3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00
Sef4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	1,00

Рис. 4. МВП для сценария с отказом механизации крыла.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках разработки математической модели и сопутствующего программного обеспечения для моделирования поведения экипажа воздушного судна был



доработан механизм оценки каждого сценария с учетом влияния относительной сложности каждого шага сценария, общего времени выполнения сценария, а также относительному времени нахождения на каждом из кластеров.

Полученная методология позволяет более качественно и достоверно подходить к процессу предварительной подготовки отдельных фрагментов (сценариев) полета, что безусловно увеличит качество работы итоговой модели поведения. На основании экспертной оценки корректируется каждый шаг рассматриваемого сценария с учетом сложности и времени. Стоит отметить, что определяющим фактором качества модели является квалификация и уровень опыта оценивающего эксперта.

При наличии большего количества достоверных эмпирических данных возможно уточнение коэффициентов преобразования целевого массива распределений времен нахождения в состояниях.

Литература

1. Орищенко В.А., Грешников И.И. Моделирование деятельности экипажей при пилотировании воздушных судов. Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 1. С. 89–102. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140106>
2. Lancaster P., Tismenetsky M. The Theory of Matrices: With Applications. Elsevier, 1985. 570 pp.
3. Wilkinson J.H. The Algebraic Eigenvalue Problem (Clarendon Press, Oxford, 1988).
4. Cramer H. Mathematical Methods of Statistics. Princeton University Press, 1999. 575 pp.
5. Куравский Л.С., Козырев А.Д., Грешников И.И. Математическая модель сопутствующей деятельности пилота и ее применение для объективной оценки его состояния и профессиональной подготовки // Экспериментальная психология. – 2024. – Т. 17. – № 1. – С. 161–180.
6. Амосов Г.Г. «О марковских возмущениях группы унитарных операторов, ассоциированной со случайным процессом со стационарными приращениями», Теория вероятности и ее применение, 49:1 (2004), 145–155; Theory Probab. Appl., 49:1 (2005), 123–132
7. Грешников И.И., Куравский Л.С., Юрьев Г.А. Принципы построения программно-аппаратного комплекса для интеллектуальной поддержки экипажа и оценки уровня его подготовки // Моделирование и анализ данных. 2021. Том 11. № 2. С. 5–30. DOI: [10.17759/mda.2021110201](https://doi.org/10.17759/mda.2021110201)
8. Parlett B.N. The Symmetric Eigenvalue Problem. Prentice-Hall, 1980. 348 pp.
9. Куравский Л.С., Юрьев Г.А., Златомрежев В.И., Юрьева Н.Е. Оценка действий экипажа воздушного судна на основе модели рисков человеческого фактора // Экспериментальная психология. 2020. Том 13. № 2. С. 153–181. DOI: [10.17759/exrpsy.2020130211](https://doi.org/10.17759/exrpsy.2020130211)
10. Марковские модели в задачах диагностики и прогнозирования: Учеб. пособие. / Под ред. Л.С. Куравского. – 2-е изд., доп. – М.: Изд-во МГППУ, 2017. – 203 с.: ил. – ISBN 978-5-94051-168-7.
11. Amosov G.G. On Markovian Cocycle Perturbations in Classical and Quantum Probability. Int. J. Math. & Math. Sci., 2003 (54), 3443–3467 (2003).
12. Куравский Л.С., Юрьев Г.А. Марковские модели адаптивного тестирования // Моделирование и анализ данных. 2011. Том 1. № 1. С. 28–40.
13. Kuravsky L.S. et al. A Mathematical Model for Representing the Related Operator Professional Activities and Their Diagnostic Assessments Based on the Quantum Representations // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – Т. 45. – № 6. – С. 2534–2551.

Expert Assessment for the Formation of Stochastic Matrices of Aircrew Behavior

Vitaly A. Orishchenko*

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-6696-5147>

e-mail: vitalyorishchenko@gmail.com

The article presents a methodology for expert evaluation in the development of a mathematical simulation model of aircrew operations. The proposed approach enables the transformation of the target time vector representing sojourn times in the states of a Markov chain, thereby improving the accuracy of transition probability matrix optimization. The methodology accounts for the relative complexity and duration of each phase of the operational scenario, as defined in the flight operations manual.

Keywords: simulation modeling, aircrew activity model, Markov chains, expert evaluation

For citation:

Orishchenko V.A. Expert Assessment for the Formation of Stochastic Matrices of Aircrew Behavior. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2025. Vol. 15, no. 1, pp. 133–144. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2025150107> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Orishchenko V.A., Greshnikov I.I. Modelling of Pilot Activities when Piloting Aircraft. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 1, pp. 89–102. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140106> (In Russ., abstr. in Engl.).
2. Lancaster P., *Tismenetsky M.* The Theory of Matrices: With Applications. Elsevier, 1985. 570 p.
3. Wilkinson J.H., The Algebraic Eigenvalue Problem (Clarendon Press, Oxford, 1988).
4. Cramer H., Mathematical Methods of Statistics. Princeton University Press, 1999. 575 pp.
5. Kuravsky L.S., Kozyrev A.D., Greshnikov I.I. Mathematical Model of the Pilot Associated Activities and Its Application for Objective Professional Training and Condition Assessment *Experimental Psychology (Russia)*, 2024, vol. 17, no. 1
6. Amosov G.G., «On Markovian Perturbations of the Group of Unitary Operators Associated with a Stochastic Process with Stationary Increments,» *Theory Prob. Appl.* 49, 123–132 (2005).
7. Greshnikov I.I., Kuravsky L.S., Yuryev G.A. (2021). Principles of constructing a software and hardware complex for intellectual support of the crew and assessment of its training level. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 11(2), 5–30. <https://doi.org/10.17759/mda.2021110201> (In Russ.)

***Vitaly A. Orishchenko**, Student, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-6696-5147>, e-mail: vitalyorishchenko@gmail.com



8. Parlett B.N., The Symmetric Eigenvalue Problem. Prentice-Hall, 1980. 348 pp.
9. Kuravsky L.S., Yuryev G.A., Zlatomrezhev V.I., Yuryeva N.E. Assessing the Aircraft Crew Actions with the Aid of a Human Factor Risk Model. Eksperimental'nayapsikhologiya = Experimental Psychology (Russia), 2020. Vol. 13, No. 2, pp. 153–181. DOI: <https://doi.org/10.17759/exppsy.2020130211>.
10. Markovskie modeli v zadachakh diagnostiki i prognozirovaniya: Ucheb. posobie / Pod red. L.S. Kuravskogo. – 2-e izd., dop. – M.: Izd-vo MGPPU, 2017. – 197 p.
11. G.G. Amosov. On Markovian Cocycle Perturbations in Classical and Quantum Probability. Int. J. Math. & Math. Sci., 2003 (54), 3443–3467 (2003).
12. Kuravsky L.S., Yuriev G.A. Adaptive testing as a Markovian process: models and their identification. – Neurocomputers: Development and Application, No. 2, 2011, pp. 21–29 (in Russian).
13. Kuravsky L.S. et al. A Mathematical Model for Representing the Related Operator Professional Activities and Their Diagnostic Assessments Based on the Quantum Representations // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – T. 45. – № . 6. – С. 2534–2551.

Получена 19.02.2025

Received 19.02.2025

Принята в печать 03.03.2025

Accepted 03.03.2025

УДК 519.856

Формирование доверительного множества поглощения в задаче прогнозирования скорости ветра

Склезнева К.А. *

Московский Авиационный Институт

(национальный исследовательский университет) (МАИ)

г. Москва, Российская Федерация

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2003-2743>

e-mail: xenia.sklezneva@gmail.com

Соболь В.Р. **

Московский Авиационный Институт

(национальный исследовательский университет) (МАИ)

г. Москва, Российская Федерация

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7472-5520>

e-mail: vitsobol@mail.ru

В статье исследуется задача определения множества допустимых прогнозных векторов скоростей ветра, измеренных перед вылетом самолета, при которых скорость ветра к моменту посадки окажется в допустимых пределах с вероятностью не меньше заданной. Отклонения направления и модуля скорости ветра от прогнозных полагаются случайными. Рассматривается случай, когда в аэропорту назначения есть две взлетно-посадочные полосы, расположенные под углом друг к другу. Задача сведена к задаче определения линии уровня для функции вероятности специального вида. Предложен численный алгоритм построения аппроксимации линии уровня. Приведены численные примеры, демонстрирующие зависимость формы искомого множества от параметров задачи.

Ключевые слова: доверительное множество поглощения, функция вероятности, гладкая аппроксимация функции вероятности, изокванта функции вероятности

Для цитаты:

Склезнева К.А., Соболь В.Р. Формирование доверительного множества поглощения в задаче прогнозирования скорости ветра // Моделирование и анализ данных. 2025. Том 15. № 1. С. 145–167. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2025150108>



***Склезнева Ксения Андреевна**, студент, кафедра «Теория вероятностей и компьютерное моделирование», Московский Авиационный Институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2003-2743>, e-mail: xenia.sklezneva@gmail.com

****Соболев Виталий Романович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Теория вероятностей и компьютерное моделирование», Московский Авиационный Институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7472-5520>, e-mail: vitsobol@mail.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Важной прикладной областью задач стохастического программирования является обеспечение безопасности полетов [1, 2]. Это связано с тем, что ключевые факторы неопределенности – погодные условия и надежность компонент – успешно описываются и моделируются с помощью аппарата теории вероятностей. Хорошо изученные примеры таких задач [2] – задача минимизации площади взлетно-посадочной полосы при ограничении на вероятность успешной посадки и задача определения множества допустимых скоростей ветра в пункте назначения, измеренных до начала полета, при которых с вероятностью не меньше заданной условия для посадки будут благоприятны. Для обеих указанных задач сперва были получены приближенные (гарантирующие) решения с помощью доверительного метода [2], также известного как обобщенный минимаксный подход [3]. Позднее были получены также приближенные, но более точные решения с применением гладкой аппроксимации функции вероятности и градиентных методов оптимизации [4]. Для второй задачи также был предложен способ решения, основанный на алгоритме построения доверительного множества поглощения [5, 6]. Остановимся на второй задаче подробнее.

Представим, что из пункта A вылетает самолет и через некоторое время t прибывает в пункт B . Прямо перед вылетом измеряются скорость и направление ветра, продольная и боковая составляющие скорости ветра в аэропорту прилета B и строится прогноз скорости и направления ветра к моменту прилета. При подлете на основе фактической скорости и направления ветра принимается решение выдавать ли разрешение на посадку. Для каждого типа воздушного судна существуют свои предельно допустимые скорости попутного, встречного и бокового ветра, при которых допускается посадка. Эти величины могут зависеть от материала и состояния взлетно-посадочной полосы, режима работы тормозной системы и других параметров, но во всех вариантах предельно допустимые скорости являются фиксированными для конкретного типа воздушного судна. Если самолет получил разрешение на взлет, но условия для посадки в итоге признаются небезопасными, то самолет может быть перенаправлен на запасной аэродром или будет вынужден ожидать разрешения на посадку в воздухе, что приводит к дополнительным расходам для авиакомпании. Следовательно, разрешение на взлет при высокой вероятности реализации такого сценария скорее всего является нецелесообразным. С другой стороны, если разрешение на взлет будет даваться только при крайне низкой вероятности неблагоприятного

сценария, то это может приводить к задержкам вылетов, что также влечет дополнительные расходы. Таким образом, возникает необходимость определения множества допустимых прогнозных/фактических скоростей ветра до вылета, при которых разрешение на посадку будет дано с достаточно высокой вероятностью. Определение множества начальных условий, при которых выполняется вероятностное ограничение на конечное состояние системы, является примером задачи построения доверительного множества поглощения [6].

Если направление скорости ветра близко или совпадает с направлением взлетно-посадочной полосы (ВПП), то разрешение на посадку может быть дано при достаточно высоких абсолютных значениях скорости ветра. Отклонение самолета от расчетной точки касания будет компенсироваться запасом длины ВПП. При этом максимально допустимые величины попутного и встречного ветра могут отличаться. В то же время, боковой ветер оказывает более существенное влияние как в силу меньшего запаса ВПП по ширине, так и в силу влияния на способность выдерживать требуемый курс (возникает вращательный момент). В силу вышесказанного, можно ожидать, что искомое множество допустимых скоростей ветра имеет эллипсообразную форму, симметричную относительно направления ВПП. Это подтверждается ранее полученными результатами [2, 4, 5].

Более сложным случаем является тот, когда в аэропорту назначения есть две ВПП, расположенные под углом друг к другу. В этом случае, в зависимости от направления и скорости ветра может быть выбрана более подходящая полоса. Например, пересекающиеся ВПП можно увидеть в аэропорту имени Бредли (Коннектикут), в аэропортах Огасти в Джорджии, Лас-Вегаса, Нью-Йорка, Де-Мойна и в ряде других. В аэропортах Шереметьево и Домодедово г. Москвы ВПП параллельны друг другу, но, например, в аэропорту Гумрак г. Волгограда новая и старая ВПП расположены под углом. Без ограничения общности будем считать, что точка пересечения совпадает с расчетной точкой посадки. В данной статье предлагается алгоритм определения множества векторов скорости ветра, гарантирующих безопасную посадку с заданным уровнем доверительной вероятности. Как будет показано в расчетных примерах, конфигурация и свойства получаемого множества существенно зависят от параметров задачи. В частности, множество допустимых скоростей ветра может быть невыпуклым, в отличие от случая с одной полосой. Работа является продолжением исследования в [4] и использует подход, основанный на построении линии уровня для функции вероятности специального вида. Задача определения линии уровня сводится к решению дифференциального уравнения специального вида, а для расчета производных функции вероятности используется ее гладкая аппроксимация [7]. Стоит отметить, что в [2] предполагалось, что перед вылетом измеряются текущие скорость и направление ветра, а фактические величины к моменту посадки моделировались через случайные отклонения от соответствующих величин в момент вылета. Такое предположение игнорирует использование метеорологических прогнозов. Более адекватным представляется использование прогнозных величин для принятия решения и их случайные отклонения для моделирования фактических величин.



2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Пусть начало координат совпадает с расчетной точкой касания ВПП при посадке и находится на пересечении полос. Пусть Ox направлена вдоль полосы 1, Oy – поперек. Полоса 2 расположена под углом γ к полосе 1.

Пусть v и β – прогнозные модуль скорости и угол направления ветра относительно Ox в аэропорту города B , зафиксированные перед вылетом. Пусть w_{x1}^0, w_{y1}^0 – случайные продольная и боковая компоненты скорости ветра для полосы 1, w_{x2}^0, w_{y2}^0 – для второй полосы соответственно. Выразим их в полярных координатах:

$$w_{x1}^0 = v \cos \beta, \quad (1)$$

$$w_{y1}^0 = v \sin \beta, \quad (2)$$

$$w_{x2}^0 = v \cos(\gamma - \beta), \quad (3)$$

$$w_{y2}^0 = v \sin(\gamma - \beta). \quad (4)$$

Пусть ξ и ε – случайные отклонения вектора скорости по абсолютной величине и по направлению за время полета относительно прогнозных параметров в момент вылета. Предполагается, что случайные величины ξ и ε независимы и имеют нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями, равными σ_ξ^2 и σ_ε^2 соответственно.

Свяжем прогнозные и реализовавшиеся компоненты вектора скорости ветра через случайные отклонения:

$$w_{x1} = (v + \xi) \cos(\beta + \varepsilon), \quad (5)$$

$$w_{y1} = (v + \xi) \sin(\beta + \varepsilon), \quad (6)$$

$$w_{x2} = (v + \xi) \cos(\gamma - \beta - \varepsilon), \quad (7)$$

$$w_{y2} = (v + \xi) \sin(\gamma - \beta - \varepsilon). \quad (8)$$

Введем события: A_1 – условия для посадки на полосу 1 безопасны к моменту прибытия самолета, A_2 – аналогично для полосы 2. Тогда получим вероятности событий A_1 и A_2 через условия того, что фактические компоненты скорости ветра не превысят установленных границ:

$$P(A_1) = P(w_{xmin} \leq w_{x1} \leq w_{xmax}; w_{ymax}^2 - w_{y1}^2 \geq 0), \quad (9)$$

$$P(A_2) = P(w_{xmin} \leq w_{x2} \leq w_{xmax}; w_{ymax}^2 - w_{y2}^2 \geq 0), \quad (10)$$

где w_{xmax} и w_{xmin} – максимальная и минимальная допустимые скорости для встречного и попутного ветра, w_{ymax} – максимально допустимая скорость поперечного ветра.

Вероятность того, что самолет получит разрешение на посадку на одну из полос, определяется как вероятность суммы зависимых случайных событий:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2). \quad (11)$$

Пусть задан уровень надежности α . Вероятность $P(A_1 + A_2)$ может быть рассмотрена как функция от v и β . Задача определения множества допустимых векторов скорости ветра в начальный момент времени сводится к нахождению множества точек $W = (v, \beta)$, для которых выполняется вероятностное ограничение:

$$P(v, \beta) = P(A_1 + A_2) \geq \alpha, \forall (v, \beta) \in W. \quad (12)$$

3. ИДЕЯ АЛГОРИТМА

Предположим, что нам доступен практический способ расчета функции $P(v, \beta)$ и ее производных. В качестве стартовой точки (v_0, β_0) , лежащей на границе искомого множества можно найти максимальную скорость попутного ветра, направленного вдоль ВПП 1, при которой выполняется ограничение (12). Для этого численно решим уравнение, взяв $\beta_0 = 0$:

$$P(v_0, 0) = \alpha. \quad (13)$$

После нахождения стартовой точки поворачиваем вектор скорости ветра с заданным шагом $\Delta\beta$ так, чтобы вероятность оставалась неизменной, то есть выполнялось условие:

$$\frac{\partial}{\partial\beta} P(v, \beta) \Delta\beta + \frac{\partial}{\partial v} P(v, \beta) \Delta v = 0. \quad (14)$$

Необходимо найти изокванту функции $P(v, \beta)$, то есть ее поверхность уровня. Изокванта будет содержать семейство векторов $c = [v, \beta]$, при которых значение функции остается постоянным. Множество таких векторов будет удовлетворять дифференциальному уравнению специального вида:

$$\frac{dv}{d\beta} = \frac{-\partial P(v, \beta)}{\partial\beta} \left(\frac{\partial P(v, \beta)}{\partial v} \right)^{-1} \quad (15)$$

с начальным условием:

$$v(0) = v_0. \quad (16)$$

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Для реализации подобного алгоритма требуется определить выражение для неизвестной вероятности. Вероятности $P(A_1)$, $P(A_2)$ и $P(A_1 A_2)$, входящие в выражение для $P(v, \beta)$, могут быть записаны в форме математических ожиданий:



$$P(A_1) = M \left[I \{ w_{\min} \leq w_{x1} \leq w_{\max} \} I \{ w_{\max}^2 - w_{y1}^2 \geq 0 \} \right], \quad (17)$$

$$P(A_2) = M \left[I \{ w_{\min} \leq w_{x2} \leq w_{\max} \} I \{ w_{\max}^2 - w_{y2}^2 \geq 0 \} \right], \quad (18)$$

$$P(A_1 A_2) = M \left[I \{ w_{\min} \leq w_{x1} \leq w_{\max} \} I \{ w_{\max}^2 \geq w_{y1}^2 \} I \{ w_{\min} \leq w_{x2} \leq w_{\max} \} I \{ w_{\max}^2 \geq w_{y2}^2 \} \right], \quad (19)$$

где I – индикаторная функция.

Функция Хевисайда является аналитическим представлением индикаторной функции:

$$\Theta(y) = \begin{cases} 1, y \geq 0, \\ 0, y < 0. \end{cases} \quad (20)$$

Следовательно, вероятности могут быть переписаны в виде:

$$P(A_1) = M \left[\Theta(w_{\max} - w_{x1}) \Theta(w_{x1} - w_{\min}) \Theta(w_{\max}^2 - w_{y1}^2) \right], \quad (21)$$

$$P(A_2) = M \left[\Theta(w_{\max} - w_{x2}) \Theta(w_{x2} - w_{\min}) \Theta(w_{\max}^2 - w_{y2}^2) \right], \quad (22)$$

$$P(A_1 A_2) = M \left[\Theta(w_{\max} - w_{x1}) \Theta(w_{x1} - w_{\min}) \Theta(w_{\max} - w_{x2}) \right. \\ \left. \Theta(w_{x2} - w_{\min}) \Theta(w_{\max}^2 - w_{y1}^2) \Theta(w_{\max}^2 - w_{y2}^2) \right]. \quad (23)$$

Вероятности (21)–(23), записанные в форме математического ожидания, могут быть эффективно вычислены с помощью метода Монте-Карло. Однако, вычисление их производных напрямую затруднительно. Известно [8], что градиент функции вероятности может быть выражен в форме интеграла Лебега по поверхности, являющейся границей области реализаций случайного вектора. Для некоторых частных случаев показано [9], что этот интеграл может сводиться как минимум к сумме объемного и поверхностного интегралов. Поверхностные интегралы не могут быть вычислены с помощью метода Монте-Карло, что ограничивает практические возможности расчета производных функции (12).

Решением данной проблемы может стать применение гладкой аппроксимации функции вероятности и ее производных [7]. Ранее такой подход применялся в решении задачи с одной ВПП [4], а также, например, в задаче аппроксимации α -ядра вероятностной меры. Идея аппроксимации заключается в замене функции Хевисайда в выражении для функции вероятности на сигмоиду:

$$S_{\theta}(y) = \frac{1}{1 + e^{-\theta y}}, \theta > 0. \quad (24)$$

Для гладких функций потерь и абсолютно непрерывных распределений случайных параметров доказана [7] сходимость аппроксимаций функции вероятности и ее производных. Вероятности (21)–(23) заменим на их приближенные значения:

$$P(A_1) \approx M \left[S_{\theta}(w_{x_{max}} - w_{x1}) S_{\theta}(w_{x1} - w_{x_{min}}) S_{\theta}(w_{y_{max}}^2 - w_{y1}^2) \right], \quad (25)$$

$$P(A_2) \approx M \left[S_{\theta}(w_{x_{max}} - w_{x2}) S_{\theta}(w_{x2} - w_{x_{min}}) S_{\theta}(w_{y_{max}}^2 - w_{y2}^2) \right], \quad (26)$$

$$P(A_1 A_2) \approx M \left[S_{\theta}(w_{x_{max}} - w_{x1}) S_{\theta}(w_{x1} - w_{x_{min}}) S_{\theta}(w_{x_{max}} - w_{x2}) \right. \\ \left. S_{\theta}(w_{x2} - w_{x_{min}}) S_{\theta}(w_{y_{max}}^2 - w_{y1}^2) S_{\theta}(w_{y_{max}}^2 - w_{y2}^2) \right]. \quad (27)$$

Их производные по параметрам ν и β вычисляются непосредственно по правилам дифференцирования сложной функции. Производная сигмoиды определяется следующим образом:

$$S'_{\theta}(y) = \theta S_{\theta}(y)(1 - S_{\theta}(y)). \quad (28)$$

Следовательно, аппроксимации значений и производных функции $P(\nu, \beta)$ определены.

5. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ВНЕШНЕЙ АППРОКСИМАЦИИ ГРАНИЦЫ МНОЖЕСТВА

Предложим алгоритм построения аппроксимации границы искомого доверительного множества, основанный на численном решении дифференциального уравнения:

- 1) задать начальное значение параметра алгоритма β_0 , шага $\Delta\beta$, параметра аппроксимации θ ;
- 2) используя метод дихотомии, определить значение ν_0 из условия (13);
- 3) найти частные производные функции вероятности при текущих β_k, ν_k ;
- 4) вычислить отношение производных $\frac{dv}{d\beta}$ по формуле (15) и найти текущее значение $\nu_k = \nu_{k-1} + \frac{dv}{d\beta} \Delta\beta$;
- 5) полученную точку проверить на выполнение вероятностного ограничения. Если ограничение выполняется, увеличить ν_k на шаг δ , умноженный на частную производную по ν . В противном случае уменьшить ν_k на шаг δ , пропорциональный производной по ν . Повторять шаг до тех пор, пока выполняется ограничение (12);
- 6) задать $\beta_{k+1} = \beta_k + \Delta\beta$;
- 7) повторять шаги 2–6, пока выполняется $\beta_{k+1} \leq 2\pi$.

Таким образом, на каждом шаге алгоритма происходит поворот угла β и корректировка допустимой скорости. Результатом работы алгоритма является внутренняя аппроксимация искомого множества.



6. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОЙ ГРАНИЦЫ МНОЖЕСТВА ДЛЯ ДВУХ ВЗЛЕТНО-ПОСАДОЧНЫХ ПОЛОС

Для реализации алгоритма были использованы элементы программного комплекса, описанного в [10]. Начальные данные, отражающие изменение ветра, взяты из [2]:

$$\sigma_{\varepsilon} = 3 \frac{\text{М}}{\text{сек}}, \sigma_{\varepsilon} = 15^{\circ}, \gamma = \frac{\pi}{2}, \alpha = 0,99,$$

$$w_{y_{\max}} = 15 \frac{\text{М}}{\text{сек}}, w_{x_{\min}} = -25 \frac{\text{М}}{\text{сек}}, w_{x_{\max}} = 10 \frac{\text{М}}{\text{сек}}.$$

Найденная начальная точка: $v_0 = 9.678$, $\beta_0 = 0$. Приближенную границу множества представим на рис. 1.

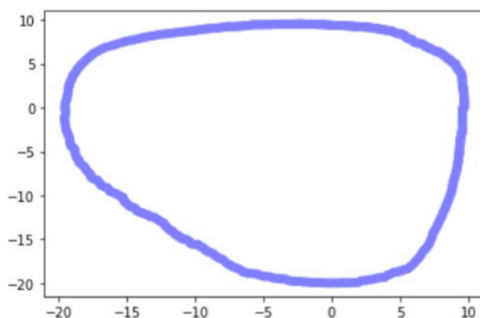


Рис. 1. Приближенная граница множества для двух ВПП при $\gamma = \frac{\pi}{2}$

Возьмем теперь угол $\gamma = \frac{\pi}{3}$ при тех же параметрах.

Найденная начальная точка: $v_0 = 9.248$, $\beta_0 = 0$. Полученная приближенная граница множества представлена на рис. 2.

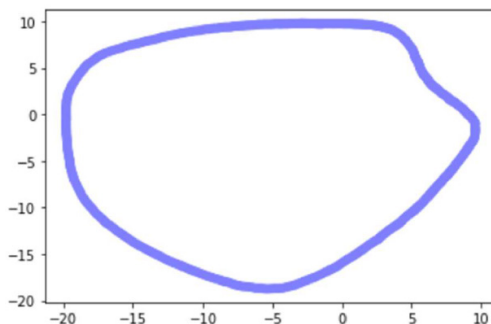


Рис. 2. Приближенная граница множества для двух ВПП при $\gamma = \frac{\pi}{3}$

Теперь уменьшим предел бокового ветра до $5 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$ и немного расширим допустимые границы для продольного ветра: $w_{x\min} = -20 \frac{\text{м}}{\text{сек}}, w_{x\max} = 20 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$. Угол между полосоми $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Начальная точка: $v_0 = 8.057$, $\beta_0 = 0$.

Получаем новую границу, похожую на крест (рис. 3). Применим те же самые параметры для случая $\gamma = \frac{\pi}{3}$ (рис. 4).

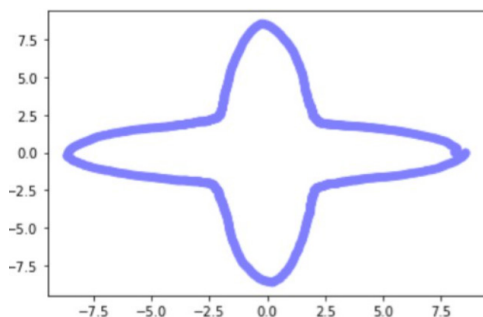


Рис. 3. Приближенная граница множества для двух ВПП
при $\gamma = \frac{\pi}{2}$ и минимальном $w_{y\max}$

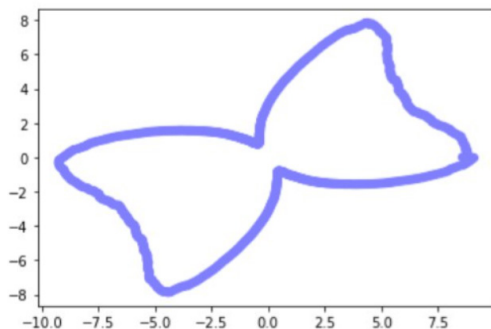


Рис. 4. Приближенная граница множества для двух ВПП
при $\gamma = \frac{\pi}{3}$ и минимальном $w_{y\max}$

Начальная точка: $v_0 = 8.486$, $\beta_0 = 0$.

Таким образом, получаем, что при небольшом боковом ветре и достаточно больших пределах продольного ветра искомое множество похоже на крест. Например, как на рис. 3 при угле $\frac{\pi}{2}$. При увеличении бокового ветра множество стремится к виду, изображённому на рис. 1. Аналогично для любого угла.



Дальше представим иные характерные формы получаемых множеств и их параметры.

На рис. 5 изображена граница множества при достаточно большой максимальной боковой скорости и небольших границах продольной с параметрами $\sigma_{\xi} = 3.8 \frac{\text{М}}{\text{сек}}, \sigma_{\varepsilon} = 13^{\circ}$.

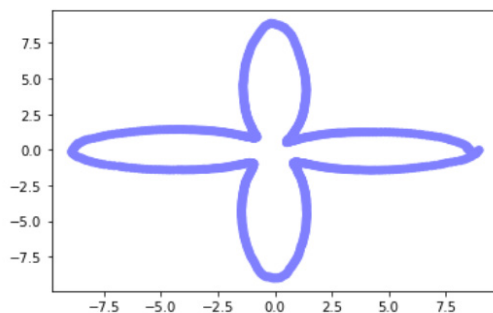


Рис. 5. Приближенная граница множества для двух ВПП при большом боковом ветре для угла $\frac{\pi}{2}$

Полученная начальная точка в таком случае: $v_0 = 9.287$, $\beta_0 = 0$.

Приближенная граница множества с параметрами $\sigma_{\xi} = 1.9 \frac{\text{М}}{\text{сек}}, \sigma_{\varepsilon} = 15^{\circ}$, $w_{y\max} = 5 \frac{\text{М}}{\text{сек}}, w_{x\min} = -20 \frac{\text{М}}{\text{сек}}, w_{x\max} = 10 \frac{\text{М}}{\text{сек}}$ представлена на рис. 6.

Получаем начальную точку границы множества: $v_0 = 6.57$, $\beta_0 = 0$.

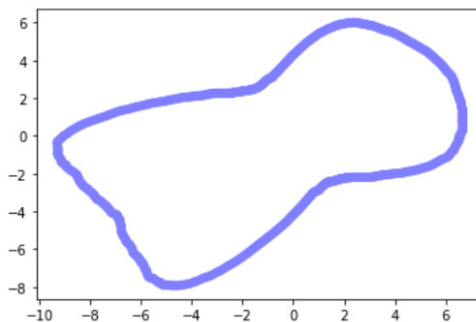


Рис. 6. Приближенная граница при маленьком боковом ветре для угла $\frac{\pi}{3}$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом работы является алгоритм нахождения допустимого множества векторов скорости ветра. Для достижения этой цели была использована гладкая аппроксимация функции вероятности.

Боковой ветер представляет больший риск при посадке, чем продольный ветер, что требует строгих ограничений. Это приводит к формированию области безопасности в виде эллипса на взлетно-посадочной полосе. А в случае двух пересекающихся ВПП такое сочетание параметров задачи, как ограничения на скорость ветра и конфигурация полосы, позволяет получить большое количество разных характерных форм множества.

Литература

1. *Малышев В.В., Кибзун А.И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами // М.: Машиностроение, 1987–302 с.
2. *Кан Ю.С., Кибзун А.И.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями // М.: Физматлит, 2009. – 372 с.
3. *Кибзун А.И., Малышев В.В.* Обобщенный минимаксный подход к решению задач с вероятностными ограничениями // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1984. № 1. С. 20–29.
4. *Sobol V.R., Torishnyy R.O., Pokhvalenskaya A.M.* Application of the smooth approximation of the probability function in some applied stochastic programming problems // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. Моделирование и программирование. 14:3. 2021. С. 33–45.
5. *Кибзун А.И., Иванов С.В., Степанова А.С.* Построение доверительного множества поглощения в задачах анализа стохастических систем // Автомат. и телемех., 2020, С. 21–36.
6. *Кибзун А.И., Иванов С.В.* Построение доверительных множеств поглощения с помощью статистических методов // Автомат. и телемех., 2020, С. 82–99.
7. *Соболь В.Р., Торишный Р.О.* О гладкой аппроксимации вероятностных критериев в задачах стохастического программирования // Тр. СПИИРАН, 2020–38 с.
8. *Кибзун А.И., Третьяков Г.Л.* Дифференцируемость функции вероятности // Доклады Академии наук, 1997, С. 159–161.
9. *Uryasev S.* Derivatives of probability functions and some applications. // Annals of Operations Research. 1995, Vol. 56. № 1. pp. 287–311.
10. *Торишный Р.О.* Программный комплекс для анализа задач стохастического программирования с вероятностным критерием // М.: ВКИТ, 2022–12 с.



Formation of a Confidence Absorbing Set in the Task of Wind Speed Prediction

Xenia A. Sklezneva *

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI)

Moscow, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2003-2743>

e-mail: xenia.sklezneva@gmail.com

Vitaly R. Sobol**

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI)

Moscow, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7472-5520>

e-mail: vitsobol@mail.ru

The article researches the problem of determining the set of allowable forecast wind speed vectors measured before the departure of the aircraft at which the wind speed by the time of landing will be within allowable limits with a given probability. Deviations of the wind direction and modulus from the forecast ones are supposed to be random. The case when the destination airport has two runways located at an angle to each other is considered. The problem is reduced to the problem of determining the isoquant for the probability function of a special kind. A numerical algorithm for constructing an approximation of the isoquant is proposed. Numerical examples are given, showing the dependence of the required set shape on the task parameters.

Keywords: confidence absorbing set, probability function, smooth approximation of the probability function, isoquant of the probability function

For citation:

Sklezneva K.A., Sobol V.R. Formation of a Confidence Absorbing Set in the Task of Predicting Wind Speed. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2025. Vol. 15, no. 1, pp. 145–167. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2025150108> (In Russ., abstr. in Engl.).

***Xenia A. Sklezneva**, student of the Department of Probability Theory and Computer Modeling, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2003-2743>, e-mail: xenia.sklezneva@gmail.com

****Vitaly R. Sobol**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Probability Theory and Computer Modeling, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7472-5520>, e-mail: vitsobol@mail.ru



References

1. Malyshev V.V., Kibzun A.I. Analiz i sintez vysokotochnogo upravleniya letatel'nymi apparatami // M.: Mashinostroenie, 1987–302 s.
2. Kan Yu.S., Kibzun A.I. Zadachi stohasticheskogo programmirovaniya s veroyatnostnymi kriteriyami // M.: Fizmatlit, 2009. – 372 s.
3. Kibzun A.I., Malyshev V.V. Obobshchennyj minimaksnyj podhod k resheniyu zadach s veroyatnostnymi ogranicheniyami // Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika. 1984. № 1. S. 20–29.
4. Sobol V.R., Torishnyy R.O., Pokhvalenskaya A.M. Application of the smooth approximation of the probability function in some applied stochastic programming problems // Vestn. YuUrGU. Ser. Matem. Modelirovanie i programmirovanie. 14:3. 2021. S. 33–45.
5. Kibzun A.I., Ivanov S.V., Stepanova A.S. Postroenie doveritel'nogo mnozhestva pogloshcheniya v zadachah analiza stohasticheskikh sistem // Avtomat. i telemekh., 2020, S. 21–36.
6. Kibzun A.I., Ivanov S.V. Postroenie doveritel'nyh mnozhestv pogloshcheniya s pomoshch'yu statisticheskikh metodov // Avtomat. i telemekh., 2020, S. 82–99.
7. Sobol V.R., Torishnyy R.O. O gladoj approksimacii veroyatnostnykh kriteriev v zadachah stohasticheskogo programmirovaniya // Tr. SPIIRAN, 2020–38 s.
8. Kibzun A.I., Tret'yakov G.L. Differenciруемость функции вероятности // Доклады Академии наук, 1997, S. 159–161.
9. Uryasev S.. Derivatives of probability functions and some applications. // Annals of Operations Research. 1995, Vol. 56. № 1. pp. 287–311.
10. Torishnyy R.O. Programmnyy kompleks dlya analiza zadach stohasticheskogo programmirovaniya s veroyatnostnym kriteriem // M.: VKiT, 2022–12 s.

Получена 19.02.2025

Received 19.02.2025

Принята в печать 03.03.2025

Accepted 03.03.2025

УДК 519.6

Максимизация среднего числа набранных баллов в ограниченном по времени тесте

Степанов А.Е.*

Московский авиационный институт

(национальный исследовательский университет) (МАИ)

г. Москва, Российская Федерация

e-mail: stepanoffalsey@gmail.com

В статье рассматривается задача поиска стратегии тестируемого при прохождении ограниченного по времени теста. За каждое задание теста начисляется определенное количество баллов. Критерием выступает среднее число набранных за тест баллов. Случайными факторами, учитываемыми в модели, является время решения тестируемым каждого задания и правильность его решения, моделируемая случайной величиной с распределением Бернулли. Задача формулируется в терминах стохастического линейного программирования с вероятностными ограничениями и критерием качества в виде математического ожидания числа набранных за тест баллов. Приводятся алгоритм решения, результаты численного эксперимента и их сравнительный анализ с ранее полученными авторами результатами решения подобной задачи с другими критериями качества.

Ключевые слова: ограниченный по времени тест, стохастическое линейное программирование, вероятностное ограничение

Для цитаты:

Степанов А.Е. Максимизация среднего числа набранных баллов в ограниченном по времени тесте // Моделирование и анализ данных. 2025. Том 15. № 1. С. 158–167.

DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2025150109>

***Степанов Алексей Евгеньевич**, аспирант, кафедра теории вероятностей и компьютерного моделирования, ФГБОУ ВО Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, e-mail: stepanoffalsey@gmail.com

1. ВВЕДЕНИЕ

Массовое применение систем дистанционного обучения (СДО), связанное с изоляцией в период эпидемии COVID-19, остро поставило вопросы исследований в области индивидуализации средств дистанционного обучения и адаптации их под

конкретного пользователя. Различные математические модели, связанные с участием обучаемого в контуре дистанционного обучения, активно изучаются в последние годы. Наряду с классической теорией тестирования, основы которой были заложены во второй половине прошлого столетия [1, 2], появились новые работы [3, 4, 5, 6, 7, 8], учитывающие различные модели неконтролируемых факторов, связанных с пользователем СДО, при формировании адаптивных тестов и построения его индивидуальной траекторий обучения. В то же время процесс тестирования, являющийся основой применения различных адаптивных технологий в СДО, является противостоянием (возможно не антагонистическим) тестируемого, стремящегося наилучшим образом продемонстрировать свои знания, и интеллектуальной начинки СДО, стремящийся максимально объективно оценить этот уровень знаний. Адаптивные технологии, применяемые в СДО в частности при формировании индивидуальных траекторий пользователей и формировании тестов, отражены, например, в [6, 9], а модели формирования стратегии пользователей по вероятностным критериям качества в [10, 11]. В данной статье предлагается еще одна модель построения стратегии прохождения пользователем СДО ограниченного по времени теста с естественным критерием максимизации набранного при прохождении теста среднего числа баллов. В модели используется ряд случайных параметров, связанных со скоростью решения тестируемым заданий и правильностью их решения. Проводится сравнительный анализ полученного решения со стратегиями тестирования, предложенными в [10, 11].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Вектором случайных параметров задачи является вектор $Z = \text{col}(X^T, T^T)$, состоящий из двух подвекторов X и T . Координаты вектора X моделируют правильность решения i -ого задания теста, состоящего из n заданий. Предполагается, что $X_i, i = 1, \dots, n$ являются независимыми случайными величинами, имеющими распределение Бернулли, с параметрами $p_i, i = 1, \dots, n$, оцениваемыми частотой правильных ответов тестируемого на аналогичные задания i -ого типа в ходе подготовки к тестированию, или в процессе обучения. Равенство 1 случайной величины X_i моделирует правильность решения тестируемым i -ого задания, а равенство 0 – противоположное событие. Координаты вектора T моделируют время ответа пользователя на соответствующее задание теста. Случайные величины $T_i, i = 1, \dots, n$ также предполагаются независимыми. Однако предполагать независимость между величинами X и T было бы опрометчиво, поэтому для каждого значения X_i (0 или 1) оценивается свое распределение случайной величины T_i также на базе статистики решения тестируемым заданий аналогичного типа. Непрерывные распределения времени ответа пользователя на задание (Ван дер Линдена [1], Гамма-распределения [9]) не позволяют найти точное решение задачи в вероятностной постановке, поэтому в работе используется дискретизированная модель времени ответа с тремя значениями, моделирующими ситуации быстрого решения, стандартного решения и решения с затруднениями. Таким образом, общий вектор случайных величин имеет дискретное



распределение с числом реализаций $D = 2^n * 3^n$. Вероятности каждой реализации могут быть найдены с помощью формулы умножения вероятностей, используя условное распределение времени ответа тестируемого на задания теста при условиях правильного, или неправильного его решения.

Требуется определить стратегию тестируемого при выполнении им ограниченно-го по времени теста из n заданий. Стратегия определяется вектором булевых переменных $u \in \{0,1\}^n$, где

$$u_i \triangleq \begin{cases} 1, & \text{если тестируемый пытается решить } i - \text{е задание теста,} \\ 0, & \text{если тестируемый не пытается решить } i - \text{е задание теста.} \end{cases}$$

За каждое i – задание теста начисляется b_i баллов. Время выполнения теста ограничено величиной $\bar{T}$.

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу:

$$M\left[\sum_{i=1,n} u_i X_i b_i\right] \rightarrow \max_{u \in \{0,1\}^n} \quad (1)$$

при ограничении:

$$P\left\{\sum_{i=1,n} u_i T_i \leq \bar{T}\right\} \geq \alpha. \quad (2)$$

В ней величина доверительной вероятности $\alpha \in (0,1)$ играет роль параметра.

Данная задача является задачей стохастического программирования с критерием в форме математического ожидания, булевыми переменными и вероятностным ограничением, аналогичную классическим постановкам Чарнса и Купера [12,13]. Критерий представляет собой среднее значение набранного тестируемым за тест числа баллов, которое максимизируется. Ограничение обеспечивает с заданным уровнем доверительной вероятности α непревышение тестируемым фиксированного времени $\bar{T}$, выделяемого на тест.

Выбор в качестве критерия среднего числа набранных за тест баллов допускает также иную трактовку постановки задачи:

$$M\left\{\sum_{i=1,n} u_i X_i b_i \mid \sum_{i=1,n} u_i T_i \leq \bar{T}\right\} \rightarrow \max_{u \in \{0,1\}^n} \quad (3)$$

В данном случае максимизируется условное математическое ожидание числа набранных баллов при условии удовлетворения тестируемым ограничения на время выполнения теста. Сосредоточим далее усилия на решении задачи (1), (2).

Как уже было сказано выше, число всех возможных реализаций вектора случайных параметров $col(X^T, T^T)$ равно $D = 2^n * 3^n$. Рассмотрим вектор $\delta \in \{0,1\}^D$, каждая координата которого соответствует одной из реализаций вектора $col(x^{iT}, t^{iT})$ вектора $col(X^T, T^T)$ и может принимать значения 0 или 1. Пусть $\gamma \triangleq e^T b$, где $e = (1, \dots, 1)^T \in R^n$,

т. е. $\bar{Y} = \sum b_i$ – максимальное количество баллов, которое можно набрать за тест. Пусть $p_v = P(\text{col}(X^T, T^T) = \text{col}(x^{vT}, t^{vT}))$, $v = \overline{1, D}$. Тогда, на основании доверительного метода [14], с использованием предложенной в [15] методики, задача стохастического программирования (1), (2) может быть сведена к детерминированной задаче оптимизации с булевыми переменными.

Если предположить независимость случайных величин X и T , то эквивалентная задача будет иметь вид:

$$\sum_{i=1, n} u_i p_i b_i \rightarrow \max_{u \in \{0,1\}^n, \delta \in \{0,1\}^D} \quad (4)$$

при ограничениях:

$$u^T t^v \leq \delta_v \bar{T} + (1 - \delta_v) T^{\text{MAX}}, v = \overline{1, D}, \quad (5)$$

$$\sum_{v=1, D} p_v \delta_v \geq \alpha, \quad (6)$$

где T^{MAX} – максимальное время, которое может потратить тестируемый на выполнение теста.

В общем случае зависимости случайных величин X и T , эквивалентная задача будет иметь вид:

$$\sum_{v=1, D} p_v \delta_v \sum_{i=1, n} u_i x_i^v b_i \rightarrow \max_{u \in \{0,1\}^n, \delta \in \{0,1\}^D} \quad (7)$$

при ограничениях:

$$u^T t^v \leq \delta_v \bar{T} + (1 - \delta_v) T^{\text{MAX}}, v = \overline{1, D}, \quad (8)$$

$$\sum_{v=1, D} p_v \delta_v \geq \alpha, \quad (9)$$

Заметим, что указанная методика, в случае зависимости используемых в задаче случайных величин позволяет получить эквивалентную детерминированную оптимизационную задачу (6)–(8) в классе задач нелинейной булевой оптимизации, в то время как для независимых случайных параметров эквивалентная детерминированная задача приобретает вид задачи линейного программирования (ЗЛП) с булевыми переменными (3)–(5), что дарит надежду использовать специальные методы решения дискретных ЗЛП.

Если размерности задачи (4)–(6) и (7)–(9) допускают их решение стандартными процедурами из известных библиотек оптимизационных программ, то решение исходной задачи может быть найдено с их помощью. Однако, эти задачи содержат дополнительный вектор переменных оптимизации $\delta \in \{0,1\}^D$ большой размерности, что с учетом большого числа ограничений делает их трудно разрешимыми, и требует разработки специальных алгоритмов решения, учитывающих структуру задачи.

Предлагается следующий алгоритм решения исходной задачи (1), (2), являющийся модификацией алгоритмов, предложенных в коллективе авторов в [10], [11].



3. АЛГОРИТМ

Шаг 0. Положим $M^* = 0$, а $u^* \in \{0, 1\}^n$ равным нулевому вектору.

Шаг 1. Исключим стратегии, которые не соответствуют допустимому суммарному времени даже в самом оптимистичном сценарии, где все выбранные задачи решены за минимально возможное время T_i^{min} . Оно является наименьшим из всех возможных реализаций случайной величины T_i , $i = \overline{1, n}$.

Из всех 2^n стратегий $u^* \in \{0, 1\}^n$ выбираем N , образующих множество $\underline{U}$, для элементов которого выполнены условия:

$$\sum_{i=1}^n u_i T_i^{min} \leq \overline{T},$$

Перенумеруем все элементы множества $\underline{U}$. Таким образом, число от 1 до N однозначно определяет элемент множества. Под u^m будем понимать m -й элемент множества $\underline{U}$. Положим $m^* := 1$.

На этом шаге инициализируется внешний цикл перебора всех N выбранных стратегий оптимизации.

Шаг 2. Если $m > N$ то переходим к шагу 7. В противном случае полагаем $P_m = 0$, где P_m – вспомогательный параметр для расчета вероятности выполнения ограничений.

Шаг 3. Предположим, что вектор u^m содержит ровно K единиц. Предположим, что ненулевыми компонентами вектора u^m являются компоненты с номерами $i_1, i_2, \dots, i_K$. Рассмотрим подвектор $col(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_K})$ случайного вектора X . Положим $J := 2^K$, а $j := 1$.

На этом шаге инициализируется цикл перебора всех возможных реализаций $col(x_{i_1}^j, x_{i_2}^j, \dots, x_{i_K}^j)$, $j = \overline{1, 2^K}$.

Шаг 4. Если $j > J$, то переходим к шагу 6.

В противном случае, полагаем $L := 3^K$, а $l := 1$ и переходим к шагу 5.

На этом шаге инициализируется цикл перебора всех возможных реализаций $col(t_{i_1}^l, t_{i_2}^l, \dots, t_{i_K}^l)$, $l = \overline{1, 3^K}$ подвектора $col(T_{i_1}, T_{i_2}, \dots, T_{i_K})$ случайного вектора T .

Шаг 5. Если $l > L$, то полагаем $j := j + 1$, и переходим к шагу 4.

В противном случае, если для реализации $col(t_{i_1}^l, t_{i_2}^l, \dots, t_{i_K}^l)$ выполняется условие

$$\sum_{i \in \{i_1, i_2, \dots, i_K\}} u_i^m t_i^l \leq \overline{T},$$

то полагаем

$$P_m := P_m + \prod_{i \in \{i_1, i_2, \dots, i_K\}} P(T_i = t_i^l | X_j = x_i^j) (X_j = x_i^j),$$

$l = l + 1$ и переходим к началу шага 5.

Шаг 6. Полагаем $M := \sum_{i=1,n} u_i p_i b_i$.

Если величина $P_m \geq \alpha$ и $M > M^*$, то полагаем $M^* := M$, $u^* := u^m$, $m := m + 1$ и переходим к шагу 2.

Если величина $P_m \geq \alpha$ и $M \leq M^*$, то полагаем $m := m + 1$ и переходим к шагу 2.

Если величина $P_m < \alpha$, то полагаем $m := m + 1$ и переходим к шагу 2.

Шаг 7. Полагаем оптимальное значение критерия равным M^* , а оптимальное значение стратегии равным u^* . Равенство M^* нулю соответствует отсутствию допустимого решения рассматриваемой задачи.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

В целях сравнения и верификации результатов численного эксперимента исходные данные взяты из [10], где они получены на основе анализа функционирования системы дистанционного обучения МАИ CLASS.NET [16]. Будем предполагать число заданий в тесте $n = 10$.

Согласно данным, приведенным в [10], $T^{\max} = 3803$. В результате работы предложенного алгоритма были получены следующие зависимости оптимальных решений от значений параметров задачи α и $\bar{T}$ (см. табл. 1 и 2).

Таблица 1

Зависимость оптимального решения задачи от параметра α при $\bar{T} = 0.6T^{\max}$

α	Оптимальная стратегия u^*	Оптимальное значение критерия M^*	Время расчета(сек)
0.4	[1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 0. 1.]	10.43	66,1
0.5	[1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 0. 0. 1.]	8.93	66,2
0.6	[1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 0. 0. 1.]	8.93	66,7
0.7	[1. 1. 1. 1. 1. 0. 1. 1. 0. 1.]	8.83	65,6
0.8	[1. 1. 1. 1. 1. 0. 1. 1. 0. 1.]	8.83	65,2
0.9	[1. 1. 1. 1. 1. 0. 1. 1. 0. 1.]	8.83	65,8
0.95	[1. 1. 1. 0. 1. 0. 1. 1. 0. 1.]	8.06	65,8

Таблица 2

Зависимость оптимального решения задачи от параметра $\bar{T}$ при $\alpha = 0.8$

T	Оптимальная стратегия u^*	Оптимальное значение критерия M^*	Время расчета (сек.)
$0.4T^{\max}$	[1. 1. 1. 1. 1. 0. 1. 0. 0. 0.]	6.43	32,9
$0.5T^{\max}$	[1. 1. 1. 1. 1. 0. 1. 1. 0. 0.]	7.43	66,1
$0.6T^{\max}$	[1. 1. 1. 1. 1. 0. 1. 1. 0. 1.]	8.83	66,2
$0.7T^{\max}$	[1. 1. 1. 1. 1. 0. 1. 1. 1. 1.]	9.63	65,7
$0.8T^{\max}$	[1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 0. 1.]	10.43	65,2
$0.9T^{\max}$	[1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1.]	11.23	64,8



Результаты численного эксперимента логично демонстрируют, что с ростом уровня доверительной вероятности α , т.е. ужесточением ограничений в задаче, оптимальное значение критерия убывает, а ослабление ограничений путем увеличения времени, выделяемого на прохождение теста, приводит к росту оптимального значения критерия. При этом эффективность предложенного алгоритма решения подтверждается незначительным временем, затрачиваемым на решение задачи, по сравнению с результатами использования стандартных библиотечных процедур решения задач целочисленного линейного программирования аналогичных (4)–(6), использованных в [10], [11] для решения рассматриваемой задачи в близких вероятностных постановках.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе продолжается публикация результатов автора в области оптимизации стратегии прохождения ограниченного по времени теста в условиях использования для описания неконтролируемых факторов аппарата случайных величин. В качестве модели рассмотрена задача стохастического программирования с вероятностным ограничением на время выполнения теста и критерием в форме математического ожидания набранного тестируемым количества баллов за тест. Как и в предыдущих исследованиях, опубликованных в [10, 11], рассматриваемая задача стохастического программирования сводится к детерминированной задаче большой размерности, решение которой сопряжено со значительными вычислительными трудностями при большом числе заданий в тесте. Предлагается эффективный алгоритм решения исходной задачи, существенно сокращающий перебор возможных значений ее дискретных переменных оптимизации.

В работе используются исходные данные, приведенные ранее в статьях [10–11], где аналогичная задача решалась с квантильным критерием и критерием максимизации вероятности преодоления набранным за тест числом баллов некоторого фиксированного уровня. Полученные в работе результаты согласуются с найденными ранее результатами с использованием других критериев оптимизации. Совокупный анализ тестируемым всех стратегий, оптимальных по различным критерием, позволяет ему сделать осмысленный выбор поведения при прохождении ограниченного по времени теста.

Литература

1. *Van der Linden W.J., Scrams D.J., Schnipke D.L., et al.* Using Response-Time Constraints to Control for Differential Speededness in Computerized Adaptive Testing // *Applied Psychological Measurement*. 1999. Vol. 23. No. 3. P. 195–210. DOI: 10.1177/01466219922031329.
2. *Rasch G.* Probabilistic models for some intelligence and attainment tests. – Chicago: The University of Chicago Press, 1980. 199 p.
3. *Dumin P.N. and Kuravsky L.S.* Studying Testing Effectiveness Dynamics in Training Operators of Complex Technical Systems // *International Journal of Advanced Research in Engineering and Technology (IJARET)*. 2020. Vol.11. № 5, P. 133–140. DOI: 10.34218/IJARET.11.5.2020.0 15.

4. *Pominov D.A., Kuravsky L.S., Dumin P.N. and Yuryev G.A.* Adaptive Trainer for Preparing Students for Mathematical Exams // *International Journal of Advanced Research in Engineering and Technology (IJARET)*. 2020. Vol. 11. № 11. P. 260–268. DOI 10.34218/IJARET.11.11.2020.022.
5. *Kuravsky L.S., Margolis A.A., Marmalyuk P.A., Panfilova A.S., Yuryev G.A., Dumin P.N.* A Probabilistic Model of Adaptive Training // *Applied Mathematical Sciences*, 2016. Vol. 10. № 48. P. 2369–2380. <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.65168>.
6. *Босов А.В., Мартюшова Я.Г., Наумов А.В., Сапунова А.П.* Байесовский подход к построению индивидуальной траектории пользователя в системе дистанционного обучения // *Информатика и ее применения*. 2020. Том 14. № 3. С. 86–93. DOI: 10.14357/19922264200313.
7. *Босов А.В., Мхитарян Г.А., Наумов А.В., Сапунова А.П.* Использование гамма-распределения в задаче формирования ограниченного по времени теста, *Информатика и ее применение*, 2019. Том 13. № 4. С. 12–18. DOI: 10.14357/19922264190402.
8. *Наумов А.В., Мхитарян Г.А., Черыгова Е.Е.* Стохастическая постановка задачи формирования теста заданного уровня сложности с минимизацией квантили времени выполнения // *Вестн. компьют. и информ. технологий*. 2019. № 2. С. 37–46. DOI: 10.14489/vkit.2019.02.pp.037-046.
9. *Шамсутдинова Т.М.* Формирование индивидуальной образовательной траектории в адаптивных системах управления обучением // *Открытое образование*. 2021. № 25(6). С. 36–44. <https://doi.org/10.21686/1818-4243-2021-6-36-44>.
10. *Наумов А.В., Устинов А.Э., Степанов А.Е.* О задаче максимизации вероятности успешного прохождения ограниченного по времени теста // *Автоматика и Телемеханика*. 2024. № 1. С. 97–108. DOI: 10.31857/S0005231024010061.
11. *Мартюшова Я.Г., Наумов А.В., Степанов А.Е.* Оптимизация прохождения ограниченного по времени теста по квантильному критерию // *Информатика и ее применения*. 2024, Т. 18. № 4. С. 37–44. DOI: 10.14357/19922264240406.
12. *Charnes A., Cooper W.W.* Chance-Constrained Programming // *Management Sci.* 1959. № 5. P. 73–79. <http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.6.1.73>.
13. *Charnes A., Cooper W.W.* Deterministic Equivalents for Optimizing and Satisficing under Chance-Constraints // *Oper. Res.* 1963. № 11. P. 18–39. DOI: 10.1287/opre.11.1.18.
14. *Кан Ю.С., Кибзун А.И.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009. ISBN 978-5-9221-1148-5.
15. *Кибзун А.И., Наумов А.В., Норкин В.И.* О сведении задачи квантильной оптимизации с дискретным распределением к задаче смешанного целочисленного программирования // *Автоматика и Телемеханика*. 2013. № 6. С. 66–86. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117913060064>.
16. *Наумов А.В., Джумурат А.С., Иноземцев А.О.* Система дистанционного обучения математическим дисциплинам CLASS.NET // *Вестник компьютерных и информационных технологий*, 2014. № 10. С. 36–40. DOI: 10.14489/vkit.2014.010.pp.036-044.



Maximizing the Average Score in a Timed Test

Alexey E. Stepanov*

Moscow Aviation Institute (State Research University), Moscow, Russia

e-mail: stepanoffalsey@gmail.com

The article considers the problem of finding a test taker's strategy for passing a time-limited test. A certain number of points is awarded for each test task. The criterion is the average number of points scored for the test. The random factors taken into account in the model are the time it takes the test taker to solve each task and the correctness of his solution, modeled by a random variable with the Bernoulli distribution. The problem is formulated in terms of stochastic linear programming with probabilistic constraints and a quality criterion in the form of the mathematical expectation of the number of points scored for the test. The solution algorithm, results of a numerical experiment and their comparative analysis with the results of solving a similar problem with other quality criteria previously obtained by the authors are presented.

Keywords: time-limited test, stochastic linear programming, probabilistic constraint

For citation:

Stepanov A.E. Maximizing the Average Wcore in a Timed Test. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2025. Vol. 15, no. 1, pp. 158–167. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2025150109> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Van der Linden W.J., Scrams D.J., Schnipke D.L., et al. Using Response-Time Constraints to Control for Differential Speededness in Computerized Adaptive Testing. *Applied Psychological Measurement*, 1999. Vol. 23, no. 3, pp. 195–210. DOI: 10.1177/01466219922031329.
2. Rasch G. Probabilistic models for some intelligence and attainment tests. Chicago: The University of Chicago Press, 1980. 199 p.
3. Dumin P.N. and Kuravsky L.S. Studying Testing Effectiveness Dynamics in Training Operators of Complex Technical Systems. *International Journal of Advanced Research in Engineering and Technology (IJARET)*, 2020. Vol.11, no 5, pp. 133–140. DOI: 10.34218/IJARET.11.5.2020.0 15.
4. Pominov D.A., Kuravsky L.S., Dumin P.N. and Yuryev G.A. Adaptive Trainer for Preparing Students for Mathematical Exams. *International Journal of Advanced Research in Engineering and Technology (IJARET)*, 2020. Vol. 11, no. 11, pp. 260–268. DOI 10.34218/IJARET.11.11.2020.022.
5. Kuravsky L.S., Margolis A.A., Marmalyuk P.A., Panfilova A.S., Yuryev G.A., Dumin P.N. A Probabilistic Model of Adaptive Training. *Applied Mathematical Sciences*, 2016. Vol. 10, no. 48, pp. 2369–2380. <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.65168>.

***Alexey E. Stepanov**, Ph. D. Program student, Department of Probability Theory and Computer Modeling, Moscow Aviation Institute (State Research University) (MAI), Moscow, Russia, e-mail: stepanoffalsey@gmail.com

6. Bosov A.V., Martyushova Ya.G., Naumov A.V., Sapunova A.P. Baiesovskii podkhod k postroyeniyu individual'noi traektorii pol'zovatelya v sisteme distantsionnogo obucheniya [Bayesian approach to constructing individual user trajectory in learning management system]. *Informatika i ee primeneniya=Informatics and Applications*, 2020. Vol 14, no. 3, pp. 86–93. (In Russ.). DOI: 10.14357/19922264200313.
7. Bosov A.V., Mhitaryan G.A., Naumov A.V., Sapunova A.P. Ispol'zovanie gamma-raspredeleniya v zadache formirovaniya ogranichenного po vremeni testa [Using the Gamma Distribution in the Problem of Forming a Time-Limited Test]. *Informatika i ee primeneniya=Informatics and Applications*, 2019. Vol. 13, no. 4, pp.12–18. (In Russ.). DOI: 10.14357/19922264190402.
8. Naumov A.V., Mhitaryan G.A., Cherygova E.E. Stokhasticheskaya postanovka zadachi formirovaniya testa zadannogo urovnya slozhnosti s minimizatsiei kvantili vremeni vypolneniya [Stochastic formulation of the problem of forming a test of a given level of complexity with minimization of the quantile of execution time]. *Vestnik komp'yuternykh i informatsionnykh tekhnologii*, 2019, no. 2, pp. 37–46. (In Russ.). DOI: 10.14489/vkit.2019.02. pp. 037–046.
9. Shamsutdinova T.M. Formirovanie individual'noi obrazovatel'noi traektorii v adaptivnykh sistemakh upravleniya obucheniem [Formation of an individual educational trajectory in adaptive learning management systems]. *Otkrytoe obrazovanie*, 2021, no. 25(6), pp. 36–44. (In Russ.). <https://doi.org/10.21686/1818-4243-2021-6-36-44>.
10. Naumov A.V., Ustinov A.E., Stepanov A.E. O zadache maksimizatsii veroyatnosti uspehnogo prokhozhdeniya ogranichenного po vremeni testa [On the problem of maximizing the probability of successfully passing a time-limited test]. *Avtomatika i Telemekhanika=Automation and remote control*, 2024, no. 1, pp. 97–108. (In Russ.). DOI: 10.31857/S0005231024010061.
11. Martyushova Ya.G., Naumov A.V., Stepanov A.E. Optimizatsiya prokhozhdeniya ogranichenного po vremeni testa po kvantil'nomu kriteriyu [Optimization of passing a time-limited test using a quantile criterion]. *Informatika i ee primeneniya=Informatics and Applications*, 2024. Vol.18, no. 4, pp. 37–44. (In Russ.). DOI: 10.14357/19922264240406.
12. Charnes A., Cooper W.W. Chance-Constrained Programming. *Management Sci.* 1959, no. 5, pp. 73–79. <http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.6.1.73>.
13. Charnes A., Cooper W.W. Deterministic Equivalents for Optimizing and Satisficing under Chance-Constraints. *Oper. Res.* 1963, no. 11, pp. 18–39. DOI: 10.1287/opre.11.1.18.
14. Kan Yu.S., Kibzun A.I. Zadachi stokhasticheskogo programmirovaniya s veroyatnostnymi kriteriyami [Stochastic programming problems with probabilistic criteria] M.: FIZMATLIT, 2009. 372 p. (In Russ.). ISBN 978-5-9221-1148-5.
15. Kibzun A.I., Naumov A.V., Norkin V.I. O svedenii zadachi kvantil'noi optimizatsii s diskretnym raspredeleniem k zadache smeshannogo tselochislennogo programmirovaniya [On the reduction of a discrete distribution quantile optimization problem to a mixed integer programming problem]. *Avtomatika i Telemekhanika=Automation and remote control*, 2013, no. 6. pp. 66–86. (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117913060064>.
16. Naumov A.V., Dzhimurat A.S., Inozemtsev A.O. Sistema distantsionnogo obucheniya matematicheskimi distsiplinam CLASS.NET. [Distance learning system for mathematical disciplines CLASS.NET] *Vestnik komp'yuternykh i informatsionnykh tekhnologii*. 2014, no.10, pp. 36–44. DOI: 10.14489/vkit.2014.010.pp.036-044 (In Russ., abstr. In Engl.).

◆◆◆◆◆ МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ◆◆◆◆◆

УДК 372.851

Алгебраические кривые низших порядков в преподавании высшей математики

Куланин Е.Д.*

Московский государственный психолого-педагогический университет

(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>

e-mail: lucas03@mail.ru

Степанов М.Е.**

Московский государственный психолого-педагогический университет

(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>

e-mail: mestepanov@yandex.ru

Статья продолжает цикл ([1] – [15]) методических разработок авторов. В ней обсуждаются некоторые проблемы, связанные с путями повышения культуры математического мышления студентов-математиков. Главным объектом обсуждения являются алгебраические кривые. Авторы опираются на опыт работы на факультете информационных технологий МГППУ.

Ключевые слова: высшее образование, методика преподавания математики, аналитическая геометрия, математический анализ, переменная, функция, неявная функция, обратная функция, производная, секущая, касательная, полином, алгебраическая кривая, кривые второго порядка, семейства кривых, пучки, геометрические преобразования

Для цитаты:

Куланин Е.Д., Степанов М.Е. Алгебраические кривые низших порядков в преподавании высшей математики // Моделирование и анализ данных. 2025. Том 15. № 1. С. 168–209. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2025150110>

***Куланин Евгений Дмитриевич**, кандидат физико-математических наук, профессор, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>, e-mail: lucas03@mail.ru

****Степанов Михаил Евграфович**, кандидат педагогических наук, доцент, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: mestepanov@yandex.ru



1. ВВЕДЕНИЕ

Важнейшим понятием курса высшей математики является функциональная зависимость между действительными и комплексными переменными. Следует отметить, что это понятие несёт весьма широкую смысловую нагрузку. Но в курсе математического и комплексного анализа в первую очередь рассматриваются явно выраженные функции одного переменного. Между тем, функции в достаточно продвинутых математических теориях очень часто встречаются неявные функции. При этом студент, как правило, уже сконцентрирован на привычном ему явном выражении функций. По этой причине затрудняется восприятие, например, теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Таким образом, желательно более активно знакомить студентов с математическими объектами, описываемыми неявным образом. Алгебраические кривые являются именно такими объектами. При изучении кривых второго порядка в рамках аналитической геометрии очень активно используются неявные описания этих кривых, но с точки зрения авторов этой статьи этого недостаточно. Нужен более широкий спектр объектов такого вида.

Конечно, авторам могут возразить, что в рамках аналитической геометрии проводится достаточно подробное изучение методов работы с неявными функциями. Более того, в математическом анализе специально рассматриваются вопросы, связанные с определением неявных функций и методами работы с ними, например, выводится формула дифференцирования таких функций.

Тем не менее, на взгляд авторов существует определённый разрыв между курсами аналитической геометрии и математического анализа. Например, то же дифференцирование и проведение касательных с его помощью, если и упоминается в курсе аналитической геометрии, то вскользь. Наоборот, в курсе математического анализа работа с коническими сечениями приводится как пример, что в известной степени ослабляет внимание студента к самим кривым второго порядка.

Желательно, предложить учащимся задания, в которых работа с кривой второго порядка проводится так, что их вниманию в равной степени предлагаются вопросы, связанные с формой кривой, её расположению на декартовой плоскости, а также применению методов математического анализа, направленных на работу с неявными функциями. Отметим, что для улучшения образного восприятия кривых будут использоваться компьютерные программы, строящие эти кривые на экране.

При таком подходе естественным образом возникают задания, касающиеся не только кривых второго порядка, но и алгебраических кривых более высоких порядков. При этом чрезвычайно важным моментом является соединение геометрических образов и вычислений. Здесь, кстати, появляется возможность естественного перехода к сложным математическим теориям, таким как теория эллиптических функций и алгебраическая геометрия.

2. ПОСТРОЕНИЕ КРИВЫХ НА ЭКРАНЕ

Работая с теми или иными кривыми, различным образом описанными формулами, прежде всего желательно составить представление о поведении каждой из них



на декартовой плоскости. Образ этой кривой может облегчить решение целого ряда математическими вопросов. Рассмотрим те методы, которые будут использоваться для построения алгебраических кривых на экране компьютера. Программы будут написаны на языке программирования Small Basic. Перечислим несколько вариантов задания кривых. Начнём с явного описания функции.

Задание 1. Построить на экране график многочлена от одной переменной.

Решение. Для построения графика любой явно выраженной функции одной действительной переменной следует перенести на экран прямоугольный фрагмент бесконечной декартовой плоскости. Обозначим координаты на декартовой плоскости через $(x; y)$, а экранные координаты через $(xe; ye)$. Как правило отображаемая область содержит начало координат. Пусть ему на экране соответствует точка $(x_0; y_0)$. Кроме того, необходимо задать на экране масштаб. Это делается с помощью указания количества пикселей в единичном отрезке. Пусть этот параметр определяет значение переменной ed . Тогда переход от декартовых координат к экранным осуществляется формулами

$$xe = x_0 + ed \cdot x \text{ и } ye = y_0 + ed \cdot y.$$

При построении графика исходные вычисления проводятся с переменными $(x; y)$. После чего полученные координаты переводятся в экранные. Результат работы программы показан на рисунке 1.

```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
'Корни многочлена
c1 = -2
c2 = -1
c3 = 1
'Начало экранных координат
x0 = 300
y0 = 300
GraphicsWindow.FillEllipse(x0-5, y0-5, 10, 10)
GraphicsWindow.DrawLine(0, y0, 600, y0)
GraphicsWindow.DrawLine(x0, 0, x0, 600)
'Количество пикселей в единичном отрезке
ed = 100
'Сетка единичных квадратов
For x = -3 To 3 Step .01
For y = -3 To 3 Step 1
xe = x0 + ed * x
ye = y0 - ed * y
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "green")
EndFor
EndFor
For x = -3 To 3 Step 1
```



```
For y= -3 To 3 Step .01
xe=x0 + ed*x
ye=y0 - ed*y
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,"green")
EndFor
EndFor
'Выделение корней
xe = x0 + ed*c1
GraphicsWindow.FillEllipse(xe - 5, y0-5, 10, 10)
xe = x0 + ed*c2
GraphicsWindow.FillEllipse(xe - 5, y0-5, 10, 10)
xe = x0 + ed*c3
GraphicsWindow.FillEllipse(xe - 5, y0-5, 10, 10)
'Построение графика
For x = -3 To 3 Step .001
'Вычисление значений многочлена
y = (x - c1)*(x - c2)*(x - c3)
'Переход к экранной системе координат
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "black")
EndFor
```

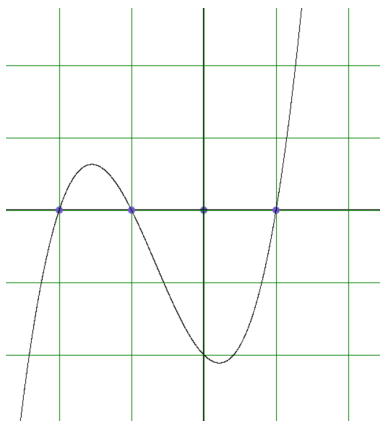


Рис. 1

Следующим способом описания кривых является их параметрическое задание.

Задание 2. Построить на экране график гиперболы, используя параметрическое задание с помощью гиперболических функций.

Решение. Как известно гиперболические синус и косинус задаются формулами:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \quad \text{Параметрические уравнения } x = a \cdot \operatorname{cht} \text{ и } y = b \cdot \operatorname{sht}$$



описывают гиперболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Отметим, что в языке Small Basic функция $y = e^x$ задаётся оператором: `exp = Math.Power(2.71828, x)`. Результат работы программы показан на рисунке 2.

```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
x0 = 300
y0 = 300
ed = 50
a = 1
b = 1
GraphicsWindow.DrawLine(0,600,600,0)
GraphicsWindow.DrawLine(0,0,600,600)
For x = -6 To 6 Step .001
  ex1 = Math.Power(2.71828, x)
  ex2 = Math.Power(2.71828,-x)
  cn = (ex1 + ex2)/2
  sn = (ex1 - ex2)/2
  xe = x0 + a*cn*ed
  ye = y0 - b*sn*ed
  GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,"")
  xe = x0 - a*cn*ed
  ye = y0 - b*sn*ed
  GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,"")
EndFor
```

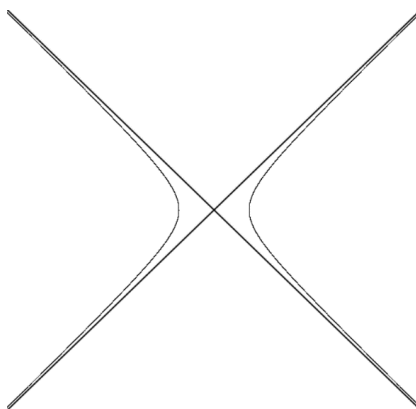


Рис. 2

Наконец, рассмотрим метод построения кривых, заданных неявным уравнением.

Задание 3. Построить на экране кривую четвёртого порядка, описываемую формулой $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$.



Решение. Соответствующая кривая называется лемнискатой Бернулли [16]. Соответствующей кривой второго порядка является сечение горизонтальной плоскостью $z = 0$ поверхности, описываемой функцией от двух переменных $z = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$. Будем сканировать прямоугольник на декартовой плоскости и отмечать точки, в которых абсолютное значение переменной z достаточно мало. Кривая, соответствующая значению параметра $a = 2$, показана на рисунке 3.

```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
'Параметр лемнискаты
a = 2
'Начало экранных координат
x0 = 300
y0 = 300
GraphicsWindow.FillEllipse(x0-5, y0-5, 10, 10)
GraphicsWindow.DrawLine(0, y0, 600, y0)
GraphicsWindow.DrawLine(x0, 0, x0, 600)
'Количество пикселей в единичном отрезке
ed = 100
'Сетка единичных квадратов
For x = -3 To 3 Step .01
For y = -3 To 3 Step 1
xe = x0 + ed*x
ye = y0 - ed*y
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "green")
EndFor
EndFor
For x = -3 To 3 Step 1
For y = -3 To 3 Step .01
xe = x0 + ed*x
ye = y0 - ed*y
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "green")
EndFor
EndFor
'Сканирование декартовой плоскости
For x = -3 To 3 Step .001
For y = -3 To 3 Step .001
'Вычисление значений функции z = F(x, y)
z = (x*x + y*y)*(x*x + y*y) - 2*a*a*(x*x - y*y)
'Переход к экранной системе координат
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
If z < .05 And z > -.05 Then
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "black")
EndIf
EndFor
EndFor
```

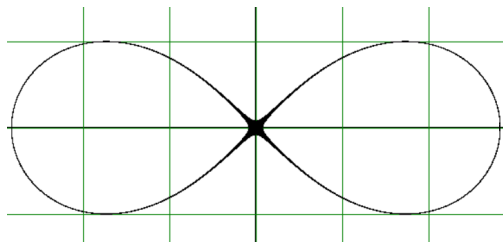


Рис. 3

Задание 4. Повернуть лемнискату Бернулли на угол $\frac{\pi}{4}$.

Решение. Используем формулы поворота декартовой плоскости на угол α :

$$x_1 = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha,$$

$$y_1 = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha.$$

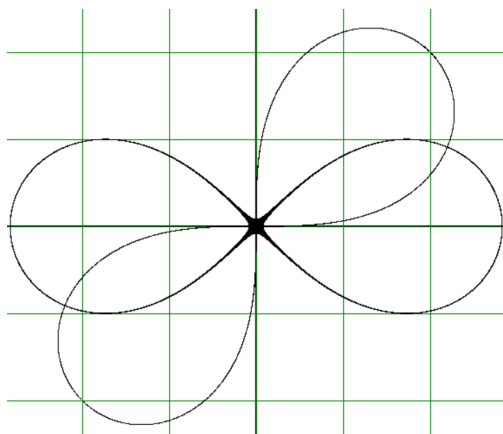


Рис. 4

В предыдущую программу добавим следующий цикл.

```
Pi = Math.Pi
sn = Math.Sin(Pi/4)
cs = Math.Cos(Pi/4)
For x = -3 To 3 Step .001
For y = -3 To 3 Step .001
z = (x*x + y*y)*(x*x + y*y) - 2*a*a*(x*x - y*y)
If Math.Abs(z)<.01 Then
x1 = x*cs - y*sn
y1 = x*sn + y*cs
xe = x0 + ed*x1
ye = y0 - ed*y1
```



```
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,"")  
EndIf  
EndFor  
EndFor
```

Результат работы расширенной программы показан на рисунке 4.

Перейдём к более подробному рассмотрению различных классов алгебраических кривых.

3. ПРЯМЫЕ

Прямые и окружности изучаются в школе. По этой причине они наиболее известны студентам. Однако в курсе высшей математики появляются новые возможности описания этих линий. В частности, в отношении прямых кроме явного описания начинают применяться параметрическое и неявное описание. Именно с прямых мы и начнём. Но прежде сделаем пояснение. Статья называется «Алгебраические кривые в преподавании высшей математики». Уместно ли рассматривать в ней прямые? Дело в том, что более правильно было бы говорить об алгебраических линиях, то есть объектах, которые описываются алгебраическими уравнениями. Прямые, естественно, являются именно такими объектами.

Важным обстоятельством является то, что в курсе аналитической геометрии широко используются идеи векторной алгебры. По этой причине задания, связанные с различными способами описания прямых, должны, по возможности, использовать понятие вектора.

Задание 5. На плоскости заданы точка $A(x_0; y_0)$ и исходящий из неё вектор $V(a; b)$. Построить египетский прямоугольный треугольник, прямой угол которого расположен в вершине A . При этом катет, перпендикулярный вектору $(a; b)$, следует построить с помощью неявного уравнения прямой, второй катет – с помощью параметрических уравнений прямой, а гипотенуза – с помощью канонического (школьного) уравнения прямой

Решение. Длины катетов египетского треугольника относятся друг к другу как 4 к 3. Уравнение прямой, на которой лежит первый катет, может быть получено с помощью скалярного произведения: $a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$. После раскрытия скобок это уравнение приводится к виду $ax + by + c = 0$, где свободный член вычисляется по формуле $c = -a \cdot x_0 - b \cdot y_0$. Параметрическое уравнение прямой, на которой лежит второй катет, можно интерпретировать как вычисление координат концов вектора $\lambda \cdot V$ при всевозможных значениях параметра λ .

Вектор W , перпендикулярный вектору $V(a; b)$, имеет координаты $W(-b; a)$. Этот вектор направлен вдоль первого катета. Пусть первый катет по длине имеет длину в четыре раза большую, чем длина вектора W . Таким образом, первый катет проектируется на отрезок $[x_0; x_0 - 4b]$. Ординату второго конца этого катета y_1 можно получить, подставив в уравнение прямой абсциссу $x_1 = x_0 - 4b$.



Параметрические уравнения прямой, на которой лежит второй катет, имеют вид $x = x_0 + \lambda \cdot a$ и $y = y_0 + \lambda \cdot b$. Первый катет по длине имеет длину в три раза большую, чем длина вектора V . Координаты $(x_2; y_2)$ второго конца этого катета можно получить с помощью параметрических уравнений при $\lambda = -3$.

Каноническое уравнение прямой, на которой лежит гипотенуза, можно получить используя тот факт, что эта прямая проходит через точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$.

Все эти соображения позволяют написать программу. Результат работы программы показан на рисунке 5.

```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
pi = Math.Pi
'Исходные данные
xx0 = -2
yy0 = .5
a = Math.Cos(2*pi/3)
b = Math.Sin(2*pi/3)
xe = x0 + (xx0+a)*ed
ye = y0 - (yy0+b)*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe-5, ye-5,10,10)
c = - a*xx0 - b*yy0
xx1 = xx0 + 4*b
yy1 = -(a*xx1 + c)/b
'Начало экранных координат
x0 = 300
y0 = 300
GraphicsWindow.FillEllipse(x0-5, y0-5,10,10)
GraphicsWindow.DrawLine(0, y0,600, y0)
GraphicsWindow.DrawLine(x0,0, x0,600)
'Количество пикселей в единичном отрезке
ed = 100
'Сетка единичных квадратов
For x= -3 To 3 Step .01
For y= -3 To 3 Step 1
xe=x0 + ed*x
ye=y0 - ed*y
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,"green")
EndFor
EndFor
For x= -3 To 3 Step 1
For y= -3 To 3 Step .01
xe=x0 + ed*x
ye=y0 - ed*y
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,"green")
EndFor
EndFor
```



```
'Первый катет
xe = x0 + xx0*ed
ye = y0 - yy0*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe-5, ye-5,10,10)
xe = x0 + xx1*ed
ye = y0 - yy1*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe-5, ye-5,10,10)
'Сканирование декартовой плоскости
For x = xx0 To xx1 Step .01
For y = -3 To 3 Step .01
'Вычисление значений функции z = F(x, y)
z = a*x + b*y + c
'Переход к экранной системе координат
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
If z<.01 And z>-.01 Then
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "blake")
EndIf
EndFor
EndFor
'Второй катет
xx2 = xx0 + a*(-3)
yy2 = yy0 + b*(-3)
xe = x0 + xx2*ed
ye = y0 - yy2*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe-5, ye-5,10,10)
For lm = 0 To -3 Step -.01
x = xx0 + lm*a
y = yy0 + lm*b
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "blake")
EndFor
'Гипотенуза
k = (yy2 - yy1)/(xx2 - xx1)
bb = yy1 - k*xx1
For x = xx2 To xx1 Step .01
y = k*x + bb
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "blake")
EndFor
```

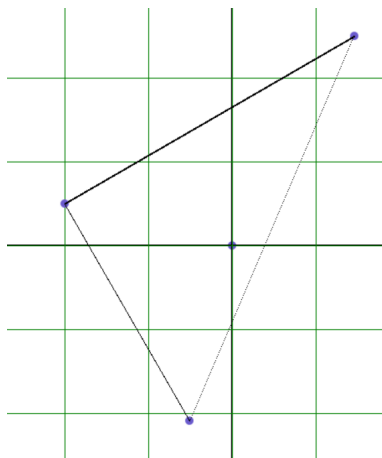


Рис. 5

Рассмотренное задание несколько тяжеловесно из-за того, что используются три различных метода построения прямых. Впрочем, оно показывает, что даже внимательное рассмотрение прямых может представить определённые трудности для студентов.

На практике такое сложное задание обычно разбивают на несколько простых. Как известно, стандартными заданиями, связанными с прямыми, являются следующие.

1. Даны координаты двух точек на плоскости. Получить уравнение прямой, проходящей через эти точки. (Эта задача включена в предыдущее задание).
2. Даны уравнения двух прямых. Найти точку пересечения.
3. Разделить отрезок, соединяющий две заданные точки в данном отношении.

Задание 6. Разделить катеты и гипотенузу египетского треугольника соответственно на 3, 4 и 5 равных отрезков.

Решение. Используем параметрические уравнения катетов и гипотенузы. В предыдущую программу достаточно добавить три цикла.

‘Разбиение сторон

For t = 0 To 1 Step 1/4

x = xx0 + (xx1 - xx0)*t

y = yy0 + (yy1 - yy0)*t

xe = x0 + x*ed

ye = y0 - y*ed

GraphicsWindow.FillEllipse(xe - 5, ye - 5, 10, 10)

EndFor

For t = 0 To 1 Step 1/3

x = xx0 + (xx2 - xx0)*t

y = yy0 + (yy2 - yy0)*t

xe = x0 + x*ed



```
ye = y0 - y*ed  
GraphicsWindow.FillEllipse(xe - 5, ye - 5, 10, 10)  
EndFor  
For t = 0 To 1 Step 1/5  
x = xx2 + (xx1 - xx2)*t  
y = yy2 + (yy1 - yy2)*t  
xe = x0 + x*ed  
ye = y0 - y*ed  
GraphicsWindow.FillEllipse(xe - 5, ye - 5, 10, 10)  
EndFor
```

Рассмотрим такое новое для студентов понятие как пучок прямых [17]. Пучком прямых называется либо множество прямых, проходящих через одну точку (пучок первого типа), либо множество параллельных прямых (пучок второго типа). Отметим, что с точки зрения проективной геометрии параллельные прямые проходят через одну общую бесконечно удалённую точку. Пучок задан, если задана соответствующая точка. Однако возможно и другое определение пучка. Если заданы две прямые пучка, то задан и весь пучок.

Пусть на декартовой плоскости заданы неявные уравнения двух прямых, а именно: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Координаты точки пересечения неизвестны. Их можно найти, решив соответствующую систему двух линейных уравнений. Но оказывается, что и не зная этих координат, можно найти уравнение любой прямой из этого пучка. Дело в том, что линейная комбинация этих уравнений

$$\lambda_1 \cdot (a_1x + b_1y + c_1) + \lambda_2 \cdot (a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

в центре пучка обращается в ноль, а, значит, описывает некоторую прямую этого пучка.

Задание 7. Найти уравнения вертикальной и горизонтальной прямых пучка.

Решение. Понятно, что в конечном счёте речь идёт о решении системы двух линейных уравнений, но алгебраические преобразования при этом получают геометрический характер. Пусть $\lambda_1 = b_2$ и $\lambda_2 = -b_1$, тогда уравнение принимает вид:

$$(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \cdot x = -(c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1). \text{ Следовательно, } x = -\frac{c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}.$$

Если положить $\lambda_1 = a_2$ и $\lambda_2 = -a_1$, то получаем, что $y = \frac{c_1 \cdot a_2 - c_2 \cdot a_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}$. Фактически получе-

ны формулы Крамера. Ниже приводится программа, которая строит четыре прямых из пучка (рис. 6).

```
GraphicsWindow.Width = 600  
GraphicsWindow.Height = 600  
'Коэффициенты прямых  
a1 = 1
```



```
b1 = 2
c1 = -2
a2 = -1
b2 = 3
c2 = 1
'Начало экранных координат
x0 = 300
y0 = 300
GraphicsWindow.FillEllipse(x0-5, y0-5, 10, 10)
GraphicsWindow.DrawLine(0, y0, 600, y0)
GraphicsWindow.DrawLine(x0, 0, x0, 600)
'Количество пикселей в единичном отрезке
ed = 100
'Сетка единичных квадратов
For x = -3 To 3 Step .01
For y = -3 To 3 Step 1
xe = x0 + ed*x
ye = y0 - ed*y
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "green")
EndFor
EndFor
For x = -3 To 3 Step 1
For y = -3 To 3 Step .01
xe = x0 + ed*x
ye = y0 - ed*y
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "green")
EndFor
EndFor
'Построение пучка
xp = -(c1*b2 - c2*b1)/(a1*b2 - a2*b1)
yp = (c1*a2 - c2*a1)/(a1*b2 - a2*b1)
For x = -3 To 3 Step .01
For y = -3 To 3 Step .01
z1 = a1*x + b1*y + c1
z2 = a2*x + b2*y + c2
If Math.Abs(z1) < .01 Or Math.Abs(z2) < .01 Then
xe = x0 + ed*x
ye = y0 - ed*y
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "")
EndIf
EndFor
EndFor
xe = x0 + ed*xp
ye = y0 - ed*yp
GraphicsWindow.DrawLine(xe, 0, xe, 600)
GraphicsWindow.DrawLine(0, ye, 600, ye)
GraphicsWindow.FillEllipse(xe - 5, ye - 5, 10, 10)
```

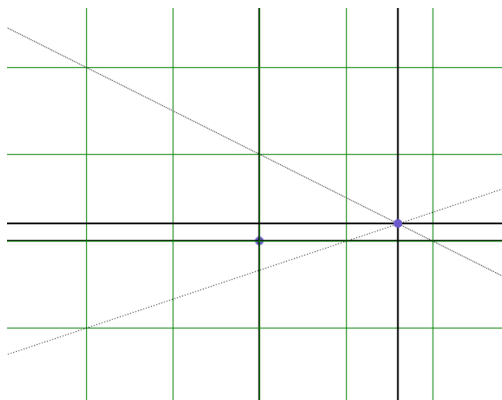


Рис. 6

4. ОКРУЖНОСТИ

Уравнение окружности является, по-видимому, наиболее прозрачным, поскольку явственно выражает факт равной удалённости точек окружности от её центра. Это уравнение является основным примером, объясняющим различие между явным и неявным заданием функции. Окружность при этом рассматривается как совокупность двух ветвей, каждая из которых может быть явно описана формулами $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Используя их, окружность можно построить программой, которая строит два графика.

Что касается параметрических уравнений, описывающих окружность, то они связаны с определением на всём множестве действительных чисел таких важнейших функций математического анализа, как синус и косинус. Таким образом, использование окружности как алгебраической кривой даже по этим причинам совершенно обязательно в курсе высшей математики.

Следует отметить, что параметрические уравнения окружности являются источником замечательных образов. Прежде всего следует назвать правильные многоугольники и звёзды. Более того, именно на примере окружностей можно увидеть, как одни алгебраические кривые преобразовываются в другие, и то, как они позволяют создавать новые способы описания любых алгебраических кривых, например, в результате введения новых систем координат.

Задание 8. Построить с помощью параметрических уравнений окружности окружность, вписанный в неё девятиугольник, и девятиугольную звезду, у которой вершины девятиугольника соединяются через четыре.

Решение. Все эти образы можно реализовать с помощью соответствующей программы. Результат её работы показан на рисунке 7.

```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
pi = Math.Pi
```



```
n = 9
m = 4
x0 = 300
y0 = 300
r = 250
For u = pi/2 To 2*pi + pi/2 Step pi/500
  x = x0 + r* Math.Cos(u)
  y = y0 - r* Math.Sin(u)
  GraphicsWindow.SetPixel(x, y, "")
EndFor
For u = pi/2 To 2*pi + pi/2 Step 2*pi/n
  x1 = x0 + r* Math.Cos(u)
  y1 = y0 - r* Math.Sin(u)
  x2 = x0 + r* Math.Cos(u+2*pi/n)
  y2 = y0 - r* Math.Sin(u+2*pi/n)
  x3 = x0 + r* Math.Cos(u+m*2*pi/n)
  y3 = y0 - r* Math.Sin(u+m*2*pi/n)
  GraphicsWindow.DrawLine(x1, y1, x2, y2)
  GraphicsWindow.DrawLine(x1, y1, x3, y3)
EndFor
```

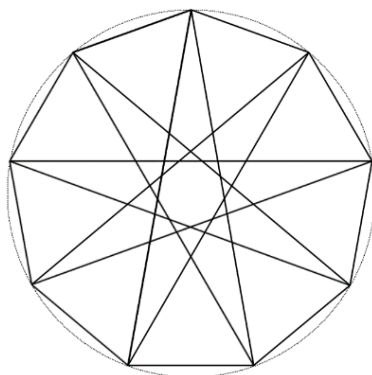


Рис. 7

Кроме того, окружность порождает такую кривую как эллипс, поскольку эллипс является сжатой окружностью. Сжатие декартовой плоскости мы будем проводить по вертикали. При этом все вертикальные расстояния умножаются на одно и то же число, называемое коэффициентом сжатия, а горизонтальные расстояния сохраняются. На картинах по этой причине круглые предметы имеют эллиптические очертания. В частности, это имеет место при изображении цилиндров, призм и пирамид.

Задание 9. Построить с помощью параметрических уравнений сжатой окружности усечённую пирамиду.

Решение. Результат работы очередной программы показан на рисунке 8.

```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
pi = Math.Pi
u0 = pi/7
k = 1/3
n = 7
x0 = 300
y0 = 450
r1 = 250
r2 = 100
h = 400
For u = pi/2 To 2*pi + pi/2 Step 2*pi/n
x1 = x0 + r1 * Math.Cos(u)
y1 = y0 - k*r1 * Math.Sin(u)
x2 = x0 + r1 * Math.Cos(u+2*pi/n)
y2 = y0 - k*r1 * Math.Sin(u+2*pi/n)
x3 = x0 + r2 * Math.Cos(u)
y3 = y0 - k*r2 * Math.Sin(u) - h
x4 = x0 + r2 * Math.Cos(u+2*pi/n)
y4 = y0 - k*r2 * Math.Sin(u+2*pi/n) - h
GraphicsWindow.DrawLine(x1, y1, x2, y2)
GraphicsWindow.DrawLine(x3, y3, x4, y4)
GraphicsWindow.DrawLine(x1, y1, x3, y3)
EndFor
```

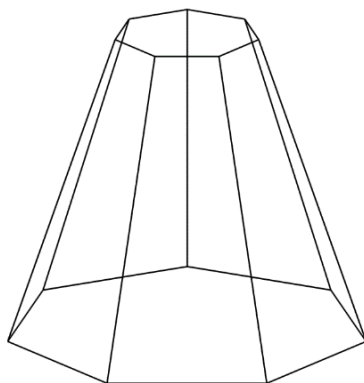


Рис. 8

Задание 10. При сжатии окружности её перпендикулярные диаметры переходят в сопряжённые диаметры эллипса. С помощью программы продемонстрировать этот факт.

Решение. Результат работы программы показан на рисунке 9.



```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
pi = Math.Pi
u0 = pi/5
k = 1/3
x0 = 300
y0 = 470
r = 150
h = 300
y00 = y0 - h
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0 - r, y00 - r, 2*r, 2*r)
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0 - r, y0 - k*r, 2*r, 2*k*r)
x1 = x0 + r* Math.Cos(u0)
y1 = y00 - r* Math.Sin(u0)
x2 = x0 + r* Math.Cos(u0 + pi)
y2 = y00 - r* Math.Sin(u0 + pi)
GraphicsWindow.DrawLine(x1, y1, x2, y2)
x3 = x0 + r* Math.Cos(u0)
y3 = y0 - k*r* Math.Sin(u0)
x4 = x0 + r* Math.Cos(u0 + pi)
y4 = y0 - k*r* Math.Sin(u0 + pi)
GraphicsWindow.DrawLine(x3, y3, x4, y4)
GraphicsWindow.DrawLine(x1, y1, x3, y3)
GraphicsWindow.DrawLine(x2, y2, x4, y4)
x1 = x0 + r* Math.Cos(u0+pi/2)
y1 = y00 - r* Math.Sin(u0+pi/2)
x2 = x0 + r* Math.Cos(u0+3*pi/2)
y2 = y00 - r* Math.Sin(u0+3*pi/2)
GraphicsWindow.DrawLine(x1, y1, x2, y2)
x3 = x0 + r* Math.Cos(u0+pi/2)
y3 = y0 - k*r* Math.Sin(u0+pi/2)
x4 = x0 + r* Math.Cos(u0+3*pi/2)
y4 = y0 - k*r* Math.Sin(u0+3*pi/2)
GraphicsWindow.DrawLine(x3, y3, x4, y4)
GraphicsWindow.DrawLine(x1, y1, x3, y3)
GraphicsWindow.DrawLine(x2, y2, x4, y4)
GraphicsWindow.DrawLine(x0-r, y00, x0-r, y0)
GraphicsWindow.DrawLine(x0+r, y00, x0+r, y0)
```

Многие стандартные задачи аналитической геометрии связаны с взаимным расположением точек, прямых и окружностей. Рассмотрим некоторые из них.

Прежде всего, вспомним о полярной системе координат. Если декартова система координат возникает на основе рассмотрения двух взаимно перпендикулярных пучков параллельных прямых, то полярная система координат строится с помощью пучка концентрических окружностей [18] и пучка прямых с центром, совпадающим с центром семейства концентрических окружностей.

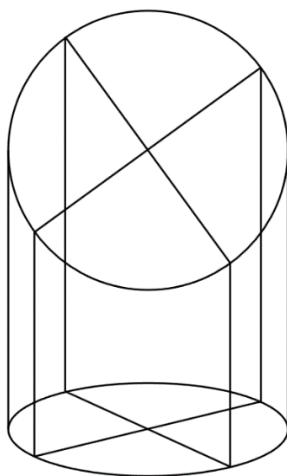


Рис. 9

Задание 11. В полярной системе координат построить одну из алгебраических кривых из семейства роз Гвидо Гранди [16].

Решение. В декартовой системе координат описание роз Гранди весьма сложно. Зато в полярной системе координат оно является очень простым: $r = \sin(k \cdot \alpha)$. Результат работы программы показан на рисунке 10.

```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
pi = Math.Pi
k = 7
x0 = 300
y0 = 300
GraphicsWindow.FillEllipse(x0-5, y0-5, 10, 10)
'Пучок окружностей
For r = 25 To 250 Step 25
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0 - r, y0 - r, 2*r, 2*r)
EndFor
'Пучок прямых
For al = 0 To pi Step pi/10
x1 = x0 + 250* Math.Cos(al)
y1 = y0-250* Math.Sin(al)
x2 = x0 + 250* Math.Cos(al + pi)
y2 = y0-250* Math.Sin(al + pi)
GraphicsWindow.DrawLine(x1, y1, x2, y2)
EndFor
'Роза или Цветик-семицветик
For al = 0 To pi Step pi/10000
```



```

x = x0 + 250* Math.Cos(al)*Math.Sin(k*al)
y = y0-250* Math.Sin(al)*Math.Sin(k*al)
GraphicsWindow.FillEllipse(x-2, y-2, 4, 4)
EndFor

```

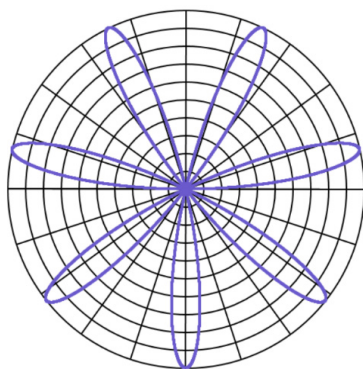


Рис. 10

Перейдём к рассмотрению пучков окружностей. Определение пучка окружностей с геометрических позиций даётся с помощью понятия радикальной оси [19]. Но можно его дать и чисто алгебраически с помощью понятия линейной комбинации, как это было сделано для прямых.

Пусть на декартовой плоскости заданы две окружности $(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = r_1^2$ и $(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 = r_2^2$. Пучком окружностей называется множество кривых вида

$$\lambda_1 \cdot ((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - r_1^2) + \lambda_2 \cdot ((x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - r_2^2).$$

Задание 12. Доказать, что линейная комбинация двух уравнений окружностей также описывает окружность, центр которой находится на линии центров двух исходных окружностей.

Задание 13. Вывести уравнение радикальной оси.

Решение. Радиус окружностей в связке может быть сколь угодно большим. Окружность с бесконечно большим радиусом превращается в прямую. Возникает вопрос: можно ли с помощью одной из линейных комбинаций получить прямую? Очевидно, что квадраты x и y уничтожаются при $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$. Уравнение соответствующей прямой, называемой радикальной осью, описывает прямую перпендикулярную линии центров двух исходных окружностей.

Задание 14. Написать программу, которая строит пучок окружностей по двум заданным исходным окружностям.

Решение. Пучки окружностей бывают трёх видов в зависимости от того, пересекаются, касаются или не имеют общих точек исходные окружности. Все три варианта



показаны на рисунках 11, 12 и 13. Названия этих пучков таковы: пучок пересекающихся окружностей, пучок касающихся окружностей и пучок непересекающихся окружностей. Для простоты вычислений центры исходных окружностей расположены на одной горизонтали и применён метод сканирования плоскости.

```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
x0 = 300
y0 = 300
ed = 100
x1 = -1
y1 = 0
r1 = 1.75
x2 = 1.5
y2 = 0
r2 = 1
xrad = (x2*x2 - x1*x1 + y2*y2 - y1*y1 + r1*r1 - r2*r2)/(2*(x2 - x1))
xe = x0 + ed*xrad
GraphicsWindow.DrawLine(xe, 0, xe, 600)
xe = x0 + ed*x1
ye = y0 - ed*y1
re = r1*ed
GraphicsWindow.DrawEllipse(xe - (re - 1), ye - (re - 1), 2*(re - 1), 2*(re - 1))
GraphicsWindow.DrawEllipse(xe - re, ye - re, 2*re, 2*re)
GraphicsWindow.DrawEllipse(xe - (re + 1), ye - (re + 1), 2*(re + 1), 2*(re + 1))
xe = x0 + ed*x2
ye = y0 - ed*y2
re = r2*ed
GraphicsWindow.DrawEllipse(xe - (re - 1), ye - (re - 1), 2*(re - 1), 2*(re - 1))
GraphicsWindow.DrawEllipse(xe - re, ye - re, 2*re, 2*re)
GraphicsWindow.DrawEllipse(xe - (re + 1), ye - (re + 1), 2*(re + 1), 2*(re + 1))
For t = -1 To 2 Step .1
For x = -3 To 3 Step .005
For y = -3 To 3 Step .005
z1 = x*x - 2*x1*x + x1*x1 + y*y - 2*y1*y + y1*y1 - r1*r1
z2 = x*x - 2*x2*x + x2*x2 + y*y - 2*y2*y + y2*y2 - r2*r2
z = z1 + t*(z2 - z1)
If Math.Abs(z)<.01 Then
xe = x0 + ed*x
ye = y0 - ed*y
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "")
EndIf
EndFor
EndFor
EndFor
```

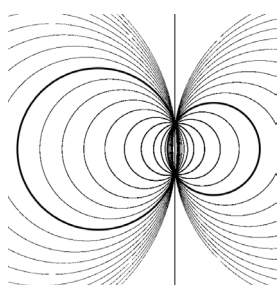


Рис. 11

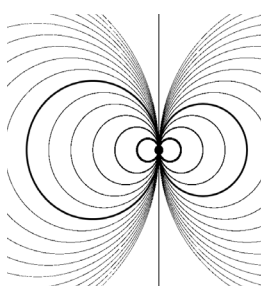


Рис. 12

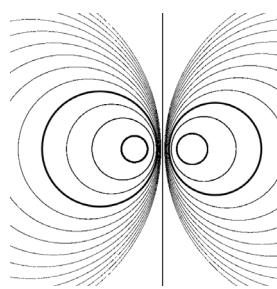


Рис. 13

Задание 15. Написать программу для построения пучков окружностей при произвольном положении исходных окружностей.

Решение. Программа в целом остаётся прежней. Усложняется только построение радикальной оси.

Задание 16. Показать, что в пучке непересекающихся окружностей имеется две предельные точки, в которые стягиваются окружности, убывающего радиуса.

Решение. Предположим, что предельные точки существуют и имеют координаты $(-a; 0)$ и $(a; 0)$. Тогда они должны рассматриваться как окружности нулевого радиуса. Их уравнения имеют вид $(x - a)^2 + y^2 = 0$ и $(x + a)^2 + y^2 = 0$. Любая другая окружность из пучка непересекающихся окружностей может быть получена как линейная комбинация с коэффициентами λ_1 и λ_2 .

Достаточно простые преобразования позволяют получить уравнение, которое имеет вид

$$x^2 - 2ax \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} + y^2 + a^2 = 0.$$

После дополнительных преобразований уравнение примет вид

$$(x - a \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2})^2 + y^2 = -4a^2 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}.$$

В правой части уравнения стоит квадрат радиуса соответствующей окружности. Поскольку он должен быть положительным, коэффициенты λ_1 и λ_2 должны иметь разный знак. Теперь можно написать программу, которая построит семейство окружностей, описываемых последним из уравнений. Легко понять, что вертикальная радикальная ось пучка проходит через начало декартовой системы координат. Построение пучка при этом проводится не сканированием, а с помощью команды, которая строит окружность по координатам центра и радиусу. Результат работы программы показан на рисунке 14.

```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
x0 = 300
y0 = 300
ed = 100
a = 1
GraphicsWindow.FillEllipse(x0 + a*ed - 5, y0-5, 10, 10)
GraphicsWindow.FillEllipse(x0 - a*ed - 5, y0-5, 10, 10)
GraphicsWindow.DrawLine(x0, 0, x0, 600)
For l = 0 To 1 Step .045
    lm1 = -1
    lm2 = 1
    xe = x0 + ed*a*(lm1 - lm2)/(lm1 + lm2)
    q = Math.SquareRoot(-lm1*lm2)
    r = 2*a*q/(lm1 + lm2)*ed
    GraphicsWindow.DrawEllipse(xe - r, y0 - r, 2*r, 2*r)
    lm1 = 1
    lm2 = -1
    xe = x0 + ed*a*(lm1 - lm2)/(lm1 + lm2)
    q = Math.SquareRoot(-lm1*lm2)
    r = 2*a*q/(lm1 + lm2)*ed
    GraphicsWindow.DrawEllipse(xe - r, y0 - r, 2*r, 2*r)
EndFor
```

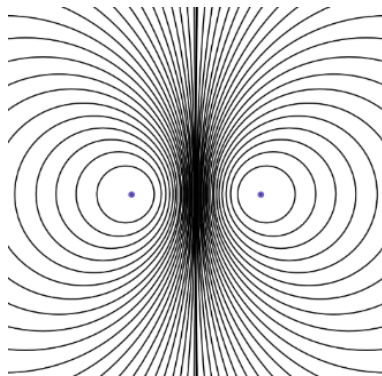


Рис. 14

Задание 17. Предположим, что предельные точки из предыдущего задания с координатами $(-a; 0)$ и $(a; 0)$ одновременно являются точками пересечения окружностей пучка пересекающихся окружностей. Построить оба пучка одновременно. Эти пучки называются сопряжёнными.

Решение. Получим уравнения окружностей, проходящих через точки $(-a; 0)$ и $(a; 0)$. Очевидно, что их центры лежат на оси ординат, то есть имеют координаты



$(0; y_1)$. Квадрат радиуса такой окружности равен $a^2 + y_1^2$. Чтобы построить сопряжённые пучки, к предыдущей программе добавим следующий цикл. Результат работы программы показан на рисунке 15.

```
GraphicsWindow.DrawLine(0, y0, 600, y0)
For y1 = -3 To 3 Step .25
  r2 = a*a + y1*y1
  ye = y0 - y1*ed
  r = Math.SquareRoot(r2)*ed
  GraphicsWindow.DrawEllipse(x0 - r, ye - r, 2*r, 2*r)
EndFor
```

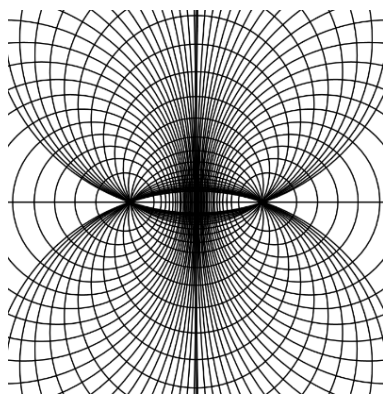


Рис. 15

Задание 18. Доказать, что два сопряжённых пучка являются взаимно ортогональными, то есть каждая окружность пересекающегося пучка ортогональна каждой окружности непересекающегося пучка.

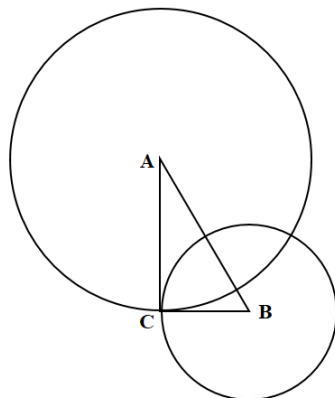


Рис. 16



Решение. Пусть две ортогональных окружности с центрами А и В пересекаются в точке С. Тогда треугольник АВС является прямоугольным (рис. 16). Таким образом, квадрат отрезка АВ, соединяющего центры равен сумме квадратов радиусов окружностей.

Для нашего случая это обстоятельство выражается уравнением:

$$\left(a \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^2 + y_1^2 = -4a^2 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} + a^2 + y_1^2.$$

Доказательство не составляет труда.

Задание 19. Найти пучок, ортогональный пучку касающихся окружностей. Напишите программу для построения ортогональных пучков.

Кривые второго порядка. Приступим к изучению любых кривых второго порядка, а не только окружностей.

Задание 20. Построить на экране кривую второго порядка, описываемую формулой $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$.

Решение. Сечение поверхности, описываемой функцией от двух переменных $z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$, горизонтальной плоскостью $z = 0$ является соответствующей кривой второго порядка. Естественно, в программе будет применено сканирование декартовой плоскости.

```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
'Коэффициенты кривой второго порядка
a11 = 2
a12 = 3
a22 = 1
b1 = .5
b2 = -2
c = 1
'Начало экранных координат
x0 = 300
y0 = 300
GraphicsWindow.FillEllipse(x0-5, y0-5, 10, 10)
GraphicsWindow.DrawLine(0, y0, 600, y0)
GraphicsWindow.DrawLine(x0, 0, x0, 600)
'Количество пикселей в единичном отрезке
ed = 100
'Сетка единичных квадратов
For x= -3 To 3 Step .01
For y= -3 To 3 Step 1
xe=x0 + ed*x
ye=y0 - ed*y
```



```
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "green")
EndFor
EndFor
For x = -3 To 3 Step 1
For y = -3 To 3 Step .01
xe = x0 + ed*x
ye = y0 - ed*y
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "green")
EndFor
EndFor
'Сканирование декартовой плоскости
For x = -3 To 3 Step .01
For y = -3 To 3 Step .01
'Вычисление значений функции z = F(x, y)
z = a11*x*x + 2*a12*x*y + a22*y*y + 2*b1*x + 2*b2*y + c
'Переход к экранной системе координат
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
If z < .05 And z > -.05 Then
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "blake")
EndIf
EndFor
EndFor
```

Результат работы программы показан на рисунке 17. В данном конкретном случае кривая оказалась гиперболой. Но эта же программа при смене коэффициентов построит любую кривую второго порядка, в том числе и вырожденную.

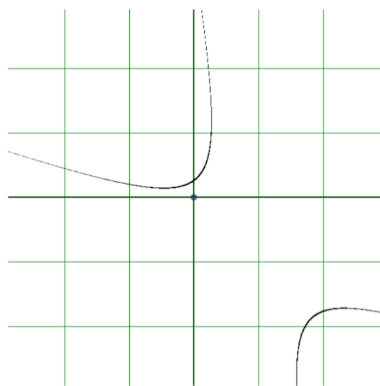


Рис. 17

Задание 21. Найти центр кривой второго порядка, описываемой формулой $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$.



Решение. В любом курсе аналитической геометрии рассматриваются канонические уравнения кривых второго порядка. Такой раздел аналитической геометрии как «Общая теория кривых второго порядка» рассматривается далеко не во всех курсах аналитической геометрии. Но именно в этом разделе рассматриваются методы работы с общим уравнением соответствующих кривых. Студент, работающий над заданием, подобным данному, должен обратиться к подробному курсу аналитической геометрии, например, [20].

Для нахождения координат центра кривой второго порядка $(x_c; y_c)$ нужно решить систему двух линейных уравнений, называемых уравнениями центра:

$$\begin{aligned}a_{11}x + a_{12}y + b_1 &= 0, \\a_{12}x + a_{22}y + b_2 &= 0.\end{aligned}$$

Для построения асимптот используется уравнение

$$a_{11} \cdot \alpha^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot \alpha \cdot \beta + a_{22} \cdot \beta^2 = 0.$$

Координаты $(\alpha; \beta)$ задают вектор, указывающий направление асимптот (в случае эллипса мнимых). Если обозначить отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ через λ , то с помощью квадратного уравнения можно получить два вектора $(\lambda_1; 1)$ и $(\lambda_2; 1)$, которые задают направление асимптот, исходящих из центра кривой второго порядка $(x_c; y_c)$. Таким образом, к предыдущей программе следует добавить новые строки. Результат работы расширенной программы показан на рисунке 18.

```
'Центр кривой второго порядка
xc = -(b1*a22 - b2*a12)/(a11*a22 - a12*a12)
yc = (b1*a12 - b2*a11)/(a11*a22 - a12*a12)
xe = x0 + xc*ed
ye = y0 - yc*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe - 5, ye - 5, 10,10)
'Асимптоты
d2 = a12*a12 - a11*a22
d = Math.Sqrt(d2)
lm1 = (-a12 + d)/a11
lm2 = (-a12 - d)/a11
For t = -7 To 7 Step .001
  xa = xc - t*lm1
  ya = yc - t
  xe = x0 + xa*ed
  ye = y0 - ya*ed
  GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,"")
  xa = xc - t*lm2
  ya = yc - t
```



```
xe = x0 + xa*ed  
ye = y0 - ya*ed  
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "")  
EndFor
```

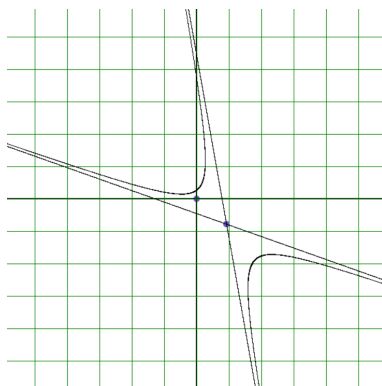


Рис. 18

Задание 22. Построить касательную к эллипсу в заданной точке.

Решение. Проведём два перпендикулярных диаметра окружности АВ и CD (рис. 19).

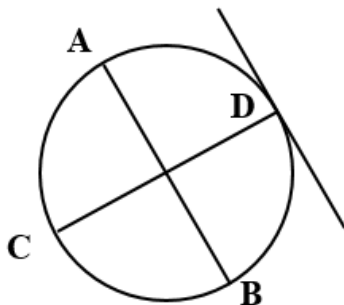


Рис. 19

Тогда касательная к окружности в точке D параллельна диаметру АВ. Если под-
вергнуть окружность сжатию, то перпендикулярные диаметры окружности перей-
дут в сопряжённые диаметры эллипса. Таким образом, чтобы провести касательную
к эллипсу в точке D, нужно определить направление диаметра, сопряжённого к диа-
метру, проходящему через D. Касательная к эллипсу будет параллельна сопряжённо-
му диаметру. На основании этих рассуждений можно написать программу. Результат
её работы показан на рисунке 20.

```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
pi = Math.Pi
x0 = 300
y0 = 300
ed = 100
a = 2
b = 1
ug = 2*pi/7
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0 - a*ed, y0 - b*ed, 2*a*ed, 2*b*ed)
'Точка на эллипсе
xd = a* Math.Cos(ug)
yd = b* Math.Sin(ug)
xde = x0 + xd*ed
yde = y0 - yd*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xde - 5, yde - 5, 10, 10)
'Направление касательной
p = ed*a* Math.Cos(ug + pi/2)
q = ed*b* Math.Sin(ug + pi/2)
'Касательная
For t = -3 To 3 Step .001
xe = xde + p*t
ye = yde - q*t
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "")
EndFor
```

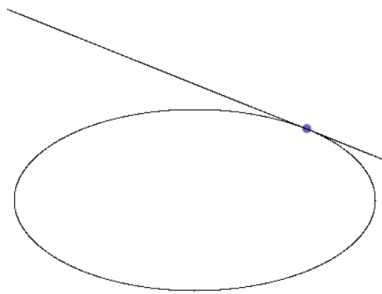


Рис. 20

Задание 23. Доказать, что касательная к эллипсу является биссектрисой угла, смежного с углом между фокальными радиусами.

Решение. Для доказательства используем метод Роберваля, основанный на идеях кинематики [21]. Скорость точки, движущейся по кривой, направлена по касательной к этой кривой. В случае эллипса эту скорость MC можно разложить на две составляющие MA и MB , направленные по линиям фокальных радиусов F_1M и F_2M (рис. 21).

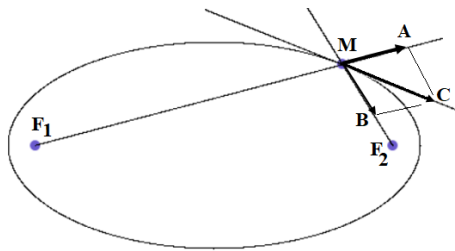


Рис. 21

Вектора MA и MB имеют одинаковую длину, поскольку сумма длин F_1M и F_2M постоянна. Таким образом, длина фокального радиуса F_1M возрастает с такой же скоростью, с которой убывает длина фокального радиуса F_2M . Из этого следует, что касательная направлена по биссектрисе угла AMB .

Задание 24. Доказать, что касательные к конфокальным эллипсу и гиперболе перпендикулярны.

Решение. Если эллипс и гипербола имеют общие фокусы, то в точке их пересечения у них совпадают фокальные радиусы. Опять используем метод Роберваля, который помог разобраться с касательной к эллипсу. Снова скорость точки, движущейся по гиперболе, разложим на две составляющие MA и MB , направленные по линиям фокальных радиусов F_1M и F_2M (рис. 22). В данном случае вектор MB имеет прежнюю длину и направлен в противоположном направлении по отношению к случаю эллипса. Дело в том, что постоянным является модуль разности длин отрезков F_1M и F_2M .

Суммарная скорость, получаемая после сложения векторов MA и MB направлена по биссектрисе угла F_1MF_2 . Легко понять, что касательные к конфокальным эллипсу и гиперболе ортогональны.

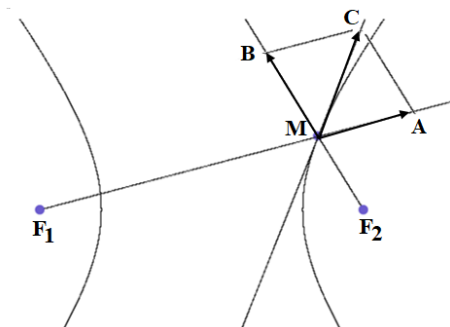


Рис. 22

Задание 25. Построить конфокальные эллипс и гиперболу и провести к ним касательные в точке их пересечения.



Решение. Дополним программу из задания 22. Вычислим параметры a_1 и b_1 , определяющие гиперболу. Пусть f_1 и f_2 длины фокальных радиусов, общих для эллипса и гиперболы, тогда $a_1 = \frac{|f_1 - f_2|}{2}$. Далее, $b_1 = \sqrt{c^2 - a_1^2}$. Построение гиперболы описано в задании 2. В программу из задания 22 добавим следующие строки.

```
'Фокусы
xe1 = x0 - c*ed
xe2 = x0 + c*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe1-5, y0-5, 10, 10)
GraphicsWindow.FillEllipse(xe2-5, y0-5, 10, 10)
'Фокальные радиусы
For t = 0 To 3 Step .001
  xe = xe1 + (xde - xe1)*t
  ye = y0 + (yde - y0)*t
  GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,"")
  xe = xe2 + (xde - xe2)*t
  ye = y0 + (yde - y0)*t
  GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,"")
EndFor
'Гипербола
f1 = Math.SquareRoot((xd + c)*(xd + c) + yd*yd)
f2 = Math.SquareRoot((xd - c)*(xd - c) + yd*yd)
a1 = Math.Abs(f1 - f2)/2
b1 = Math.SquareRoot(c*c - a1*a1)
For x = -3 To 3 Step .001
  ex1 = Math.Power(2.71828, x)
  ex2 = Math.Power(2.71828, -x)
  cn = (ex1 + ex2)/2
  sn = (ex1 - ex2)/2
  xe = x0 + a1*cn*ed
  ye = y0 - b1*sn*ed
  GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,"")
  xe = x0 - a1*cn*ed
  ye = y0 - b1*sn*ed
  GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,"")
EndFor
'Касательная к гиперболе
For t = -3 To 3 Step .001
  xe = xde + q*t
  ye = yde + p*t
  GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,"")
EndFor
'Фокусы
xe1 = x0 - c*ed
xe2 = x0 + c*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe1-5, y0-5, 10, 10)
GraphicsWindow.FillEllipse(xe2-5, y0-5, 10, 10)
```



Результат работы программы показан на рисунке 23.

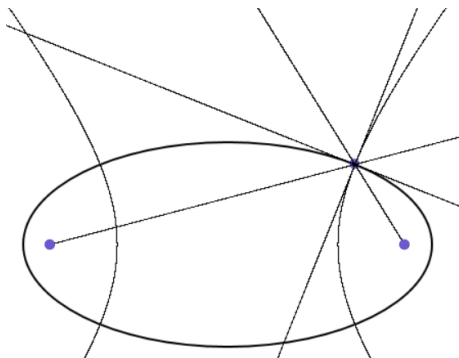


Рис. 23

Задание 26. Построить к кривой второго порядка касательную в заданной точке, используя методы математического анализа.

Решение. Кривую второго порядка как обычно построим с помощью сканирования декартовой плоскости. Для нахождения точки на кривой следует задать конкретное значение абсциссы, получить квадратное уравнение и найти два значения ординат и выбрать одно из них.

Для построения касательной нужно найти производную неявной функции

по формуле $k = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$. Повторение вывода соответствующей формулы является

очень полезным, поскольку она часто остаётся за пределами внимания студентов.

Наконец, построение касательной к кривой второго порядка показывает практическую важность этой формулы. Результат работы программы показан на рисунке 24.

```
GraphicsWindow.Width = 320
GraphicsWindow.Height = 520
'Коэффициенты кривой второго порядка
a11 = 2
a12 = -1
a22 = 1
b1 = -2.5
b2 = 1
c = 2
'Начало экранных координат
x0 = 10
y0 = 300
```



```
GraphicsWindow.FillEllipse(x0-5, y0-5,10,10)
GraphicsWindow.DrawLine(0, y0,600, y0)
GraphicsWindow.DrawLine(x0,0, x0,600)
'Количество пикселей в единичном отрезке
ed = 100
'Сетка единичных квадратов
For x=0 To 3 Step .01
For y= -2 To 3 Step 1
xe=x0 + ed*x
ye=y0 - ed*y
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,"green")
EndFor
EndFor
For x=0 To 3 Step 1
For y= -2 To 3 Step .01
xe=x0 + ed*x
ye=y0 - ed*y
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,"green")
EndFor
EndFor
'Сканирование декартовой плоскости
For x = 0 To 3 Step .005
For y = -2 To 3 Step .005
'Вычисление значений функции  $z = F(x, y)$ 

$$z = a_{11} * x * x + 2 * a_{12} * x * y + a_{22} * y * y + 2 * b_1 * x + 2 * b_2 * y + c$$

'Переход к экранной системе координат
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
If Math.Abs(z)<.01 Then
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "black")
EndIf
EndFor
EndFor
'Точка на кривой
xt = 2.2
p1 = a22
p2 = 2*a12*xt + 2*b2
p3 = a11*xt*xt + 2*b1*xt + c
d2 = p2*p2 - 4*p1*p3
d = Math.Sqrt(d2)
yt = (-p2 - d)/(2*p1)
xte = x0 + xt*ed
yte = y0 - yt*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xte - 5, yte - 5,10,10)
'Производная в точке
dfdx = 2*a11*xt + 2*a12*yt + 2*b1
dfdy = 2*a22*yt + 2*a12*xt + 2*b2
```



```
k = -dfdy/dfdx  
'Касательная  
For t = -2 To 2 Step .01  
xe = xte + t*k*ed  
ye = yte - t*ed  
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,»»)  
EndFor
```

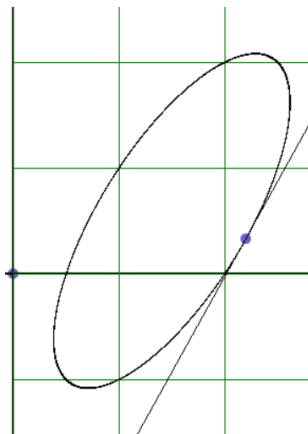


Рис. 24

5. СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Перейдём к изучению различных семейств кривых второго порядка. Кривые второго порядка на первых взгляд разбиты на несколько совершенно непохожих друг на друга кривых. При этом объединяет их вид общей формулы, используемой для их описания. Понимание геометрической общности кривых второго порядка достигается в рамках проективной геометрии. Но и в рамках аналитической геометрии удаётся объединять воедино канонические формулы соответствующих кривых.

Рассмотрим такие формулы, которые обычно остаются за пределами стандартных курсов аналитической геометрии.

Задание 27. Построить семейства конфокальных эллипсов и гипербол по единой формуле $\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$ [22].

Решение. Хотя формула по достаточно очевидным причинам объединяет эллипсы и гиперболы (параметр λ играет роль полуоси a), в программе построение каждого вида кривых приходится проводить отдельным циклом, поскольку изменение параметра λ для эллипсов и гипербол сильно различается.

Результатом работы программы является построение ортогональной сети (рис. 25), как доказано в задании 24.



```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
x0 = 300
y0 = 300
ed = 50
c = 1
GraphicsWindow.FillEllipse(x0 - c*ed - 5, y0-5, 10,10)
GraphicsWindow.FillEllipse(x0 + c*ed - 5, y0-5, 10,10)
For x = -6 To 6 Step .01
For y = -6 To 6 Step .01
For lm = 1.25 To 10.25 Step .5
Z = x*x/(lm*lm) + y*y/(lm*lm - c*c) - 1
If Math.Abs(z)<.01 Then
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,"")
EndIf
EndFor
EndFor
EndFor
For x = -6 To 6 Step .005
For y = -6 To 6 Step .005
For lm = .05 To .95 Step .1
Z = x*x/(lm*lm) + y*y/(lm*lm - c*c) - 1
If Math.Abs(z)<.01 Then
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,"")
EndIf
EndFor
EndFor
EndFor
```

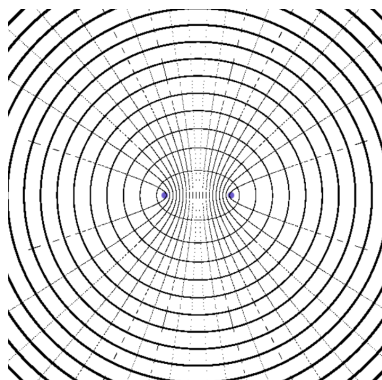


Рис. 25



Задание 28. Построить семейства кривых второго порядка с общей вершиной в начале координат по единой формуле $y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2) \cdot x^2$ [22].

Решение. Поясним значение параметров, используемых в уравнении. Величина p является расстоянием от фокуса до самой близкой к нему вершины кривой второго порядка. Величина ε представляет собой эксцентриситет эллипса ($\varepsilon < 1$) и гиперболы ($\varepsilon > 1$).

Программа практически совпадает с программой из предыдущего задания. Изменения состоят в следующем. Экран сужен, и начало координат перенесено к левому краю. Вместо величины c используется величина $p = 1$. В циклах меняется параметр ε . Вычисляется величина z формуле

$$z = y*y - 2*p*x + (1 - \varepsilon*\varepsilon)*x*x.$$

Результат работы программы показан на рисунке 26.

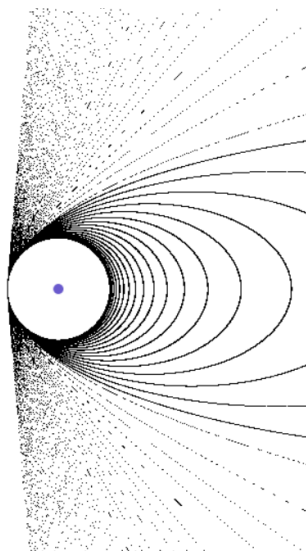


Рис. 26

Перейдём к рассмотрению пучков кривых второго порядка [23]. Пучком кривых второго порядка на плоскости называется однопараметрическое семейство кривых, проходящих через четыре фиксированных точки этой плоскости с координатами (x_i, y_i) , где $i = 1, 2, \dots, 4$. Пусть уравнения $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$ задают кривые из одного пучка, тогда любая другая кривая этого пучка имеет уравнение $F(x, y) = F_1(x, y) + \lambda \cdot F_2(x, y) = 0$.

На роль кривых второго порядка $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$ можно взять уравнения двух вырожденных кривых второго порядка, распадающихся на две пары прямых, являющихся противоположными сторонами соответствующего четырёхугольника (рис. 27). Пусть, например, $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ – уравнение прямой, проходящей

через пару точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , а $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ – уравнение прямой, проходящей через пару точек (x_3, y_3) и (x_4, y_4) , тогда положим, что $F_1(x, y) = (A_1 x + B_1 y + C_1) \cdot (A_2 x + B_2 y + C_2)$. Пусть далее $A_3 x + B_3 y + C_3 = 0$ – уравнение прямой, проходящей через пару точек (x_1, y_1) и (x_4, y_4) , а $A_4 x + B_4 y + C_4 = 0$ – уравнение прямой, проходящей через пару точек (x_2, y_2) и (x_3, y_3) , тогда положим, что $F_2(x, y) = (A_3 x + B_3 y + C_3) \cdot (A_4 x + B_4 y + C_4)$.

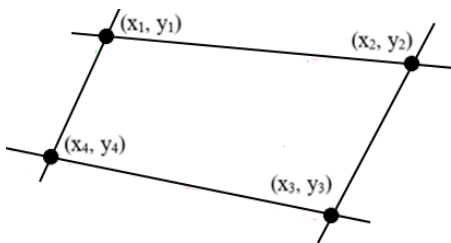


Рис. 27

Пусть на плоскости заданы пять точек с координатами (x_i, y_i) , где $i = 1, 2, \dots, 5$. Тогда уравнение кривой второго порядка, проходящей через все пять точек можно получить при таком значении параметра λ , которое определяется уравнением $F_1(x, y) + \lambda \cdot F_2(x, y) = 0$.

Выше сказанное позволяет построить либо пучок кривых второго порядка, либо единственную кривую второго порядка, проходящую через пять заданных точек.

Задание 29. Построить пучок кривых второго порядка, проходящих через четыре заданных точки.

Решение. Результат работы программы показан на рисунке 28.

```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
'Начало экранных координат
x0 = 300
y0 = 300
GraphicsWindow.FillEllipse(x0-5, y0-5, 10, 10)
GraphicsWindow.DrawLine(0, y0, 600, y0)
GraphicsWindow.DrawLine(x0, 0, x0, 600)
'Количество пикселей в единичном отрезке
ed = 100
'Сетка единичных квадратов
For x = -6 To 6 Step .01
For y = -6 To 6 Step 1
xe = x0 + ed * x
ye = y0 - ed * y
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "green")
EndFor
```



```
EndFor
For x= -6 To 6 Step 1
For y= -6 To 6 Step .01
xe=x0 + ed*x
ye=y0 - ed*y
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,"green")
EndFor
EndFor
‘Точки на плоскости
x1 = -.8
y1 = 1.5
x2 = 1.2
y2 = 1
x3 = -1.3
y3 = -1
x4 = 2
y4 = -1.2
‘Уравнения прямых
k1 = (y2 - y1)/(x2 - x1)
b1 = y1 - k1*x1
k2 = (y4 - y3)/(x4 - x3)
b2 = y3 - k2*x3
k3 = (y4 - y1)/(x4 - x1)
b3 = y1 - k3*x1
k4 = (y3 - y2)/(x3 - x2)
b4 = y2 - k4*x2
‘Сканирование декартовой плоскости
For lm = -1 To 2 Step .2
For x = -3 To 3 Step .01
For y = -3 To 3 Step .01
‘Вычисление значений функции z = F(x, y)
z1 = (y - k1*x - b1)*(y - k2*x - b2)
z2 = (y - k3*x - b3)*(y - k4 *x - b4)
z = z1 + lm*(z2 - z1)
‘Переход к экранной системе координат
If Math.Abs(z)<.01 Then
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "black")
EndIf
EndFor
EndFor
EndFor
EndFor
xe = x0 + x1*ed
ye = y0 - y1*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe - 5, ye - 5, 10, 10)
xe = x0 + x2*ed
```

```

ye = y0 - y2*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe - 5, ye - 5, 10, 10)
xe = x0 + x3*ed
ye = y0 - y3*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe - 5, ye - 5, 10, 10)
xe = x0 + x4*ed
ye = y0 - y4*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe - 5, ye - 5, 10, 10)

```

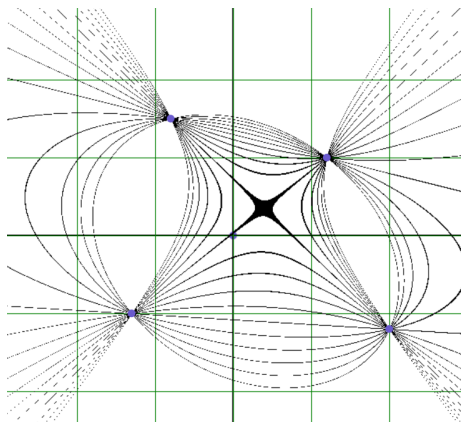


Рис. 28

Задание 30. Построить кривую второго порядка, проходящую через пять заданных точек.

Решение. В предыдущей программе несколько меняется сканирующая часть. Результат работы программы показан на рисунке 29.

```

‘Сканирование декартовой плоскости
x5 = 1
y5 = -1.5
z15 = (y5 - k1*x5 - b1)*(y5 - k2*x5 - b2)
z25 = (y5 - k3*x5 - b3)*(y5 - k4*x5 - b4)
lm = -z15/z25
For x = -3 To 3 Step .01
For y = -3 To 3 Step .01
‘Вычисление значений функции z = F(x, y)
z1 = (y - k1*x - b1)*(y - k2*x - b2)
z2 = (y - k3*x - b3)*(y - k4*x - b4)
z = z1 + lm*z2
‘Переход к экранной системе координат
If Math.Abs(z)<.01 Then

```



```
xe = x0 + x*ed  
ye = y0 - y*ed  
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "black")  
EndIf  
EndFor  
EndFor
```

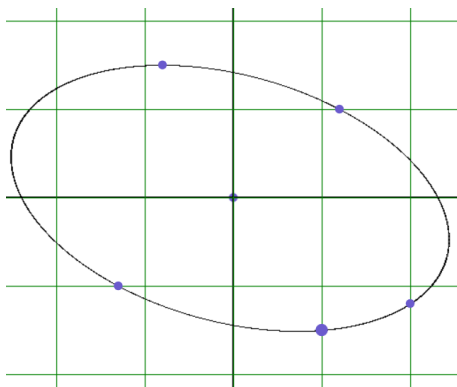


Рис. 29

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой части данной статьи рассматриваются вопросы, связанные с углублённым изучением линий не выше второго порядка. Особое внимание уделяется различным семействам алгебраических кривых, в частности пучкам прямых, окружностей и кривых второго порядка.

Обсуждение соответствующих вопросов может помочь молодым преподавателям при изучении различных разделов высшей математики. Кроме того, некоторые рассмотренные темы могут быть предложены в качестве тем курсовых и дипломных работ.

Продолжение статьи будет посвящено рассмотрению алгебраических кривых высших порядков, начиная с кубических кривых.

Литература

1. Куланин Е.Д., Нуркаева И.М. О двух геометрических задачах на экстремум. Математика в школе. 2019. № 4. С. 35–40.
2. Куланин Е.Д., Нуркаева И.М. Еще раз о задаче Мавло. Математика в школе. 2020. № 2. С. 76–79.
3. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М. Пропедевтика решения экстремальных задач в школьном курсе математики. Моделирование и анализ данных. 2019. № 4. С. 127–144.
4. Куланин Е.Д., Нгуен Ву Куанг, Степанов М.Е. Осязаемая предметность с компьютерной поддержкой. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. 2019. № 4. С. 145–156.
5. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М. Роль образного мышления в научном мышлении. Моделирование и анализ данных. 2020. Т. 10. № 2 С. 110–128.



6. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М. О различных подходах к решению экстремальных задач. Моделирование и анализ данных. 2020. Т. 11. № 1. С. 40–60.
7. Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А., Куланин Е.Д. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами. Москва, 2013. Том 2 (8-е издание).
8. Степанов М.Е. Некоторые вопросы методики преподавания высшей математики. Моделирование и анализ данных. 2017. № 1. С. 54–94.
9. Куланин Е.Д., Степанов М.Е. Из опыта работы в режиме дистанционного обучения Моделирование и анализ данных. 2022. Т. 12. № 3. С. 58–70.
10. Куланин Е.Д., Степанов М.Е. Всестороннее рассмотрение математических понятий как методический прием. Моделирование и анализ данных. 2022. Т. 12. № 4. С. 67–84.
11. Куланин Е.Д., Степанов М.Е. О визуализации решений некоторых экстремальных задач. Моделирование и анализ данных. 2022. Т. 12. № 4. С. 94–104.
12. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Панфилов А.Д., Потоньшев И.С. Системный подход к методике тифлопедагогики на примере задач математического анализа. 2022. Т. 12. № 2. С. 34–82.
13. Куланин Е.Д., Степанов М.Е. Вычислительный эксперимент в преподавании высшей математики на примере теории чисел. Моделирование и анализ данных. 2024. Т. 14. № 1. С. 170–195.
14. Куланин Е.Д., Степанов М.Е. Использование образов в преподавании высшей математики. Моделирование и анализ данных. 2024. Т. 14. № 2. С. 192–225.
15. Куланин Е.Д., Степанов М.Е. Вычислительный эксперимент в преподавании высшей математики. Комбинаторика и её приложения. Моделирование и анализ данных. 2024. Т. 14. № 3. С. 174–202.
16. Савёлов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. (Справочное руководство). М., Гос. изд. физ.-мат. литературы. 1960.
17. Четверухин Н.Ф. Проективная геометрия. М., Просвещение. 1969.
18. Энциклопедия элементарной математики. Книга четвёртая. Геометрия. М., Гос. изд. физ.-мат. литературы. 1963.
19. Степанов М.Е. Образ силового поля как эвристическая модель в математике. Моделирование и анализ данных. Труды факультета информационных технологий МГППУ. – Вып. 3., 2007.
20. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., Наука. 1979.
21. Берёзкин Е.Н. Курс теоретической механики. М., Издательство Московского Университета. 1974.
22. Делоне Б.Н., Райков Д.А. Аналитическая геометрия. Том 1. М. – Л., ОГИЗ. 1968.
23. Мухелишвили Н.И. Курс аналитической геометрии. М. – Л., ОГИЗ, 1947.



Algebraic Curves of Lower Order in the Teaching of Higher Mathematics

Yevgeny D. Kulanin*

Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>

e-mail: lucas03@mail.ru

Mikhail E. Stepanov**

Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>

e-mail: mestepanov@yandex.ru

The article continues the cycle ([1] – [15]) of the authors' methodological developments. It discusses some problems related to ways to improve the culture of mathematical thinking of mathematics students. The main object of discussion is algebraic curves. The authors rely on the experience of working at the Faculty of Information Technology of MSUPE.

Keywords: higher education, methods of teaching mathematics, analytical geometry, mathematical analysis, variable, function, implicit function, inverse function, derivative, secant, tangent, polynomial, algebraic curve, second-order curves, families of curves, bundles, geometric transformations

For citation:

Kulanin Y.D., Stepanov M.E. Algebraic Curves of Lower Order in the Teaching of Higher Mathematics. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2025. Vol. 15, no. 1, pp. 168–209. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2025150110> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Kulanin E.D., Nurkaeva I.M. On two geometric problems on an extra-mumm. Mathematics at school. 2019. No. 4. pp. 35–40.
2. Kulanin E.D., Nurkaeva I.M. Once again about the Mavlo task. Mathematics at school. 2020. No. 2. pp. 76–79.
3. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. Propaedeutics of solving extreme problems in a school mathematics course. Data modeling and analysis. 2019. No. 4. pp. 127–144.

****Yevgeny D. Kulanin***, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>, e-mail: lucas03@mail.ru

*****Mikhail E. Stepanov***, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: mestepanov@yandex.ru



4. Kulanin E.D., Nguyen Wu Quang, Stepanov M.E. Tangible objectivity with computer support. Data modeling and analysis. Scientific journal. 2019. No. 4. pp. 145–156.
5. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. The role of imaginative thinking in scientific thinking. Data modeling and analysis. 2020. Vol.10. No.2 Pp. 110–128.
6. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. On various approaches to solving extreme problems. Data modeling and analysis. 2020. Vol.11. No. 1. pp. 40–60.
7. Lungu K.N., Norin V.P., Written D.T., Shevchenko Yu.A., Kulanin E.D. Collection of problems in higher mathematics with control papers. Moscow, 2013. Volume 2 (8th edition).
8. Stepanov M.E. Some questions of teaching methods of higher education mathematics. Data modeling and analysis. 2017. No.1. pp. 54–94.
9. Kulanin E.D., Stepanov M.E. From the experience of working in remote mode Learning Modeling and data analysis. 2022. Vol. 12. No. 3. pp. 58–70.
10. Kulanin E.D., Stepanov M.E. Comprehensive consideration of mathematical concepts as a methodological technique. Data modeling and analysis. 2022. vol. 12. No.4. pp. 67–84.
11. Kulanin E.D., Stepanov M.E. On visualization of solutions to some extreme tasks. Data modeling and analysis. 2022. vol. 12. No.4. pp. 94–104.
12. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Panfilov A.D., Potonysh I.S. A systematic approach to the method of typhlopedagogy on the example of mathematical analysis problems. Data modeling and analysis. 2022. vol. 12. No.2. pp. 34–82.
13. Kulanin E.D., Stepanov M.E. Computational experiment in teaching higher mathematics on the example of number theory. Data modeling and analysis. 2024. Vol.14. No. 1. pp. 170–195.
14. Kulanin E.D., Stepanov M.E. The use of images in teaching higher education mathematics. Data modeling and analysis. 2024. vol.14. No.2. pp. 192–225.
15. Kulanin E.D., Stepanov M.E. Computational experiment in teaching higher mathematics. Combinatorics and its applications. Modeling and analysis data. 2024. vol.14. No.3. pp. 174–202.
16. A. Savelov. A. Flat curves. Taxonomy, properties, and application. (Reference Guide). M., State Publishing House of Physics.-mat. literature. 1960.
17. Chetvertukhin N.F. Projective geometry. M. Enlightenment. 1969.
18. Encyclopedia of elementary Mathematics. The fourth book. Geometry. M., State Publishing House of Physics.-mat. literature. 1963.
19. M. Stepanov. E. The image of a force field as a heuristic model in mathematics. Data modeling and analysis. Proceedings of the Faculty of Information and Digital Technologies of the Moscow State Pedagogical University. – Issue 3., 2007.
20. P. Alexandrov. S. Course of analytical geometry and linear algebra. M., Scientific 1979.
21. E. Berezkin. N. Course of theoretical Mechanics. M., Moscow University Press. 1974.
22. B. Delaunay, N. N., Raikov, D.A. Analytical geometry. Volume 1. M. – L., OGIZ. 1968.
23. Muskhelishvili N.I. Course of analytical geometry. M. – L., OGIZ, 1947.

Получена 10.12.2024

Принята в печать 10.01.2025

Received 10.12.2024

Accepted 10.01.2025

УДК 372.851

Множества точек, находящихся на рациональных расстояниях друг от друга

Куланин Е.Д.*

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>

e-mail: lucas03@mail.ru

Степанов М.Е.**

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>

e-mail: mestepanov@yandex.ru

Статья продолжает цикл ([1] – [15]) методических разработок авторов. В статье рассматриваются задачи, связанные с множествами точек, расстояния между которыми являются рациональными числами (назовём эти множества рациональными). Изучение подобных множеств, связано с решением диофантовых уравнений. Соответствующие задачи могут использоваться при выборе тем для исследовательской работы студентов. Авторы опираются на опыт работы на факультете информационных технологий МГППУ.

Ключевые слова: евклидова плоскость, расстояние между точками на плоскости, диофантовы уравнения, целочисленные треугольники, пифагоровы треугольники, пифагоровы тройки, героновы треугольники, конгруэнтное число, пифагоровы четвёрки, тройка Эйзенштейна, пятиугольник Роббинса, инверсия, граф Эрдёша – Диофанта, теорема Эрдёша – Эннинга

Для цитаты:

Куланин Е.Д., Степанов М.Е. Алгебраические кривые низших порядков в преподавании высшей математики // Моделирование и анализ данных. 2025. Том 15. № 1. С. 210–251. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2025150111>

***Куланин Евгений Дмитриевич**, кандидат физико-математических наук, профессор, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>, e-mail: lucas03@mail.ru

****Степанов Михаил Евграфович**, кандидат педагогических наук, доцент, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: mestepanov@yandex.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из целей данной статьи является рассмотрение задач, которые связаны с описанием множеств точек на евклидовой плоскости таких, что расстояние между двумя любыми двумя точками множества является рациональным числом. Уже при изучении множеств, состоящих всего из трёх точек, приходится решать диофантовы уравнения. Для множеств, содержащих более трёх точек, естественно, задача усложняется. При этом могут возникнуть проблемы любой степени сложности. Ниже будут рассмотрены примеры соответствующих множеств, содержащих как любое конечное число точек, так и бесконечное их число.

Отметим, что в данной статье ставятся вопросы, проблемы и задачи, возникновение которых связано с геометрической проблематикой, а решение основывается на идеях теории чисел. В целом круг соответствующих задач иногда *называют арифметическими проблемами евклидовой геометрии вообще и планиметрии в частности*.

Однако по поводу структуры этих множеств необходимо сделать важное замечание. Если на плоскости заданы точки A , B и C , то с ними связаны три расстояния – длины сторон треугольника ABC . Этот треугольник может являться равносторонним, и при этом длины всех его сторон могут задаваться одинаковыми иррациональными числами. При таком подходе этот конкретный треугольник должен быть исключён из сферы нашего рассмотрения.

Но, конечно, это неправильная точка зрения. На самом деле следует рассматривать этот треугольник, как и все изучаемые множества точек на плоскости, с позиций соизмеримости расстояний, связанных с данной геометрической конфигурацией. Если все расстояния соизмеримы, то все их можно выразить рациональными числами, а если требуется, то и натуральными. Таким образом, соответствующие множества на плоскости нужно рассматривать с точностью до преобразования подобия. При этом существенным является только факт соизмеримости всех расстояний между точками множества.

В статье будут рассмотрены и некоторые другие задачи, связанные с рациональными расстояниями.

2. ПИФАГОРОВЫ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Прямоугольные треугольники, все стороны которых являются натуральными числами, называются пифагоровыми. Натуральные числа, задающие длины сторон пифагорова треугольника, расположенные в порядке возрастания называют пифагоровыми тройками. Подробное рассмотрение вопросов, связанных с пифагоровыми треугольниками и пифагоровыми тройками дано в книге [16]. Учитывая предыдущее замечание о роли подобия и несколько отклоняясь от общепринятой терминологии, иногда будем называть *прямоугольный треугольник пифагоровым, если все его стороны являются рациональными числами*.



Пифагоров треугольник называется *основным*, если длины его катетов выражаются взаимно простыми числами. Среди подобных пифагоровых треугольников есть *наименьший*. Наименьший пифагоров треугольник является основным.

Задание 1. Доказать, что прямоугольный треугольник является пифагоровым тогда и только тогда, когда синусы и косинусы его острых углов являются рациональными числами.

Решение. Обозначим катеты прямоугольного треугольника через a и b , а гипотенузу через c . Острый угол противолежащий стороне a , обозначим через α . Если скоро a , b и c – рациональные числа, то $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ и $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ являются рациональными числами.

Наоборот, пусть синус и косинус острого угла α рациональны. Допустим, что $\sin \alpha = \frac{p}{q}$ и $\cos \alpha = \frac{s}{t}$. Возьмем прямоугольный треугольник с катетами, равными синусу и косинусу угла α . Его гипотенуза равна 1 . Построим подобный ему треугольник с коэффициентом подобия $q \cdot t$. Сам он, естественно, является прямоугольным, а длина его катетов и гипотенузы выражается целыми числами: $p \cdot t$, $s \cdot q$ и $q \cdot t$. Значит, этот прямоугольный треугольник является пифагоровым.

Если найти способ нахождения углов с рациональными синусами и косинусами, то можно описать все пифагоровы треугольники.

Задание 2. Доказать, что синус и косинус угла рациональны тогда и только тогда, когда тангенс половины этого угла является рациональным числом.

Решение. Пусть синус и косинус угла α рациональны. Построим прямоугольный треугольник ABC (рис. 1) с катетами $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$. Проведем биссектрису AM угла $\angle A = \alpha$.

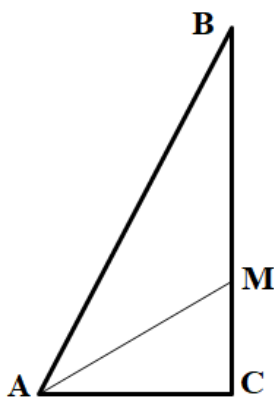


Рис. 1

По условию $BC = \sin \alpha$ и $AC = \cos \alpha$, $AB = 1$. Пусть $MC = x$, тогда по свойству биссектрисы можно записать пропорцию x : $AC = BM$: AB , или x : $BC = (BC - x)$: AB .

Поскольку длины отрезков ВС, АС и АВ являются рациональными числами, мы получили для x линейное уравнение с рациональными коэффициентами. Из этого следует, что длина отрезка МС рациональна. В треугольнике АМС катеты АС и МС имеют рациональную длину, а угол МАС равен $\frac{\alpha}{2}$, значит, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ является рациональным числом.

Пусть теперь $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ является рациональным числом, то есть $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{m}{n}$. Построим прямоугольный треугольник с катетами m и n . Квадрат его гипотенузы c равен $m^2 + n^2$. Тогда $\sin \alpha = \frac{m}{c}$ и $\cos \alpha = \frac{n}{c}$.

Используя формулы для синусов и косинусов суммы углов, получим выражения для синуса и косинуса угла α :

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2mn}{m^2 + n^2}, \\ \cos \alpha &= \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}.\end{aligned}$$

Это рациональные числа, и, значит, прямоугольный треугольник с углом α пифагоров. Отметим, что в данном доказательстве фактически используется универсальная тригонометрическая подстановка, применяемая при интегрировании.

В результате выполнения задания найдены общие формулы для нахождения сторон любых пифагоровых треугольников. Иными словами, получено решение диофантова уравнения $x^2 + y^2 = z^2$:

$$x = \frac{2mn}{m^2 + n^2}, y = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}, z = 1.$$

Задание 3. Доказать, что если треугольник является пифагоровым, то прямоугольный треугольник с острым углом, равным половине острого угла исходного треугольника, с точностью до подобия имеет целые катеты n и m . Тогда стороны исходного пифагорова треугольника также с точностью до подобия выражаются через числа n и m по формулам: $x = 2 \cdot m \cdot n$, $y = m^2 - n^2$, $z = m^2 + n^2$.

Пояснение. Использовать результаты предыдущего задания.

Итак, мы имеем в своём распоряжении операцию получения из прямоугольного треугольника, вообще говоря не пифагорова, пифагорова треугольника.

Интерпретируем эту операцию несколько иначе. Пусть m больше n . Рассмотрим комплексное число $m + i \cdot n$. Модуль этого числа равен $\sqrt{m^2 + n^2}$, а аргумент равен арктангенсу числа $\frac{n}{m}$. Предположим, что этот аргумент равен α . Возведём данное комплексное число в квадрат. Результат равен $(m^2 - n^2) + 2mn \cdot i$. Его модуль и аргумент соответственно равны $m^2 + n^2$ и 2α .

Французский математик 16-го века Франсуа Виет обобщил данную операцию. Он ввел в математику перемножение прямоугольных треугольников.



Пусть дан прямоугольный треугольник с необязательно имеющими рациональные длины катетами n_1 и m_1 , а также прямоугольный треугольник с катетами n_2 и m_2 . При этом их наименьшие острые углы равны α и β . С первым прямоугольным треугольником свяжем комплексное число $m_1 + i \cdot n_1$, а со вторым – комплексное число $m_2 + i \cdot n_2$,

Задание 4. Рассмотреть произведение соответствующих комплексных чисел и связать его с некоторым прямоугольным треугольником. Выяснить, всегда ли этот треугольник является пифагоровым.

Решение. Будем действовать по аналогии с возведением комплексного числа в квадрат. Действительная и мнимая часть комплексного числа, равного произведению, будут задавать катеты соответствующего прямоугольного треугольника. Эти катеты равны $m_1 \cdot m_2 - n_1 \cdot n_2$ и $m_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot m_2$. Модуль произведения равен произведению модулей сомножителей и задаёт длину гипотенузы. Аргументом является острый угол итогового прямоугольного треугольника, равный $\alpha + \beta$.

Пусть числа m_1, n_1, m_2 и n_2 являются натуральными. Тогда катеты итогового треугольника, очевидно, являются целыми. Однако гипотенуза может оказаться иррациональным числом. Например, в случае, когда $m_1 = 2, n_1 = 1, m_2 = 3$ и $n_2 = 2$ длина гипотенузы равна $\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{65}$, а это иррациональное число.

А вот при перемножении двух пифагоровых треугольников снова получается пифагоров треугольник. Действительно, модули сомножителей с точностью до подобию в этом случае являются натуральными числами. По этой причине гипотенуза итогового треугольника тоже является натуральным числом. Покажем это на примере. Пусть $m_1 = 4, n_1 = 3, m_2 = 21$ и $n_2 = 20$. Тогда модули сомножителей равны 5 и 29. Перемножим комплексные числа $4 + 3i$ и $21 + 20i$:

$$(4 + 3i)(21 + 20i) = 24 + 141i.$$

Модуль этого числа равен

$$\sqrt{24^2 + 141^2} = \sqrt{576 + 20449} = \sqrt{21025} = 145 = 5 \cdot 29.$$

Естественно, возможны и ситуации, в которых перемножение не пифагоровых треугольников приводит к появлению пифагорова треугольника. В качестве примера приведём возведение в квадрат треугольника с катетами 2 и 1. Его гипотенуза имеет длину $\sqrt{5}$. В результате будет получен так называемый египетский треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Действительно, $(2 + i)^2 = 3 + 4i$. Отметим, что исходный треугольник можно связать с золотым сечением, поскольку с ним связано число $\sqrt{5}$.

Задание 5. Дать геометрическую интерпретацию перемножения прямоугольных треугольников.

Решение. Напомним, что мы рассматриваем треугольники с точностью до подобию. Возьмем два прямоугольных треугольника с наименьшими острыми углами α и β . Подобие позволяет сделать равными прилежащие к этим углам катеты. Сложим треугольники, приложив равные катеты друг к другу (рис. 2).

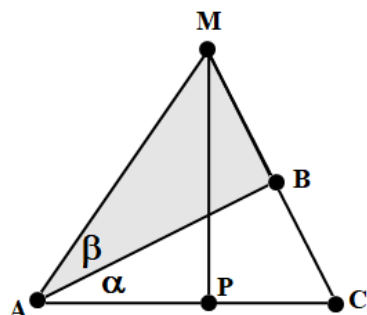


Рис. 2

Итак, после того как к треугольнику ABC приложен треугольник ABM , будет получен треугольник ACM . В нём можно провести высоту MP . Треугольник AMP является произведением треугольников ABC и ABM .

Задание 6. Российский архитектор и исследователь культуры Древнего Египта Игорь Павлович Шмелев на одном из своих рисунков показывает возникновение египетского треугольника ANC в квадрате 2 на 2 (рис. 3). Доказать, что этим способом действительно построен египетский треугольник.

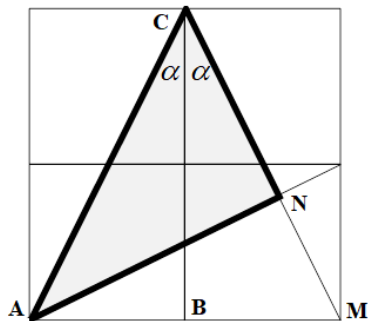


Рис. 3

Пояснения. Нужно доказать, что треугольник ANC прямоугольный, а затем использовать то обстоятельство, что он является произведением треугольников ABC и MBC .

Используем некоторые полученные результаты для приближённого вычисления числа π .

Задание 7. Сформулировать условие того, что хорда окружности единичного радиуса имеет единичную длину.

Решение. Пусть на хорду AB опирается центральный угол, равный 2α (рис. 4).

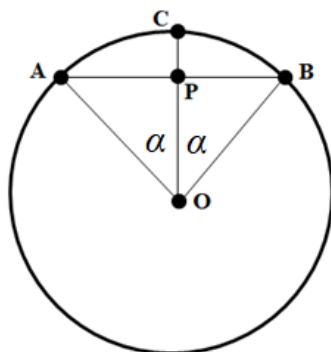


Рис. 4

Половина хорды АВ равна $\sin \alpha$. Это число должно быть рациональным. Как было показано в задании 2, что это требование эквивалентно рациональности числа $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Положим, что $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{m}{n}$, тогда $\sin \alpha = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$, а общая длина хорды равна $\frac{4mn}{m^2 + n^2}$.

Задание 8. Разработать способ приближённого вычисления числа π , основанный на результатах предыдущего задания.

Решение. Выберем числа m и n , задающие $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ таким образом, чтобы угол 2α был достаточно мал. Разобьём четверть окружности единичного радиуса, расположенную в первом квадранте, на дуги с угловой мерой 2α . Естественно, конец последней дуги перейдёт во второй квадрант. Проблема состоит в том, что нужно подсчитать число маленьких дуг. Дело в том, что мы вычисляем число π и не можем его использовать в промежуточных вычислениях.

Начнём с того, что отложим против часовой стрелки от точки $(1; 0)$ первую дугу с угловой мерой 2α (рис. 5).

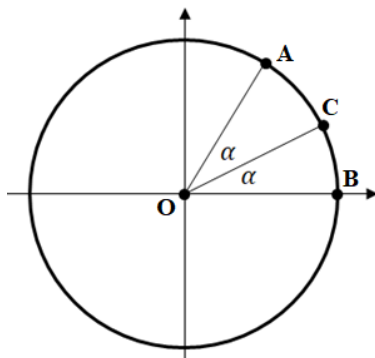


Рис. 5

Пусть $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{m}{n}$, тогда вектор ОС имеет координаты $(\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}, \frac{2mn}{m^2 + n^2})$, где $\sin \alpha = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$ и $\cos \alpha = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$. Из этого следует, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2mn}{m^2 - n^2} = \frac{m_1}{n_1}$. Этот тангенс позволяет получить координаты вектора ОА, наклонённого под углом 2α . В итоге получим, что $\sin 2\alpha = \frac{2m_1 n_1}{m_1^2 + n_1^2}$ и $\cos 2\alpha = \frac{m_1^2 - n_1^2}{m_1^2 + n_1^2}$.

Рассмотрим комплексное число $z = \cos 2\alpha + i \cdot \sin 2\alpha$, задаваемое вектором ОА. Его степеням z^k соответствуют концы дуг, имеющих длину $2 \cdot \sin \alpha$. Когда одна из степеней выйдет за пределы первого квадранта, будет установлено число соответствующих дуг. Четверть круга покрыта k дугами длины $2 \cdot \sin \alpha$. Добавим ещё непокрытый кусочек дуги, равный последнему положительному косинусу. Таким образом, $\pi \approx 4 \cdot k \cdot \sin \alpha + 2 \cdot \cos 2k\alpha$.

Программа приближённого вычисления числа π не содержит никаких вычислений кроме арифметических операций. Нет даже извлечения квадратных корней.

```

m = 10000000
n = 1
sa = 2*m*n/(m*m + n*n)
ca = (m*m - n*n)/(m*m + n*n)
m1 = 2*m*n
n1 = m*m - n*n
sd = 2*m1*n1/(m1*m1 + n1*n1)
cd = -(m1*m1 - n1*n1)/(m1*m1 + n1*n1)
sp = sd
cp = cd
k = 1
met:
sb = sd*cp + cd*sp
cb = cd*cp - sd*sp
sp = sb
cp = cb
If cp > 0 Then
del = cp
k = k + 1
Goto met
EndIf
pi = 4*k*sa + 2*del
GraphicsWindow.DrawText(50,100, pi)

```

После выбора очень маленького угла α удаётся получить достаточно высокую точность: $\pi \approx 3,1415926535897722945043434304$. Видимо, уместно вспомнить по этому поводу мнемонику числа π , связанную с числом букв в словах: «*Это я знаю и помню прекрасно. Пи многие знаки мне лишни, напрасны*».



Если рассматривать все треугольники с натуральными длинами сторон a , b и c , то единственным ограничением на выбор чисел a , b и c являются неравенства треугольника. Такие треугольники называются целочисленными (целыми) или рациональными. При наложении дополнительных требований на свойства треугольника поиск чисел a , b и c может усложниться. Однако некоторые задачи легко решаются с помощью пифагоровых треугольников.

Целочисленные *треугольники с целой площадью называются героновыми*.

Задание 9. Описать процедуру получения героновых треугольников с помощью пифагоровых треугольников.

Решение. Как известно, даже такой «хороший» треугольник, как равносторонний с единичной длиной сторон, имеет иррациональную площадь. Чтобы построить треугольник с рациональной площадью следует взять два пифагоровых треугольника ABC и KMN . Подвергнув один из них преобразованию подобия, добьёмся, чтобы катеты AB и KM имели одинаковую длину. После этого сложим из этих двух треугольников один с высотой AB (рис. 6). Очевидно, что полученный треугольник имеет рациональную площадь.

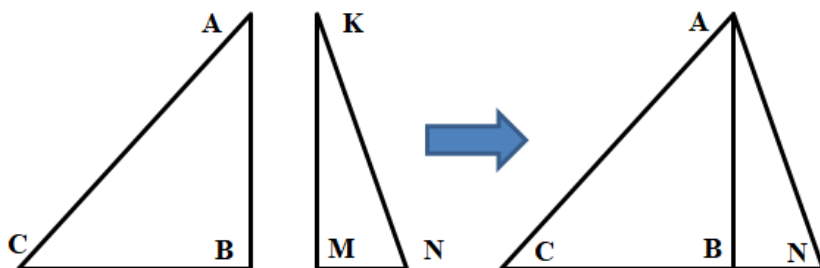


Рис. 6

Кроме всего прочего в результате мы получили множество из четырёх точек A , B , C и N , удалённых друг от друга на рациональные расстояния. Правда, три из этих точек лежат на одной прямой, что делает соответствующую конфигурацию менее ценной.

Предложим задачу для самостоятельного решения.

Задание 10. Геронов треугольник разрезан по высоте. Обязательно ли полученные прямоугольные треугольники являются пифагоровыми?

Задание 11. Построить множество из четырёх точек, удалённых на рациональные расстояния. При этом никакие три точки не должны лежать на одной прямой.

Решение. Одним из вариантов такого множества являются вершины прямоугольника, сложенного из двух равных пифагоровых треугольников (рис. 7). Центр прямоугольника тоже может быть добавлен к этому множеству в качестве пятой точки.

Можно складывать равные пифагоровы треугольники и другими способами. Один из них показан на рисунке 7. Точка O является серединой гипотенуз.

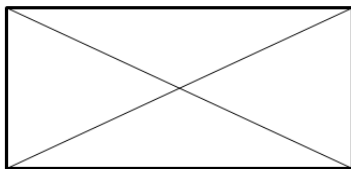


Рис. 6

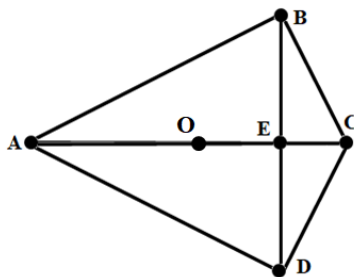


Рис. 7

Задание 12. Доказать, что точки A, B, C, D, E и O, изображённые на рисунке 7, удалены друг от друга на рациональные расстояния.

Мы разными способами складывали фигуру из двух равных пифагоровых треугольников. Есть ещё один способ, показанный на рисунке 8.

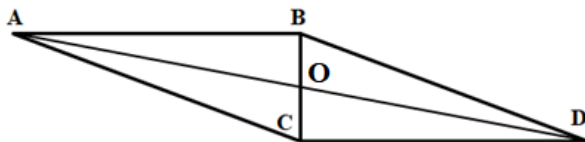


Рис. 8

Возникает вопрос, могут ли вершины полученного параллелограмма быть удалены друг от друга на целые расстояния?

3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ ЕВКЛИДОВОЙ ПЛАНИМЕТРИИ

На примере этой задачи покажем, что она, подобно камню, брошенному в воду, порождает новые проблемы. При этом некоторые из них могут решаться теоретически. В других случаях приходится писать программу, чтобы с помощью компьютерных вычислений искать конкретные решения той же или связанной с ней задачи.



Начнём с того, что треугольники ABC и ABO должны быть пифагоровыми и иметь общий катет AB . В книге [16] рассматриваются задачи поиска пифагоровых треугольников, имеющих общие свойства. В частности, рассматривается и поиск пифагоровых треугольников, имеющих общие катеты.

Задание 13. Показать, что существует бесконечно много рациональных пифагоровых треугольников с общим катетом.

Решение. Как мы знаем пифагоров треугольник имеет катеты целой длины $x = 2 \cdot m \cdot n$ и $y = m^2 - n^2$. Подвергнем его преобразованию подобия с коэффициентом $\frac{1}{2 \cdot m \cdot n}$, тогда один из катетов получает длину 1, а второй длину $\frac{m - n}{2 \cdot m \cdot n}$. Множество соответствующих треугольников можно расположить, совместив единичные катеты (рис. 9).

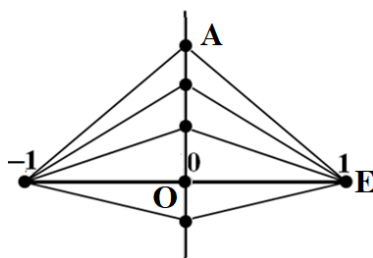


Рис. 9

В результате будет получено множество точек, состоящее из бесконечного множества точек лежащих на одной прямой, и ещё одной точки. Расстояние между любыми двумя точками соответствующего множества рационально. Можно добавить ещё одну точку, симметрично отразив треугольники относительно прямой.

Задание 14. Показать, что множество вершин треугольников из предыдущего задания, лежащих на вертикальной прямой, является всюду плотным множеством.

Решение. Вертикальные катеты треугольников с рисунка 9 имеют длины выражаемые формулой $u = \frac{m - n}{2 \cdot m \cdot n}$. Введём обозначение дроби $\frac{m}{n}$ через t . Тогда длина вертикальных катетов соответствующих треугольников выражается функцией одной переменной $u = \frac{t^2 - 1}{2t} = \frac{t}{2} - \frac{1}{2t}$. Форма графика этой функции (ограничимся положительными значениями аргумента) определяется поведением линейной функции и верви гиперболы.

Функция непрерывна и принимает все значения от минус бесконечности до плюс бесконечности (рис. 10). К тому же значения функции рациональны при рациональных значениях аргумента.

Полученный результат мы используем в дальнейшем.

Что же касается конфигурации, изображённой на рисунке 8, мало факта существования двух пифагоровых треугольников с общим катетом. Необходимо, чтобы катет BC был ровно в два раза длиннее катета OB . Итак, возникает новая проблема.

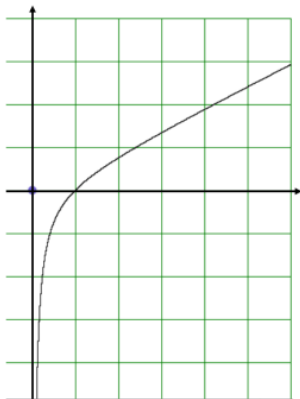


Рис. 10

Задание 15. Выразить только что сформулированное условие с помощью диофантова уравнения.

Решение. Длины катетов BC и BO пифагоровых треугольников ABC и ABO на рисунке 8 могут быть выражены формулой $u = \frac{t^2 - 1}{2t}$ с различными значениями параметра. Пусть $BC = \frac{t_1^2 - 1}{2t_1}$ и $BO = \frac{t_2^2 - 1}{2t_2}$. Требуется, чтобы $\frac{t_1^2 - 1}{2t_1} = \frac{t_2^2 - 1}{t_2}$ или $(t_1^2 - 1)t_2 = 2(t_2^2 - 1)t_1$. Продолжим преобразования и получим уравнение $2t_1t_2^2 + (1 - t_1^2)t_2 - 2t_1 = 0$, которое позволяет выразить параметр t_2 через t_1 :

$$t_2 = \frac{-1 + t_1^2 \pm \sqrt{1 + 14t_1^2 + t_1^4}}{4t_1}.$$

Поскольку параметр t_2 должен быть рациональным, под корнем должен стоять полный квадрат. Пусть $t_1 = \frac{m}{n}$, тогда это обстоятельство можно записать как диофантово уравнение

$$m^4 + 14m^2n^2 + n^4 = k^2.$$

Это уравнение имеет бесконечно много целых решений при $m = n$. Однако для наших целей нужно найти решение для случая, когда m и n не равны между собой.

Итак, с конфигурацией на рисунке 8 связано диофантово уравнение $m^4 + 14m^2n^2 + n^4 = k^2$. Вопрос о наличии у него решения с нужными свойствами



можно решать, теоретически изучая уравнение. Это, как правило, сложный и творческий процесс. В данном случае предположительно таких решений не существует. Другой путь – поиск решений с помощью компьютерной программы. Он порой приводит к нахождению частных решений.

Задание 16. Написать программу для поиска решений диофантова уравнения $m^4 + 14m^2n^2 + n^4 = k^2$.

Решение. Программа построена фактически на методе перебора натуральных значений переменных m и n , исключаяем возможность совпадения этих значений. Возможен ряд существенных улучшений, которые, однако, усложнили бы программу и затруднили бы понимание её смысла.

```
GraphicsWindow.Clear()
'Число решений
nom = 0
For m = 1 To 1000
For n = m + 1 To 1000
'Вычисление левой части уравнения
k2 = m*m*m*m + 14*m*m*n*n + n*n*n*n
<Извлечение корня
k = Math.Sqrt(k2)
k0 = Math.Floor(k)
'Проверка того, что корень является натуральным числом
If k = k0 Then
nom = nom + 1
'Печать переменных, дающих решение
GraphicsWindow.DrawText(50, nom*30, m)
GraphicsWindow.DrawText(200, nom*30, n)
GraphicsWindow.DrawText(300, nom*30, k0)
EndIf
EndFor
EndFor
'Итоговое число найденных решений
GraphicsWindow.DrawText(50, nom*30+30, nom)
```

Данный вариант программы не обнаруживает ни одного решения. Это обстоятельство в известном смысле подтверждает гипотезу о полном отсутствии решений искомого вида. Однако при увеличении интервалов изменения переменных m и n до 10000 вдруг появляются сообщения о наличии решений. Фрагмент с четырьмя сообщениями показан на рисунке 11.

Неопытного вычислителя это может обрадовать, но знаток сразу предположит, что компьютерные вычисления приводят к потере точности и формированию неверных результатов. Нужна проверка, которая при одном взгляде на первую тройку чисел сразу наводит на мысль об ошибке. Итак, первое сообщение даёт вариант $m = 1, n = 10000, k = 1000000007$. Для проверки будем вычислять последние цифры

десятичной записи левой и правой частей диофантова уравнения при заданных значениях. Очевидно, что эти цифры равны 1 и 9, то есть несовпадение налицо.

1	10000	100000007
185	6332	40333102
748	6391	44593246
1063	9945	106525528

Рис. 11

Если посмотреть, каков компьютерный результат вычисления выражения $m^4 + 14m^2n^2 + n^4$ программой при $m=1$ и $n=1000$, то он равен пространному числу 100000000140000000001 (верному!). Но квадратный корень из него без округления является целым числом 10000000007. Так или иначе, речь идёт об ошибке.

Задание 15. Проверить остальные три варианта, предложенных компьютером и, если потребуется, забраковать ошибочные.

Как некоторый итоговый вывод можно утверждать, что как теоретические, так и вычислительные исследования в рассматриваемой сфере требуют значительных интеллектуальных усилий.

Рассмотрим ещё несколько связанных с конфигурацией на рисунке 8 задач. В конечном счёте, данная фигура является параллелограммом особого вида. Таким образом, возникает следующий вопрос, который мы оформим в виде очередного задания.

Задание 16. Выяснить, существует ли параллелограммы с целой длиной сторон, такой, что их диагонали также имеют длину, выражаемую целыми числами.

Решение. На рисунке 12 изображён параллелограмм ABCD. Точка М является точкой пересечения диагоналей. Если ограничиться рассмотрением треугольника ABC, то медиана AM должна иметь целую длину. Итак, задание 16 сведено к новому заданию.

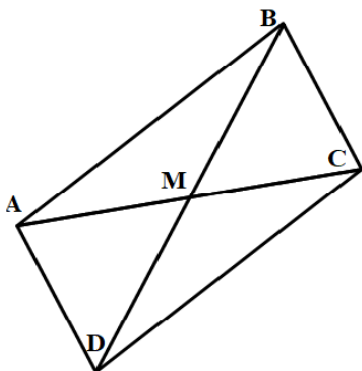


Рис. 12



Задание 17. Описать процедуру, позволяющую определённым образом располагать целые треугольники не декартовой плоскости.

Решение. Отметим, прежде всего, что рассматриваемые нами задачи позволяют двойко рассматривать рациональные множества. Поясним это на примере целых треугольников. Такой треугольник определяется тройкой натуральных чисел, являющихся длиной его сторон. Эти числа должны удовлетворять неравенствам треугольника. При этом мы не рассматриваем какое-то конкретное вложение соответствующего треугольника в декартову плоскость. Именно с таким вложением как раз связана вторая точка зрения на целые треугольники.

Назовём треугольник, рассматриваемый как тройка натуральных чисел, абстрактным треугольником. Решим задачу вложения абстрактного треугольника в декартову плоскость. При этом будем иметь ввиду, что треугольники рассматриваются нами с точностью до преобразования подобия.

Пусть дан целый абстрактный треугольник $(a; b; c)$ и отрезок MN на декартовой плоскости, где $M(x_1; y_1)$ и $N(x_2; y_2)$. Вершину абстрактного треугольника, из которой исходят стороны a и b через C , а вершину абстрактного треугольника, из которой исходят стороны a и c через B . Третью вершину абстрактного треугольника обозначим через A . Задача состоит в том, чтобы построить на декартовой плоскости точку Q , такую, что треугольники ABC и QMN подобны.

Очевидно, что на роль точки Q могут быть выбраны две точки декартовой плоскости (рис. 13). Выбор одной из них определяется дополнительными условиями.

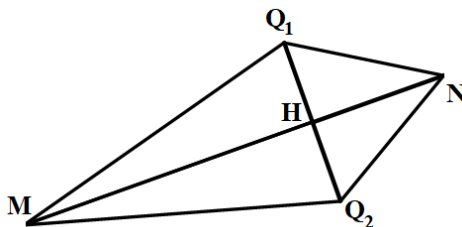


Рис. 13

Положим, что $MN = c, MQ_1 = a, NQ_1 = b, MH = x$, тогда

$$a^2 - x^2 = b^2 - (c - x)^2.$$

А, значит, $x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$. Тогда координаты точки H выражаются по формулам $x_H = x_1 + x \cdot (x_2 - x_1)$ и $y_H = y_1 + x \cdot (y_2 - y_1)$. Положим, что $t = \sqrt{a^2 - x^2}$. Вычисление координат точки Q_1 можно провести по следующей схеме: вычислить координаты единичного вектора, коллинеарного вектору MN , вычислить координаты ортогонального к вектору MN единичного вектора, умножить этот вектор на $t = \sqrt{a^2 - x^2}$ и получить итоговые координаты точки Q_1 .

Выведенные выше формулы будут использованы далее неоднократно. По этой причине зафиксируем их на рисунке 14, что позволит достаточно быстро сверяться с ними.

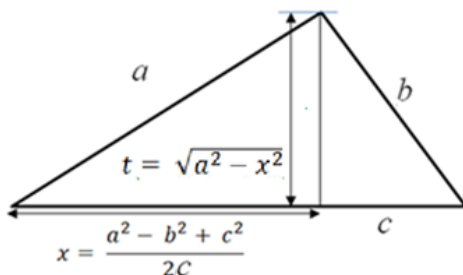


Рис. 14

Задание 18. Написать программу, позволяющую выяснить, существует ли целые треугольники, хотя бы одна медиана которых имеет длину, выражаемую целым числом. С её помощью проверить тот факт, что все медианы целого треугольника со сторонами 136, 170 и 174 имеют длину, выражаемую целыми числами. Оценить степень достоверности проверки, осуществляемой компьютерным вычислением.

Решение. Расположим исследуемый треугольник на декартовой плоскости так, чтобы сторона длины a была горизонтальна. Это упростит вычисления. После определения координат вершин треугольника следует вычислить длины медиан и определить, являются ли эти длины целыми числами.

```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
'Треугольник
xe1 = 100
ye1 = 550
GraphicsWindow.FillEllipse(xe1-5, ye1-5, 10, 10)
ed = 3
a = 136
b = 170
c = 174
x1 = 0
y1 = 0
x2 = a
y2 = 0
xe2 = xe1 + x2*ed
ye2 = ye1 - y2*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe2-5, ye2-5, 10, 10)
x3 = (a*a + b*b - c*c)/(2*a)
y3 = Math.Sqrt(b*b - x3*x3)
GraphicsWindow.DrawText(310,80, x3)
GraphicsWindow.DrawText(310,100, y3)
```



```
xe3 = xe1 + x3*ed
ye3 = ye1 - y3*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe3-5, ye3-5, 10, 10)
GraphicsWindow.DrawLine(xe1, ye1, xe2, ye2)
GraphicsWindow.DrawLine(xe2, ye2, xe3, ye3)
GraphicsWindow.DrawLine(xe3, ye3, xe1, ye1)
'Построение медиан
pa = (x1 + x2)/2
qa = (y1 + y2)/2
mx1 = xe1 + pa*ed
my1 = ye1 - qa*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(mx1-5, my1-5, 10, 10)
GraphicsWindow.DrawLine(mx1, my1, xe3, ye3)
pb = (x1 + x3)/2
qb = (y1 + y3)/2
mx2 = xe1 + pb*ed
my2 = ye1 - qb*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(mx2-5, my2-5, 10, 10)
GraphicsWindow.DrawLine(mx2, my2, xe2, ye2)
pc = (x2 + x3)/2
qc = (y2 + y3)/2
mx3 = xe1 + pc*ed
my3 = ye1 - qc*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(mx3-5, my3-5, 10, 10)
GraphicsWindow.DrawLine(mx3, my3, xe1, ye1)
xg = (mx1 + mx2 + mx3)/3
yg = (my1 + my2 + my3)/3
GraphicsWindow.FillEllipse(xg - 10, yg - 10, 20, 20)
median()
'Проверка длины медиан
Sub median
m1 = Math.Sqrt((x3 - pa)*(x3 - pa) + (y3 - qa)*(y3 - qa))
If m1 = Math.Floor(m1) Then
GraphicsWindow.DrawText(50, 30, "Медиана к стороне а")
GraphicsWindow.DrawText(50, 50, m1)
EndIf
m2 = Math.Sqrt((x2 - pb)*(x2 - pb) + (y2 - qb)*(y2 - qb))
If m2 = Math.Floor(m2) Then
GraphicsWindow.DrawText(50, 80, "Медиана к стороне б")
GraphicsWindow.DrawText(50, 100, m2)
EndIf
m3 = Math.Sqrt((x1 - pc)*(x1 - pc) + (y1 - qc)*(y1 - qc))
If m3 = Math.Floor(m3) Then
GraphicsWindow.DrawText(50, 130, "Медиана к стороне с")
GraphicsWindow.DrawText(50, 150, m3)
EndIf
EndSub
```

Результат работы программы показан на рисунке 15.

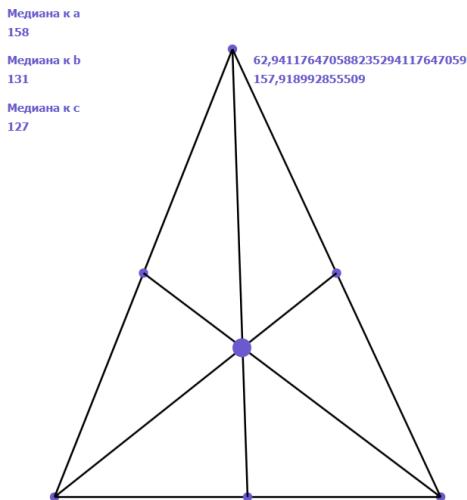


Рис. 15

В частности, вычисления показывают, что координаты одной из вершин треугольника являются дробными числами. Значит, тот факт, что исходящая из этой вершины медиана, имеет целую длину, установлен предположительно. Проведём конкретный пример вычислений, который обеспечивает полную уверенность в том, что соответствующая длина является целым числом.

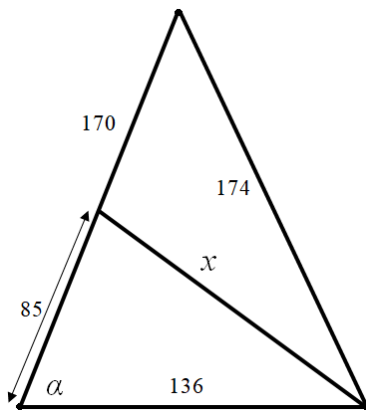


Рис. 16

Вычисления будут использовать теорему косинусов (рис. 16). Прежде всего, запишем равенство $174^2 = 136^2 + 170^2 - 2 \cdot 136 \cdot 170 \cdot \cos \alpha$. Далее получаем, что



$\cos \alpha \cdot 68 \cdot 17 = 428$. Или в итоге $\cos \alpha = \frac{107}{17^2}$. Теперь можно вычислить длину x одной из медиан.

$$\text{Итак, } x^2 = 136^2 + 85^2 - 2 \cdot 136 \cdot 85 \cdot \cos \alpha = 136^2 + 85^2 - 2 \cdot 136 \cdot 85 \cdot \frac{107}{17^2} = 17161 = 131^2.$$

Основываясь на подобных вычислениях можно переписать программу из задания 18, что, конечно, усложнит её.

Итак, мы познакомились с различными вариантами изучения рациональных множеств. Например, вопрос об описании пифагоровых треугольников был решён теоретически с помощью решения диофантова уравнения, а исследование целых треугольников, обладающих особыми свойствами, проводилось с помощью вычислений.

Здесь мы можем отметить, что подобная ситуация наблюдается и в теории чисел. Это сходство следует обсудить более подробно, поскольку оно проявляется в исследовании рациональных множеств.

4. ОБ ЭМПИРИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ МНОЖЕСТВ С ЦЕЛЫМИ РАССТОЯНИЯМИ МЕЖДУ ТОЧКАМИ

Что касается эмпирических исследований в математике, то речь, конечно, идёт о вычислениях. Такие математики как Архимед, Эйлер, Гаусс и Рамануджан нередко делали великие теоретические открытия, основываясь на результатах сложнейших вычислений. В книге [17] автор ссылается на мнение Ю. Манина, который так характеризует роль компьютерных технологий в современной математике: «То, что умели Эйлер и Гаусс, может делать любой математик за своим письменным столом». Сам автор этой книги отмечает, что «компьютеры иногда позволяют получить неформальные аргументы в пользу того или иного предположения, а иногда, наоборот, опровергнуть казавшиеся правдоподобными гипотезы».

И, конечно, основной областью исследований, основанных на вычислениях, является теория чисел. Причины этого легко понять. Натуральные числа вполне упорядочены. Именно на этом основаны эмпирические исследования в теории чисел. Речь может идти, например, о последовательном вычислении простых чисел или чисел близнецов. Поиск решения диофантовых уравнений может производиться перебором. Долгое время проводились вычисления, связанные с великой теоремой Ферма. Это лишь немногие примеры популярных исследовательских тем в сфере теории чисел. Авторы в своей статье [13] дают примеры программ, используемых в подобных вычислениях.

Задачи, связанные с арифметическими проблемами евклидовой геометрии, также могут решаться с помощью вычислительных экспериментов. Не в последнюю очередь это связано с тем, что рациональные множества перечислимы. Более подробно поясним это утверждение.

Каждое рациональное множество чисто формально можно связать с полным графом [18], с каждым ребром которого связывают число, равное расстоянию между этими точками в рациональном множестве. Описание является формальным, поскольку расстояние между вершинами графа может быть произвольным. Не менее наглядно,

чем полным графом, рациональное множество можно представить симплексом. Симплекс – аналог треугольника или тетраэдра в многомерном пространстве. У симплекса с n вершинами каждую пару вершин соединяет ребро. Таким образом, число рёбер равно $c_n^2 = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$. Представление тоже является формальным.

Но пока для нас важно только то, что с каждым реально существующим рациональным множеством из n точек можно связать набор из $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ целых чисел. Поскольку согласно [19] множество всех рациональных точек n -мерного пространства счётно, можно утверждать, что число различных рациональных множеств из n точек либо конечно, либо счётно. Следовательно, эти множества перечислимы.

Итак, мы показали, что число рациональных множеств из n точек при любом n не более чем счётно. А поскольку объединение счётного множества счётных множеств является счётным множеством, то множество рациональных множеств с конечным множеством точек является счётным. Конечным оно быть не может, поскольку целых треугольников бесконечно много.

Перечисление элементов этого множества и различных его подмножеств может производиться многими способами. Для проведения вычислительных экспериментов, связанных с поиском и построением рациональных множеств, наиболее перспективным является генетический подход. Его суть в том, чтобы отправившись от целого треугольника постепенно переходить к рациональным множествам с большим числом точек.

Такой переход напоминает построение симплициального комплекса [20], хотя имеются и некоторые отличия. Напомним, что симплициальный комплекс – топологическое пространство, представленное как объединение множеств, гомеоморфных симплексу и образующих триангуляцию этого пространства. В нашем случае речь идёт о триангуляции части плоскости.

Если рассмотреть процедуру построения рациональных множеств с увеличивающимся числом точек без углубления в детали, то будет получена следующая схема (рис. 17).

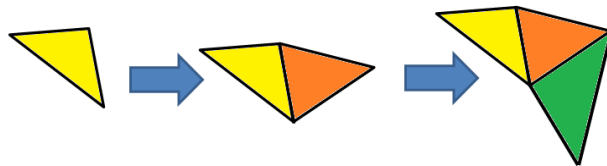


Рис. 17

К стороне исходного целого треугольника прикладываем один за другим новые целые треугольники и проверяем то расстояние, которое может оказаться иррациональным. Затем к стороне или диагонали целого четырёхугольника прикладываем очередные треугольники и делаем соответствующие проверки. Процедура может продолжаться сколь угодно долго.



На практике при реализации этой схемы, конечно, возникнет много проблем. Основной исследовательской ситуацией можно считать следующую. Уже построено рациональное множество из n точек. Выбрав из их числа две точки A и B , к ним следует прилагать различные рациональные треугольники ABC . Далее производится определение расстояний до остальных точек исходного множества и оценка их рациональности. На самом деле это достаточно сложная проблема.

При одном из подходов нужно расположить исходное рациональное множество из n точек на декартовой плоскости и работать с ним. Далее необходимо использовать метод прикладывания к отрезку треугольника, описанный в задании 17. И как было показано выше, могут возникнуть проблемы с определением факта рациональности расстояний.

При втором подходе описание рациональное множество из n точек должно иметь следующий вид. Вершины занумерованы и для каждой пары вершин указано расстояние между ними.

Хотя в целом картина исследования остаётся одной и той же, но любое изменение предполагает получение новых результатов. Таким образом, открывается возможность организации независимых самостоятельных исследований для нескольких студентов. При этом возможно получение нового результата, что повышает значимость исследования и интерес к нему.

Процедура добавления новой точки требует того или иного способа перечисления целых треугольников. Естественно, что таких способов очень много. рассмотрим один из них. Этот способ перечисления является многоуровневым. На каждом уровне рассматриваются целые треугольники ABC с заданным периметром. Если длину одной из сторон, например, AB , фиксировать, то вершины соответствующих треугольников лежат на эллипсе с фокусами в точках A и B . В целом треугольники упорядочиваются по возрастанию периметра, а также по длине стороны AB .

Задание 19. Написать программу, которая строит вершины C целых треугольников ABC с заданным периметром и фиксированной длиной стороны AB .

Решение. Очевидно, что соответствующие точки лежат на эллипсе. В программе используются формулы, выведенные в задании 17 и зафиксированные на рисунке 14. Результат работы программы показан на рисунке 18.

```
GraphicsWindow.Width = 700
GraphicsWindow.Height = 700
x0 = 350
y0 = 350
ed = 25
'Полусумма двух негоризонтальных сторон – большая полуось эллипса
a = 10
'Половина длины горизонтальной стороны
'Расстояние от фокуса до центра эллипса
c = 6
Малая полуось эллипса
```

```

b = Math.SquareRoot(a*a - c*c)
xc1 = x0 - ed*c
xc2 = x0 + ed*c
yc = y0
GraphicsWindow.FillEllipse(xc1-5, y0-5, 10,10)
GraphicsWindow.FillEllipse(xc2 + 5, y0-5, 10,10)
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0 - a*ed, y0 - b*ed, 2*a*ed,2*b*ed)
p = 2*c
При zn = 1 вершины на верхней дуге эллипса
zn = 1
For q = a - c To a + c
ver()
EndFor
При zn = -1 вершины на нижней дуге эллипса
zn = -1
For q = a - c To a + c
ver()
EndFor
Вычисление координат вершины, лежащей на эллипсе
Sub ver
r = 2*a - q
s = (p*p + q*q - r*r)/(2*p)
t = Math.SquareRoot(q*q - s*s)
xe = x0 - c*ed + s*ed
ye = y0 - zn*t*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe - 5, ye - 5, 10,10)
EndSub

```

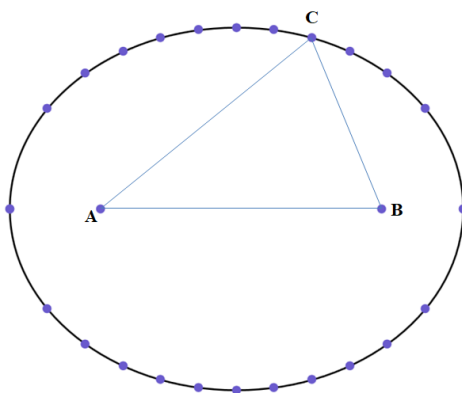


Рис. 18

Подобная визуализация наводит на следующую мысль. Множество вершин, лежащих на эллипсе, может содержать пары точек, удалённых на расстояние, выражаемое целым числом. Естественно желание найти такие пары.



Задание 20. Точки на эллипсе получены с помощью программы из задания 19. Написать программу, которая предположительно проверяет, является ли целым расстояние между двумя различными точками на эллипсе (рис. 19).

1	13	20
2	20	13,9995449920153
3	22	12,9983452043876
4	10	10
4	23	12,9983452043876
6	24	13,9995449920153
7	19	16
8	14	13,9995449920153
10	15	12,9983452043876
11	16	12,9983452043876
12	18	13,9995449920153
16	22	10

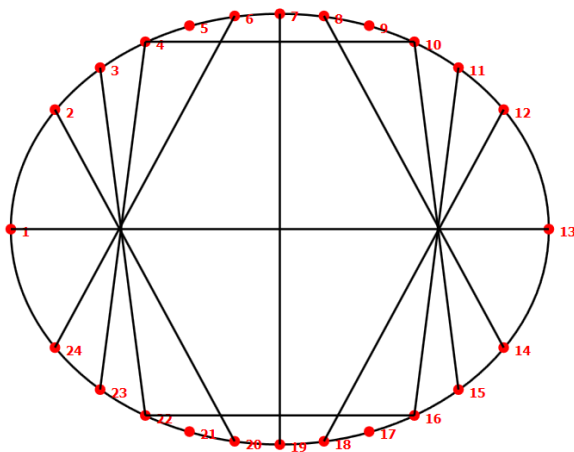


Рис. 19

Решение. Вопрос состоит в заведомом определении того, что вершины С и D удалены друг от друга на расстояние, которое не является целым. Перебирая пары точек на эллипсе, будем находить расстояния между ними и отбрасывать те, которые заведомо не могут быть целыми.

```
GraphicsWindow.Width = 900
GraphicsWindow.Height = 700
i = 1
m = 0
a = 10
c = 6
b = Math.Sqrt(a*a - c*c)
p = 2*c
zn = 1
For q = a - c To a + c
    ver()
EndFor
zn = -1
For q = a + c - 1 To a - c + 1 Step -1
```



```
ver()
EndFor
x0 = 550
y0 = 350
ed = 25
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0 - a*ed, y0 - b*ed, 2*a*ed, 2*b*ed)
GraphicsWindow.BrushColor = "red"
For i=1 To m
  xe = x0 + x[i]*ed
  ye = y0 - y[i]*ed
  GraphicsWindow.FillEllipse(xe - 5, ye - 5, 10,10)
  GraphicsWindow.DrawText(xe+10, ye - 5, i)
EndFor
n = 1
For i = 1 To m - 1
  For j = i + 1 To m
    kw1 = (x[j] - x[i])*(x[j] - x[i])
    kw2 = (y[j] - y[i])*(y[j] - y[i])
    l = Math.SquareRoot(kw1 + kw2)
    lo = Math.Round(l)
    If Math.Abs(l - lo) < .01 Then
      GraphicsWindow.DrawText(20, n*20, i)
      GraphicsWindow.DrawText(70, n*20, j)
      GraphicsWindow.DrawText(120, n*20, l)
      GraphicsWindow.DrawLine(x0 + x[i]*ed, y0 - y[i]*ed, x0 + x[j]*ed, y0 - y[j]*ed)
      n = n + 1
    EndIf
  EndFor
EndFor
Sub ver
  r = 2*a - q
  s = (p*p + q*q - r*r)/(2*p)
  t = Math.SquareRoot(q*q - s*s)
  x[i] = -c + s
  y[i] = zn*t
  i = i + 1
  m = m + 1
EndSub
```

На рисунке 20 показан вариант с большим количеством точек на эллипсе (для случая $a = 20$ и $c = 12$).

Проверка того, являются ли выбранные расстояния целыми, а не близкими к целым, должна производиться специальными ручными вычислениями. Мы поговорим о них немного позже. Что касается конкретного эллипса с рисунка 19, то здесь практически решается следующий вопрос: существуют ли фокальные хорды эллипса, имеющие целую длину.



В общем же случае элемент A_{n+1} должен проверяться для всех таких конфигураций (четырёхугольников), образованных всевозможными тройками точек исходного множества и точкой A_{n+1} . Очевидно, что работа очень большая, а достижение благоприятного результата маловероятно. Таким образом, поиск достаточно представительных целых множеств точек весьма трудоёмок.

Отметим только, что выбор исходной точки A_{n+1} можно связать с эллипсом, фокусами которого являются две точки исходного множества.

Так или иначе, нами описан путь поиска целых множеств с растущим числом элементов. Остаётся подробно описать те ручные вычисления, которые позволяют определить, является ли расстояние AD целым (рис. 21). Использоваться будут формулы, зафиксированные на рисунке 14.

Отметим, что при различных вариантах взаимного расположения треугольников ABC и DBC вычисления приобретают свою специфику. Мы рассмотрим только один конкретный вариант вычислений (рис. 22), поскольку другие отличаются только тем, что суммы длин заменяются на разности и наоборот.

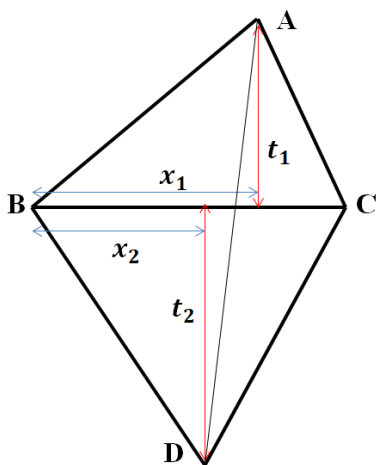


Рис. 22

Пусть $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$, $BD = p$ и $CD = q$. Тогда $x_1 = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2a}$ и $t_1 = \sqrt{b^2 - x_1^2}$, кроме того, $x_2 = \frac{p^2 - q^2 + a^2}{2a}$ и $t_2 = \sqrt{p^2 - x_2^2}$. Теперь можно вычислить квадрат отрезка AD :

$$AD^2 = (x_2 - x_1)^2 + (t_1 + t_2)^2 = \\ (x_2 - x_1)^2 + b^2 - x_1^2 + p^2 - x_2^2 + 2\sqrt{b^2 - x_1^2} \cdot \sqrt{p^2 - x_2^2}.$$

Чтобы расстояние AD выражалось рациональным числом, необходимо, чтобы число AD^2 было рациональным. Для этого рациональным должно быть слагаемое $2\sqrt{b^2 - x_1^2} \cdot \sqrt{p^2 - x_2^2}$. Именно с проверки этого обстоятельства и следует начать проверку рациональности расстояния AD . Если AD^2 рационально, то этого мало. Это число должно быть квадратом. Так или иначе, но проверка соответствующих обстоятельств может быть произведена без особых усилий.



Кроме того, исходя из выше сказанного, поиск рациональных четырёхугольников следует вести для случаев, когда t_1 и t_2 рациональны. Это условие выполняется, когда искомым четырёхугольник составлен из четырёх пифагоровых треугольников. Но, конечно, для успешного поиска необходимо разработать алгоритм перебора пифагоровых треугольников.

5. ПОСТРОЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОГО РАЦИОНАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА

В задании 13 (рис. 9) построено бесконечное рациональное множество точек, основная часть которых лежит на одной прямой. Далее будет построено бесконечное рациональное множество, точки которого уже не расположены на одной прямой.

Начнём с того, что укажем геометрические преобразования плоскости, которое переводят рациональные множества в рациональные. Речь идёт об инверсии [21]. Напомним некоторые факты, связанные с инверсией.

Инверсией плоскости относительно окружности ω , с центром в точке O (центр инверсии) и радиусом r называется отображение, которое точке A ставит в соответствие точку A_1 , лежащую на луче OA (рис. 23). При этом выполняется условие $OA \cdot A_1O = r^2$.

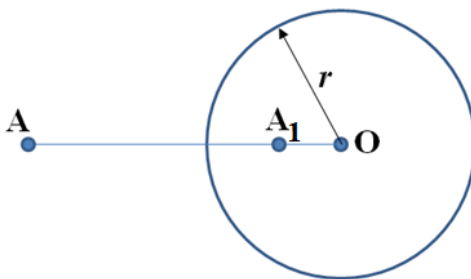


Рис. 23

Для нас особенно важен тот факт, что инверсия переводит прямую, не проходящую через точку O , в окружность, проходящую через точку O .

Покажем, что инверсия относительно окружности рационального радиуса r действительно переводит точки, которые отстоят друг от друга на рациональные расстояния, в точки, которые также отстоят друг от друга на рациональные расстояния. Пусть треугольник ABO является рациональным. Инверсия переводит точку A в точку A_1 , а точку B в точку B_1 . Рассмотрим треугольник A_1B_1O (рис. 24).

Поскольку $AO \cdot A_1O = r^2$ и $BO \cdot B_1O = r^2$, то отрезки A_1O и B_1O имеют рациональную длину. Кроме того, $\frac{AO}{BO} = \frac{B_1O}{A_1O}$, то есть треугольники AOB и B_1OA_1 подобны.

Из этого следует, что отрезок A_1B_1 имеет рациональную длину. Более того, можно без труда вывести формулу для вычисления расстояния A_1B_1 .

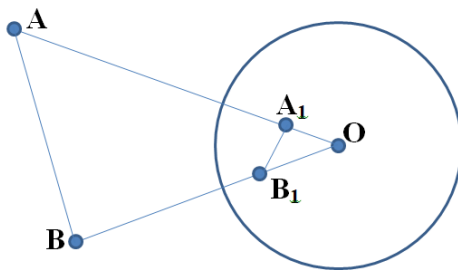


Рис. 24

Из подобия треугольников ABO и B_1A_1O следует, что $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1O}{AO}$. Следовательно,

$$A_1B_1 = \frac{AB \cdot B_1O}{AO}.$$

Задание 21. Подвергнуть множество точек из задания 13 (рис. 9) инверсии относительно окружности единичного радиуса с центром в точке E . Найти координаты точек, полученных в результате преобразования.

Решение. Точки с рациональными координатами, лежащими на прямой AO , после инверсии перейдут в точки, лежащие на окружности радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке D (рис. 25). Пусть точка A переходит в точку A_1 .

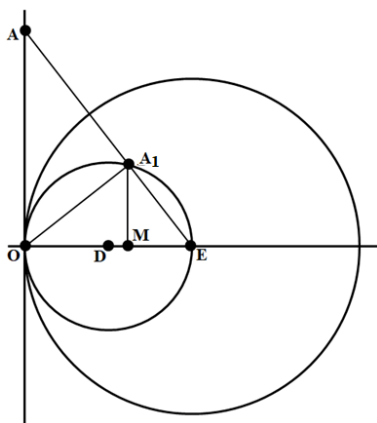


Рис. 25

Рассмотрим пифагоров треугольник AOE . Он имеет стороны следующей длины:

$OE = 1, AO = \frac{t^2 - 1}{2t}, AE = \frac{t^2 + 1}{2t}$. Поскольку точка A_1 является инверсным образом точки A , получаем, что $A_1E = \frac{1}{AE} = \frac{2t}{t^2 + 1}$. Если рассмотреть систему координат с началом



точке Е и с осью абсцисс, направленной влево, то координаты точки A_1 равны длинам отрезков EM (абсцисса) и A_1M (ордината). Найдём соответствующие величины.

Из подобия треугольников EMA_1 и EOA следует, что $\frac{ME}{OE} = \frac{A_1E}{AE}$ и $\frac{A_1M}{OA} = \frac{A_1E}{AE}$.

Значит, $x = EM = \frac{A_1E}{AE} = \frac{4t^2}{(t^2+1)^2}$ и $y = A_1M = AO \cdot \frac{A_1E}{AE} = \frac{t^2-1}{2t} \cdot \frac{4t^2}{(t^2+1)^2} = \frac{2t \cdot (t^2-1)}{(t^2+1)^2}$.

Итак, окончательно $x = \frac{4t^2}{(t^2+1)^2}$ и $y = \frac{2t \cdot (t^2-1)}{(t^2+1)^2}$.

Задание 22. Найти расстояние между двумя образами A_1 и B_1 , подвергнутых инверсии точек A и B , положение которых определяется параметрами t_1 и t_2 (рис. 26).

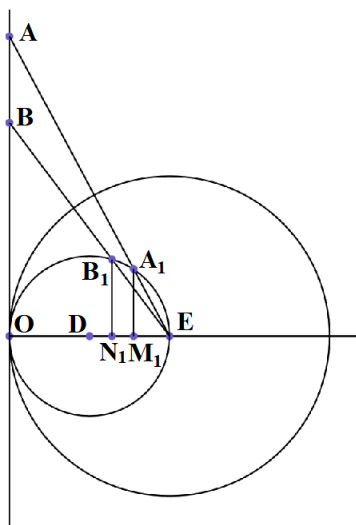


Рис. 26

Решение. Пусть точки A и B удалены от точки O соответственно на расстояния $AO = \frac{t_1^2-1}{2t_1}$ и $BO = \frac{t_2^2-1}{2t_2}$. Расстояние между ними равно

$$AB = \frac{t_2^2-1}{2t_2} - \frac{t_1^2-1}{2t_1} = \frac{(t_2-t_1) \cdot (t_1 \cdot t_2 + 1)}{2 \cdot t_1 \cdot t_2}.$$

Расстояние же между точками A_1 и B_1 по ранее доказанному в нескольких обозначениях, соответствующих рисунку 25, равно $A_1B_1 = \frac{AB \cdot B_1E}{AE}$, или

$$A_1B_1 = \frac{(t_2-t_1) \cdot (t_1 \cdot t_2 + 1)}{2 \cdot t_1 \cdot t_2} \cdot \frac{\frac{2t_2}{t_2^2+1}}{\frac{t_1^2+1}{2t_1}} = 2 \frac{(t_2-t_1) \cdot (t_1 \cdot t_2 + 1)}{(t_1^2+1) \cdot (t_2^2+1)}.$$

Визуализация рисунка 26 может быть выполнена следующей программой.

```
GraphicsWindow.Width = 620
GraphicsWindow.Height = 820
x0 = 110
y0 = 410
ed = 200
GraphicsWindow.FillEllipse(x0-5, y0-5, 10,10)
GraphicsWindow.DrawLine(x0, 0, x0, 800)
GraphicsWindow.DrawLine(x0, y0, 610, y0)
xe = x0+ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe-5, y0-5,10,10)
GraphicsWindow.DrawEllipse(xe - ed, y0-ed,2*ed,2*ed)
xd = x0+ed/2
GraphicsWindow.FillEllipse(xd-5, y0-5,10,10)
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0, y0-ed/2, ed, ed)
t1 = 4
oa = (t1*t1-1)/(2*t1)
ae = 1/oa
ya = y0 - ed*oa
GraphicsWindow.FillEllipse(x0-5, ya-5,10,10)
GraphicsWindow.DrawLine(x0, ya, xe, y0)
t2 = 3
ob = (t2*t2-1)/(2*t2)
yb = y0 - ed*ob
GraphicsWindow.FillEllipse(x0-5, yb-5,10,10)
GraphicsWindow.DrawLine(x0, yb, xe, y0)
dxa1 = 4*t1*t1/((t1*t1 + 1)*(t1*t1 + 1))
xm1 = xe - dxa1*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xm1-5, y0-5,10,10)
dya1 = 2*t1*(t1*t1-1)/((t1*t1 + 1)*(t1*t1 + 1))
xa1 = xe - dxa1*ed
ya1 = y0 - dya1*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xa1-5, ya1-5,10,10)
GraphicsWindow.DrawLine(xm1, y0, xa1, ya1)

dxa2 = 4*t2*t2/((t2*t2 + 1)*(t2*t2 + 1))
xm2 = xe - dxa2*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xm2-5, y0-5,10,10)
dya2 = 2*t2*(t2*t2-1)/((t2*t2 + 1)*(t2*t2 + 1))
xa2 = xe - dxa2*ed
ya2 = y0 - dya2*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xa2-5, ya2-5,10,10)
GraphicsWindow.DrawLine(xm2, y0, xa2, ya2)
```

В итоге нами построено бесконечное рациональное множество точек, основная часть которых лежит на одной окружности. В задании 14 показано, что исходное



множество точек на прямой всюду плотно. Из этого следует, что и рациональное множество точек на окружности также всюду плотно. Из этого в частности следует, что любой вписанный в окружность многоугольник можно сколь угодно малым сдвигом вершин в рациональный.

Задание 23. Получить тождество, которое основано на полученных выше формулах, связанных с инверсией, и доказать его с помощью алгебраических преобразований.

Решение. Отметим, что в ряде случаев ранее известные тождества позволяют доказывать новые теоремы. В качестве примера можно привести теорему Лагранжа о том, что каждое натуральное число можно представить как сумму не более четырёх квадратов натуральных чисел. Для её доказательства используется замысловатое тождество Эйлера, согласно которому произведение двух сумм четырёх квадратов также является суммой четырёх квадратов [22].

Таким образом, искомое тождество в принципе может оказаться полезным. Кроме того, доказательство этого тождества позволяет чисто алгебраически получить формулы для инвертирования точек.

Тождество строится на основе двух различных выражений длины отрезка A_1B_1 (рис. 25). При этом используется пять величин: координаты $(x_1; y_1)$ точки A_1 , координаты $(x_2; y_2)$ точки A_2 и длина отрезка A_1B_1 . Тождество имеет вид

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = A_1B_1^2$$

или

$$(y_2 - y_1)^2 = A_1B_1^2 - (x_2 - x_1)^2$$

Конкретные значения этих пяти величин таковы.

$$x_1 = \frac{4t_1^2}{(t_1^2 + 1)^2}$$

$$y_1 = \frac{2t_1(t_1^2 - 1)}{(t_1^2 + 1)^2}$$

$$x_2 = \frac{4t_2^2}{(t_2^2 + 1)^2}$$

$$y_2 = \frac{2t_2(t_2^2 - 1)}{(t_2^2 + 1)^2}$$

$$A_1B_1 = 2 \frac{(t_2 - t_1) \cdot (t_1 \cdot t_2 + 1)}{(t_1^2 + 1) \cdot (t_2^2 + 1)}$$



Преобразуем разность: $x_2 - x_1 = \frac{4t_2^2}{(t_2^2 + 1)^2} - \frac{4t_1^2}{(t_1^2 + 1)^2} = 4 \frac{(t_2^2 - t_1^2)(1 - t_1^2 t_2^2)}{(t_1^2 + 1) \cdot (t_2^2 + 1)}$. Тождество примет вид

$$\left(\frac{2t_2(t_2^2 - 1)}{(t_2^2 + 1)^2} - \frac{2t_1(t_1^2 - 1)}{(t_1^2 + 1)^2} \right)^2 = 4 \frac{(t_2 - t_1)^2 \cdot (t_1 \cdot t_2 + 1)^2}{(t_1^2 + 1)^2 \cdot (t_2^2 + 1)^2} - 16 \frac{(t_2^2 - t_1^2)^2 (1 - t_1^2 t_2^2)^2}{(t_1^2 + 1)^4 \cdot (t_2^2 + 1)^4}.$$

Разделим обе части уравнения на 4 и получим уравнение

$$\left(\frac{t_2(t_2^2 - 1)}{(t_2^2 + 1)^2} - \frac{t_1(t_1^2 - 1)}{(t_1^2 + 1)^2} \right)^2 = \frac{(t_2 - t_1)^2 \cdot (t_1 \cdot t_2 + 1)^2}{(t_1^2 + 1)^2 \cdot (t_2^2 + 1)^2} - 4 \frac{(t_2^2 - t_1^2)^2 (1 - t_1^2 t_2^2)^2}{(t_1^2 + 1)^4 \cdot (t_2^2 + 1)^4}.$$

Его можно считать соответствующим тождеством. Его доказательство может быть проведено с помощью достаточно кропотливых преобразований.

Мы же получим из этого уравнения довольно интересное задание. Для этого сначала избавимся от дробей, умножив обе части уравнения на $\frac{(t_2^2 - t_1^2)^2 (1 - t_1^2 t_2^2)^2}{(t_1^2 + 1)^4 \cdot (t_2^2 + 1)^4}$. Тогда в правой части будет стоять выражение

$$(t_2 - t_1)^2 \cdot (t_1 \cdot t_2 + 1)^2 \cdot (t_1^2 + 1)^2 \cdot (t_2^2 + 1)^2 - ((t_1^2 + 1)^2 \cdot (t_2^2 + 1)^2 - 4 \cdot (t_2^2 - t_1^2)^2 (1 - t_1^2 t_2^2)^2) = (t_2 - t_1)^2 \cdot (1 + t_1 \cdot t_2) \cdot ((t_1^2 + 1)^2 \cdot (t_2^2 + 1)^2 - 4 \cdot (t_1 + t_2)^2 \cdot (1 - t_1 \cdot t_2)^2).$$

В левой части уравнения стоит квадрат, значит, квадратом должна быть и правая часть. На основе этого можно сформулировать задание.

Задание 24. Доказать, что выражение

$$(t_1^2 + 1)^2 \cdot (t_2^2 + 1)^2 - 4 \cdot (t_1 + t_2)^2 \cdot (1 - t_1 \cdot t_2)^2$$

является квадратом.

Решение. Соответствующее выражение является разностью квадратов. По этой причине оно разлагается на два множителя

$$\begin{aligned} & (t_1^2 + 1) \cdot (t_2^2 + 1) - 2 \cdot (t_1 + t_2) \cdot (1 - t_1 \cdot t_2) \text{ и} \\ & (t_1^2 + 1) \cdot (t_2^2 + 1) + 2 \cdot (t_1 + t_2) \cdot (1 - t_1 \cdot t_2). \end{aligned}$$

Докажем, что каждый из сомножителей также является квадратом. Произведение $2 \cdot (t_1 + t_2) \cdot (1 - t_1 \cdot t_2)$ наводит на мысль о квадрате суммы (или разности) многочленов $(t_1 + t_2)$ и $(1 - t_1 \cdot t_2)$. Если это верно. То должно выполняться равенство $(t_1^2 + 1) \cdot (t_2^2 + 1) = (t_1 + t_2)^2 + (1 - t_1 \cdot t_2)^2$. Его доказательство не представляет труда.

Как уже отмечалось, построенное рациональное множество точек на окружности является всюду плотным.

Задание 25. Продемонстрировать это обстоятельство с помощью программы.

Решение. Соответствующая программа заполняет небольшими кружочками большую окружность на экране.



```

GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
x0 = 550
y0 = 300
r = 250
For t = -100 To 100 Step .001
  x = 4*t*t/((t*t + 1)*(t*t + 1))
  y = 2*t*(t*t - 1)/((t*t + 1)*(t*t + 1))
  xe = x0 - 2*r*x
  ye = y0 - 2*r*y
  GraphicsWindow.FillEllipse(xe - 2, ye - 2, 4, 4)
EndFor

```

Отметим, что величина $x = \frac{4t^2}{(t^2 + 1)^2}$, характеризующая положение инвертированной точки на окружности, не является абсциссой, хотя она задаёт некоторое горизонтальное расстояние (рис. 25). В связи с этим выводим формулы, которые будут определять положение аналогов инвертированных точек на единичной окружности. Легко понять, что абсцисса будет равна удвоенному расстоянию DM с рисунка 25. Ордината точки на единичной окружности соответствует удвоенной величине $y = \frac{2t \cdot (t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2}$.

Итак, положение точки на единичной окружности определяется координатами $x = 1 - \frac{8t^2}{(t^2 + 1)^2}$ и $y = \frac{4t \cdot (t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2}$.

Задание 27. Доказать алгебраически, что определяемая этими координатами точка удалена от начала координат на единичное расстояние.

Решение. Нужно доказать тождество

$$\left(1 - \frac{8t^2}{(t^2 + 1)^2}\right)^2 + \left(\frac{4t \cdot (t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2}\right)^2 = 1.$$

Избавимся от дробей в равенстве и получим

$$((t^2 + 1)^2 - 8t^2)^2 + 16 \cdot t^2 \cdot (t^2 - 1)^2 = (t^2 + 1)^4.$$

Доказательство этого тождества не представляет труда.

Задание 29. Найти бесконечное множество решений в целых числах диофантова уравнения $x^2 + y^2 = z^4$.

Решение. Тождество из предыдущего задания

$$((t^2 + 1)^2 - 8t^2)^2 + 16 \cdot t^2 \cdot (t^2 - 1)^2 = (t^2 + 1)^4$$



позволяет получить набор соответствующих решений. Например при $t = 9$, получаем решение, для которого $x = 6076, y = 2880, z = 82$.

Задание 30. Указать способ выбора инвертированной точки, сколь угодно близкой к некоторой фиксированной точки на единичной окружности.

Решение. Положение точки на единичной окружности определяется углом наклона α радиуса вектора, направленного из начала координат в эту точку. Сама точка имеет координаты $(\cos \alpha; \sin \alpha)$. Инвертированная точка на единичной окружности определяется координатами $x = 1 - \frac{8t^2}{(t^2 + 1)^2}$ и $y = \frac{4t \cdot (t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2}$.

Таким образом, для того, чтобы фиксированная и инвертированная точки совпадали следует решить уравнение

$$1 - \frac{8t^2}{(t^2 + 1)^2} = \cos \alpha.$$

Для нахождения инвертированной точки, близкой к фиксированной, это уравнение нужно решить приближённо. Преобразуем уравнение,

$$(1 - \cos \alpha) \cdot (t^2 + 1)^2 = 8t^2 + 8 - 8.$$

Обозначив $1 - \cos \alpha$ через c , а $(t^2 + 1)$ через z , получаем квадратное уравнение

$$c \cdot z^2 - 8z + 8 = 0$$

Его решения выражаются по формуле

$$z_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 32 \cdot c}}{2 \cdot c} = \frac{4 \pm 2 \cdot \sqrt{4 - 2 \cdot c}}{c}.$$

Величина c меняется в пределах от нуля до двух. Следующая программа показывает, что функция $z = \frac{4 + 2 \cdot \sqrt{4 - 2 \cdot c}}{c}$ на соответствующем интервале имеет значение больше двух (рис. 27).

```
GraphicsWindow.Width = 450
GraphicsWindow.Height = 610
x0 = 100
y0 = 600
GraphicsWindow.FillEllipse(x0-5, y0-5, 10,10)
ed1 = 100 'Декартова плоскость сжата для наглядности
ed2 = 25
For t=-1 To 5 Step .01
For u=-1 To 30 Step 1
x=x0 + ed1*t
```



```
y=y0 - ed2*u  
GraphicsWindow.SetPixel(x, y,"green")  
EndFor  
EndFor  
For t=-1 To 5 Step 1  
For u=-1 To 30 Step .01  
x=x0 + ed1*t^3  
y=y0 - ed2*u  
GraphicsWindow.SetPixel(x, y,"green")  
EndFor  
EndFor  
For c=.1 To 5 Step .001  
z=(4+Math.SquareRoot(4-2*c))/c  
xe=x0 + ed1*c  
ye=y0 - ed2*z  
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,"black")  
EndFor
```

Таким образом, t^2 из уравнения $z=(t^2+1)$ при любом фиксированном z является неотрицательным числом. Следовательно, t имеет два действительных значения. Положительное значение определяет точку на верхней полуокружности, а отрицательное – на нижней. Итак, имеет место формула

$$t = \pm\sqrt{z-1}.$$

В принципе значение t может быть иррациональным. Приближённое значение корня квадратного как раз и позволяет найти нужную точку.

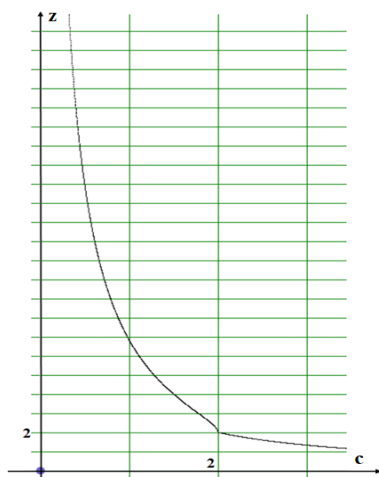


Рис. 27

Задание 31. Строго доказать, что $z(c) > 2$ на интервале $[0; 2]$.

Задание 32. Построить рациональный треугольник, близкий к равнобедренному прямоугольному треугольнику.

Решение. Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник с вершинами $A(-1;0)$, $C(1;0)$ и $B(0;1)$. Вершина прямого угла находится в последней из точек B . Тогда в соответствии с результатами задания 30, полагаем, что $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $c = 1$, а $t = \sqrt{3 + 2 \cdot \sqrt{2}} = 2,4142135623731\dots$ Далее нужно округлить t и вычислить координаты инвертированной точки, которая заменит вершину $B(0;1)$ точкой с координатами $(x; y)$.

Начнём с грубого округления $t = 2$, которое облегчит вычисления. По формулам $x = 1 - \frac{8t^2}{(t^2 + 1)^2}$ и $y = \frac{4t \cdot (t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2}$ получаем, что $x = -\frac{7}{25}$ и $y = \frac{24}{25}$. Перейдём к подобному треугольнику с целыми сторонами и вычислим длину сторон треугольника, подобного треугольнику ABC . В итоге получаем, что $AB = 30$, $BC = 40$ и $AC = 50$. Таким образом, получен египетский треугольник.

Сделаем более точное округление: $t = 2,5 = \frac{5}{2}$. Прежде чем проводить вычисления, займёмся преобразованием формул без лишних подробностей. Пусть $t = \frac{p}{q}$, тогда $x = 1 - \frac{8t^2}{(t^2 + 1)^2} = \frac{(p^2 + q^2)^2 - 8p^2q^2}{(p^2 + q^2)^2}$ и $y = \frac{4t \cdot (t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2} = \frac{4pq(p^2 - q^2)}{(p^2 + q^2)^2}$. Вершины целочисленного треугольника ABC в этом случае имеют следующие координаты:

$$A(-(p^2 + q^2)^2; 0), C((p^2 + q^2)^2; 0), B(x \cdot (p^2 + q^2)^2; y \cdot (p^2 + q^2)^2).$$

Проведём вычисления для случая $p = 5$ и $q = 2$. Вершины имеют следующие координаты: $A(-841; 0)$, $C(841; 0)$, $B(41; 840)$. Длины сторон таковы: $AC = 1682$, $AB = \sqrt{(841 + 41)^2 + 840^2} = \sqrt{1483524} = 1218$ и $BC = \sqrt{(841 - 41)^2 + 840^2} = \sqrt{1345600} = 1160$.

Наконец, проведём ещё одно округление: $t = 2,4 = \frac{12}{5}$. Вершины будут иметь следующие координаты: $A(-28561; 0)$, $C(28561; 0)$, $B(-239; 28560)$. Вычисление длины сторон AC и BC , однако, может вызвать затруднения. Координаты стали выражаться слишком большими числами. Использование калькулятора и Small Basic приводит к потере точности. Но Excel и в данном случае позволяет получить нужные результаты: $AC = 57122$, $AB = 40222$ и $BC = 40560$.

Дальнейшее уточнение величины t приведёт к ещё большему росту координат. Тем не менее, можно считать, что последнее приближение даёт хороший результат – треугольник близок к равнобедренному.

Как известно, чёрный квадрат Казимира Малевича не является квадратом. Наши вычисления позволяют получить целое приближение чёрного квадрата (рис. 7) и, тем самым, соединить математику и искусство.



Когда мы говорили о конечных рациональных множествах. Речь шла о возможном увеличении числа точек, хотя бы на одну. Что касается бесконечных рациональных множеств, то попытка добавления новой точки может привести к тому, что новое множество останется бесконечным, но из него при этом может выпасть бесконечное подмножество точек. Приведём пример.

Рассмотрим бесконечное рациональное множество точек, основная часть которых лежит на одной прямой из задания 13 (рис. 9). Кроме того, в него входят две точки, на этой прямой не лежащие. Попытаемся найти ещё две дополнительные точки на горизонтали (рис. 28).

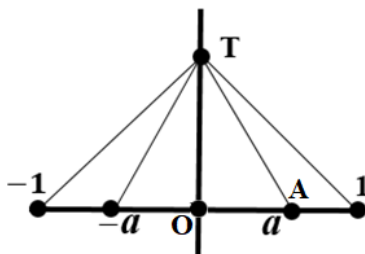


Рис. 28

Пусть одна из новых точек имеет координаты $(a; 0)$. Точка T , как мы знаем имеет координаты $(0; \frac{t^2-1}{2t})$. Мы хотим, чтобы треугольник TOA при этом являлся пифагоровым для бесконечного множества точек T , задаваемых параметром t . Таким образом, $(\frac{t^2-1}{2t})^2 + a^2 = z^2$ или $(t^2-1)^2 + 4 \cdot t^2 a^2 = 4 \cdot t^2 z^2$. В итоге получим диофантово уравнение $t^4 + 2 \cdot (1 - 2 \cdot a^2)t^2 + 1 = 4 \cdot t^2 z^2$. Нужно найти число a , при котором уравнение имеет бесконечное количество рациональных решений, или доказать, что такого числа не существует.

Немного упростим уравнение, чтобы предварительно решить более обозримое диофантово уравнение. Положим, что $t = \frac{p}{q}, 1 - 2 \cdot a^2 = c$ и $2pqz = u$, тогда, избавившись от дробей, мы получаем своеобразное биквадратное диофантово уравнение, которое следует решать в целых числах

$$p^4 + 2cp^2q^2 + q^4 = u^2$$

Отметим, что задача упростилась не слишком, поскольку нужно искать ещё и число c .

Наконец, кратко, поскольку размеры статьи не позволяют подробно обсуждать столь сложную тематику, коснёмся вопроса о преобразованиях рациональных множеств.

6. РАЦИОНАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Преобразования рациональных множеств как минимум могут быть двух видов. Примером преобразования первого типа является описанное выше преобразование Виета, которое один пифагоров треугольник переводит в другой. При этом преобразование имеет следующий характер. Исходный треугольник задан, а его образ строится по некоторому алгоритму на основе вершин исходного треугольника.

Обобщая, можно определить *преобразования первого типа следующим образом: рациональное множество из n точек конструктивно преобразуется в рациональное же множество из n точек с иными расстояниями между точками.*

Примером преобразования второго типа является инверсия. Это преобразование, которое затрагивает не только рациональное множество, но и все точки плоскости.

Возникает вопрос: *существуют ли другие преобразования первого и второго типа, сохраняющие рациональные расстояния.*

При этом, конечно, преобразования второго должны существенно и непропорционально расстояния между точками рационального множества. Движения и подобия плоскости этому условию не удовлетворяют.

Возможен случай, что кроме инверсии других преобразований второго рода не существует. Тогда это нужно доказать.

Ещё один круг вопросов, связанных со структурой рациональных множеств, направлен на изучение симметрий рациональных множеств, которые, естественно, эти множества не меняют. Таким образом, речь идёт о группах *преобразований рациональных множеств.*

Сформулируем две конкретных задачи.

Задача 1. Имеет ли бесконечное рациональное множество точек, основная часть которых лежит на одной прямой из задания 13 (рис. 9) подмножества, которые являются арифметическими прогрессиями значительной длины или даже бесконечными. Речь и идёт о возможности сдвигов.

Задача 2. Изучить симметрии рационального множества точек на окружности. В частности, речь идёт и о возможности поворотов.

Отметим, что симметрия относительно оси абсцисс уже отмечалась.

Более подробное обсуждение этих вопросов требует новой статьи.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При защите дипломных работ, как у бакалавров, так и у магистров, комиссия, оценивая работу, в первую очередь смотрит на уровень освоения идей и методов высшей математики, а также новизну полученных результатов. Научный руководитель в свою очередь должен кроме этих требований должен учитывать посильность выбранной темы для бакалавра или магистра. Оценим с этих позиций темы выпускных работ, связанные с тематикой данной статьи.



- Решение вопросов, связанных с решением диофантовых уравнений и работой с целыми и рациональными числами с помощью компьютерных программ, требует высокого уровня подготовки студента.
- Новизна результатов практически обеспечена, даже в случае, когда результаты отрицательные. Поясним это утверждение примером из области теории чисел. Долгое время компьютерная проверка великой теоремы Ферма состояла в том, что устанавливалось отсутствие решений меньших некоторой границы.
- Посильность задач, выбранных руководителем, должна продумываться очень внимательно. Слишком много здесь может возникнуть затруднений.

Укажем две темы, которые можно считать приемлемыми по всем параметрам. В книге [16] есть параграф, который называется «Пифагоровы треугольники со сторонами, меньшими 100». Темой достаточно простой работы может стать поиск и перечисление пифагоровых треугольников, некоторые стороны которых больше 100.

Более сложной темой является поиск рациональных четырёхугольников, не вписанных в окружность.

Но в целом круг задач по соответствующей тематике необозрим. По этой причине авторы надеются, что обсуждение вопросов, связанных с рациональными множествами, может оказаться полезным для преподавателей математики.

Литература

1. Куланин Е.Д., Нуркаева И.М. О двух геометрических задачах на экстремум. Математика в школе. 2019. № 4. С. 35–40.
2. Куланин Е.Д., Нуркаева И.М. Еще раз о задаче Мавло. Математика в школе. 2020. № 2. С. 76–79.
3. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М. Пропедевтика решения экстремальных задач в школьном курсе математики. Моделирование и анализ данных. 2019. № 4. С. 127–144.
4. Куланин Е. Д., Нгуен Ву Куанг, Степанов М.Е. Осязаемая предметность с компьютерной поддержкой. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. 2019. № 4. С. 145–156.
5. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М. Роль образного мышления в научном мышлении. Моделирование и анализ данных. 2020. Т. 10. № 2 С. 110–128.
6. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М. О различных подходах к решению экстремальных задач. Моделирование и анализ данных. 2020. Т. 11. № 1. С. 40–60.
7. Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А., Куланин Е.Д. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами. Москва, 2013. Том 2 (8-е издание).
8. Степанов М.Е. Некоторые вопросы методики преподавания высшей математики. Моделирование и анализ данных. 2017. № 1. С. 54–94.
9. Куланин Е.Д., Степанов М.Е. Из опыта работы в режиме дистанционного обучения Моделирование и анализ данных. 2022. Т. 12. № 3. С. 58–70.
10. Куланин Е.Д., Степанов М.Е. Всестороннее рассмотрение математических понятий как методический прием. Моделирование и анализ данных. 2022. Т. 12. № 4. С. 67–84.
11. Куланин Е.Д., Степанов М.Е. О визуализации решений некоторых экстремальных задач. Моделирование и анализ данных. 2022. Т. 12. № 4. С. 94–104.
12. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Панфилов А.Д., Потоньшев И.С. Системный подход к методике тифлопедагогики на примере задач математического анализа. 2022. Т. 12. № 2. С. 34–82.



13. Куланин Е.Д., Степанов М.Е. Вычислительный эксперимент в преподавании высшей математики на примере теории чисел. Моделирование и анализ данных. 2024. Т. 14. № 1. С. 170–195.
14. Куланин Е.Д., Степанов М.Е. Использование образов в преподавании высшей математики. Моделирование и анализ данных. 2024. Т. 14. № 2. С. 192–225.
15. Куланин Е.Д., Степанов М.Е. Вычислительный эксперимент в преподавании высшей математики. Комбинаторика и её приложения. Моделирование и анализ данных. 2024. Т. 14. № 3. С. 174–202.
16. Серпинский В. Пифагоровы треугольники. М., Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1959.
17. Зюзьков В.М. Эксперименты в теории чисел. Томск Издательство НТЛ, 2019.
18. Оре О. Теория графов. М., Наука, 1980.
19. Александров П.С. Введение в общую теорию множеств и функций. М. – Л. Гос. изд. технико-теоретической литературы. 1948.
20. Прасолов В.В. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М., МЦНМО, 2004.
21. Бакельман Н.Я. Инверсия. М., Наука, 1966.
22. Михелович Ш.Х. Теория чисел. М., Высшая школа, 1962.



Sets of Points That Are a Certain Distance Apart

Yevgeny D. Kulanin*

Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>

e-mail: lucas03@mail.ru

Mikhail E. Stepanov**

Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>

e-mail: mestepanov@yandex.ru

The article continues the cycle ([1] – [15]) of methodological developments by the authors. The article discusses problems related to sets of points whose distances are rational numbers (let's call these sets rational). The study of such sets is related to the solution of Diophantine equations. The relevant tasks can be used when choosing topics for students' research work. The authors draw on their work experience at the Faculty of Information Technology of the MSUPE.

Keywords: Euclidean plane, distance between points on the plane, Diophantine equations, integer triangles, Pythagorean triangles, Pythagorean triples, Geronian triangles, congruent number, Pythagorean fours, Eisenstein triple, Robbins pentagon, inversion, Erdos–Diophantus graph, Erdos–Enning theorem.

For citation:

Kulanin Y.D., Stepanov M.E. Sets of Points That Are a Certain Distance Apart. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2025. Vol. 15, no. 1, pp. 210–251. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2025150111> (In Russ., abstr. in Engl.)

References

1. Kulanin E.D., Nurkaeva I.M. On two geometric problems on an extra-mumm. *Mathematics at school*. 2019. No. 4. pp. 35–40.
2. Kulanin E.D., Nurkaeva I.M. Once again about the Mavlo task. *Mathematics at school*. 2020. No. 2. pp. 76–79.

***Yevgeny D. Kulanin**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>, e-mail: lucas03@mail.ru

****Mikhail E. Stepanov**, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: mestepanov@yandex.ru



3. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. Propaedeutics of solving extreme problems in a school mathematics course. *Data modeling and analysis*. 2019. No. 4. pp. 127–144.
4. Kulanin E. D., Nguyen Wu Quang, Stepanov M. E. Tangible objectivity with computer support. *Data modeling and analysis*. Scientific journal. 2019. No. 4. pp.145–156.
5. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. The role of imaginative thinking in scientific thinking. *Data modeling and analysis*. 2020. Vol.10. No.2 Pp.110–128.
6. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. On various approaches to solving extreme problems. *Data modeling and analysis*. 2020. Vol.11. No. 1. pp.40–60.
7. Lungu K.N., Norin V.P., Written D.T., Shevchenko Yu.A., Kulanin E.D. Collection of problems in higher mathematics with control papers. Moscow, 2013. Volume 2 (8th edition).
8. Stepanov M.E. Some questions of teaching methods of higher education mathematics. *Data modeling and analysis*. 2017. No.1. pp.54–94.
9. Kulanin E.D., Stepanov M.E. From the experience of working in remote mode Learning Modeling and data analysis. 2022. Vol. 12. No. 3. pp.58–70.
10. Kulanin E.D., Stepanov M.E. Comprehensive consideration of mathematical concepts as a methodological technique. *Data modeling and analysis*. 2022. vol. 12. No.4. Pp .67–84.
11. Kulanin E.D., Stepanov M. E. On visualization of solutions to some extreme tasks. *Data modeling and analysis*. 2022. vol. 12. No. 4. pp.94–104.
12. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Panfilov A.D., Potonysh I.S. A systematic approach to the method of typhlopedagogy on the example of mathematical analysis problems. *Data modeling and analysis*. 2022. vol. 12. No.2. pp.34–82.
13. Kulanin E.D., Stepanov M.E. Computational experiment in teaching higher mathematics on the example of number theory. *Data modeling and analysis*. 2024. Vol.14. No. 1. pp.170–195.
14. Kulanin E.D., Stepanov M.E. The use of images in teaching higher education mathematics. *Data modeling and analysis*. 2024. vol.14. No.2. C.192–225.
15. Kulanin E.D., Stepanov M.E. Computational experiment in teaching higher mathematics. Combinatorics and its applications. *Modeling and analysis data*. 2024. vol.14. No.3. C.174–202.
16. Serpinsky V. Pythagorean triangles. Moscow, State Educational and Pedagogical Publishing House of the Ministry of Education of the RSFSR, 1959.
17. Zyuzkov V.M. Experiments in number theory. Tomsk NTL Publishing House, 2019.
18. Ore O. Graph Theory. Moscow, Nauka, 1980.
19. Alexandrov P.S. Introduction to the general theory of sets and functions. Moscow – L. State Publishing House of Technical and Theoretical Literature. 1948.
20. Prasolov V.V. Elements of combinatorial and differential topology. Moscow, ICNMO, 2004.
21. Bakelman N. Ya. Inversion. Moscow, Nauka, 1966.
22. Mikhelevich Sh. Kh. Theory of numbers. Moscow, Higher School, 1962.

Получена 31.01.2025

Принята в печать 17.02.2025

Received 31.01.2025

Accepted 17.02.2025

Моделирование и анализ данных 2025. Том 15. № 1.

Научный журнал

Издаётся с 2011 года

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный психолого-педагогический университет»

Адрес редколлегии:

г. Москва, ул. Сretenка, 29, факультет информационных технологий

Тел.: +7 (499) 167-66-74

E-mail: mad.mgppu@gmail.com

Журнал зарегистрирован в Государственном комитете РФ по печати.

Свидетельство о регистрации средств массовой информации

ПИ № ФС77-66444 от 14 июля 2016 года

ISSN: 2219-3758

ISSN: 2311-9454 (online)

Подписано в печать: 20.02.2025.

Формат: 70*100/16. Гарнитура Times.

Усл. печ. п. 15,8. Усл.-изд. л. 11,2.

Тираж 100 экз.