

3

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

MODELLING AND DATA ANALYSIS

SCIENTIFIC JOURNAL

2024

ISSN: 2219-3758

ISSN: 2311-9454 (ONLINE)

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

2024 • Том. 14 • № 3

MODELLING AND DATA ANALYSIS

SCIENTIFIC JOURNAL

2024 • Vol. 14 • № 3



Московский государственный
психолого-педагогический университет
Moscow State University
of Psychology & Education

Моделирование и анализ данных

Главный редактор:

Л.С. Куравский ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Заместители главного редактора:

С.Д. Кулик МИФИ, Россия

А.В. Пантелеев МАИ, Россия

Редакционный совет

Председатель редакционного совета:

Г.Г. Амосов МИАН, Россия

Члены редакционного совета:

В.А. Барабанщиков ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Питер Бентлер Калифорнийский университет
Лос-Анджелеса, США

А.В. Горбатов МИСиС, Россия

Л.С. Куравский ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Леонид Либкин Эдинбургский университет,
Великобритания

А.А. Марголис ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

В.В. Рубцов ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Д.В. Ушаков ИП РАН, Россия

Девид Фрэнсис Университет Хьюстона, США

Редакционная коллегия:

К.К. Абгарян ФИЦ ИУ РАН, Россия

Г.Г. Амосов МИАН, Россия

М.В. Воронов ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Е.Л. Григоренко МГУ им. М.В. Ломоносова,
Россия; Йельский университет,
США

В.К. Захаров МГУ им. М.В. Ломоносова,
Россия

А.И. Кибзун МАИ, Россия

Леонид Либкин Эдинбургский университет,
Великобритания

В.Р. Милов НГТУ им. Р.Е. Алексеева,
Россия

А.В. Наумов МАИ, Россия

Д.Л. Ревизников МАИ, Россия

Холлинг Хайнц Университет Мюнстера,
Германия

Девид Фрэнсис Университет Хьюстона,
США

К.В. Хорошенков Брэдфордский университет,
Великобритания.

Г.А. Юрьев ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Моделирование и анализ данных

Издательство ФГБОУ ВО МГППУ

Издается с 2011 года. Периодичность: 4 раза в год.

Свидетельство регистрации СМИ: ПИ № ФС77-66444

Дата регистрации: 14.07.2016

Формат: 70×100/16

Все права защищены. Название журнала, логотип, рубрики, все тексты и иллюстрации являются собственностью ФГБОУ ВО МГППУ и защищены авторским правом. Перепечатка материалов и использование иллюстраций допускается только с письменного разрешения редакции.

© ФГБОУ ВО «Московский государственный психолого-педагогический университет», 2024, № 3

Modelling and Data Analysis

Editor-in-Chief:

L.S. Kuravsky MSUPE, Russia

Deputy Editors-in-Chief:

S.D. Kulik MPEPhI, Russia

A.V. Panteleev MAI, Russia

The Editorial Council

Chairman of the Editorial Council:

G.G. Amosov MI RAS, Russia

The Members of the Editorial Council:

V.A. Barabanschikov MSUPE, Russia
Peter Bentler University of California,
USA

A.V. Gorbатов

L.S. Kuravsky MSUPE, Russia

Leonid Libkin University of Edinburgh,
UK

A.A. Margolis

V.V. Rubtsov MSUPE, Russia

D.V. Ushakov IP RAS, Russia

David Francis University Of Houston, USA

The Editorial Board:

K.K. Abgaryan IU RAS, Russia

G.G. Amosov MI RAS, Russia

M.V. Voronov MSUPE, Russia

E.L. Grigorenko Lomonosov Moscow State
University, Russia;
Yale University, USA

V.K. Zakharov

Lomonosov Moscow State
University, Russia

A.I. Kibzun MAI, Russia

Leonid Libkin University of Edinburgh,
UK

V.R. Milov NNSTU n.a. R.E. Alekseev,
Russia

A.V. Naumov MAI, Russia

D.L. Reviznikov MAI, Russia

Holling Heinz University Of Münster,
Germany

David Francis University Of Houston,
USA

K.V. Horoshenkov University of Bradford,
UK

G.A. Yuryev MSUPE, Russia

Modelling and Data Analysis

Publisher MSUPE

Frequency: since 2011

Published: 4 times a year

The mass medium registration certificate:

PN № ФС77-66444.

From: 14.07.2016

Format: 70×100/16

All rights reserved. Journal title, logo, rubrics, all texts and images are the property of MSUPE and copyrighted. Using reprints and illustrations is allowed only with the written permission of the publisher.

© MSUPE, 2024, no. 3



◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇ СОДЕРЖАНИЕ ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

АНАЛИЗ ДАННЫХ

<i>Пынько Л.Е., Толкачева Е.В.</i> Анализ угроз информационной безопасности органов государственной власти с помощью нейронных сетей	7
<i>Потанина А.М., Артеменков С.Л.</i> Анализ взаимосвязей предикторов академической успеваемости школьников методом сетевого моделирования	22

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

<i>Пантелеев А.В., Хвошнянская Е.А.</i> Приближенный метод синтеза непрерывных систем совместного оценивания и управления на основе SDRE технологии	41
<i>Подгорная В.М.</i> О субоптимальном решении задачи быстродействия для линейной дискретной системы в случае несимметричных ограничений на управления	63
<i>Пантелеев А.В., Милютина С.А.</i> Оптимизация инвестиционного портфеля бинарным методом роя пчел	87

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

<i>Мороз Л.И.</i> Алгоритм для численного решения диффузионно-реакционно-дрейфового уравнения с дробной производной по времени и координате	105
--	-----

КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

<i>Михайловский М.А., Ермаков С.С., Юрьева Н.Е.</i> Количественная оценка степени сформированности навыков командной деятельности	118
<i>Левонovich Н.И.</i> Разработка и внедрение многопоточного сервиса распознавания речи с помощью связки C#, C++ и Python	135
<i>Савенков Е.А., Катышев Д.А., Нуркаева И.М.</i> Компьютерная реализация системы самопознания	149



МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ

Куланин Е.Д., Степанов М.Е.

Вычислительный эксперимент в преподавании
высшей математики. Комбинаторика и её приложения..... 174



METHOD OF TEACHING

Kulanin Y.D., Stepanov M.E

Computational Experiment in Teaching

Higher Mathematics. Combinatorics and its Applications 199



УДК 378

Анализ угроз информационной безопасности органов государственной власти с помощью нейронных сетей

Пынько Л.Е.*

Дальневосточный институт управления – филиал РАНХиГС
(ФГБОУ ВО ДВИУ-филиал РАНХиГС)
г. Хабаровск, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8938-130X>
e-mail: [lusiena_03@mail.ru](mailto:lusiaena_03@mail.ru)

Толкачева Е.В.**

Санкт-Петербургский государственный университет (ФГБОУ ВО СПбГУ)
г. Санкт-Петербург, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1304-809X>
e-mail: e.tolkacheva@spbu.ru

Обеспечение информационной безопасности органов государственной власти требует применение специализированных инструментов, учитывающих существование разных источников информационных угроз, их постоянное изменение, а также проблемы интеграции оценок вероятности их реализации и степени возможного ущерба. Данное исследование направлено на разработку методики анализа угроз информационной безопасности органов государственной власти с помощью нейронных сетей. В исследовании использованы методы машинного обучения, нейросетевого анализа и систематизации. Для достижения задач исследования авторами была адаптирована архитектура MLP, проведена работа по настройке гиперпараметров нейронной сети. Обучение нейронной сети было реализовано на языке программирования Python. Эффективность работы нейронной сети в решении поставленной задачи оценивалась метриками accuracy, precision, recall, f1. Результатами исследования стали: разработка способа формирования набора данных, включающего оценки угроз информационной безопасности органов государственной власти различных видов и источников происхождения, оценка эффективности работы нейронной сети по решению задач классификации органов государственной власти, интерпретация результатов нейросетевого анализа о степени устойчивости органов государственной власти угрозам информационной безопасности.



Ключевые слова: органы государственной власти, информационная безопасность, информационные угрозы, нейронная сеть, набор данных.

Для цитаты:

Пынько Л.Е., Толкачева Е.В. Анализ угроз информационной безопасности органов государственной власти с помощью нейронных сетей // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 3. С. 7–21. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140301>

***Пынько Люсьена Евгеньевна**, кандидат экономических наук, доцент кафедры экономики и цифровых технологий, Дальневосточный институт управления – филиал РАНХиГС (ФГБОУ ВО ДВИУ-филиал РАНХиГС), г. Хабаровск, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8938-130X>, e-mail: lusiena_03@mail.ru

****Толкачева Елена Вячеславовна**, кандидат социологических наук, доцент, доцент кафедры социального анализа и математических методов в социологии, Санкт-Петербургский государственный университет (ФГБОУ ВО СПбГУ), г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1304-809X>, e-mail: e.tolkacheva@spbu.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Цифровизация общества повысила значимость информационной безопасности данных, безопасность информационных сетей и систем, используемых органами государственной власти для осуществления своих полномочий. Современная цифровизация обозначила новые формы социокультурной и социо-экономической трансформации, представляющие собой не только переход к комфортному развитию и жизнедеятельности общества, но и к увеличению количества угроз, связанных с этим переходом [10].

Актуальность исследования обусловлена наблюдаемым в сфере государственного управления ростом разных видов информационных угроз. Следует отметить, что на текущий момент в России зарегистрировано свыше 200 различных угроз информационной безопасности¹. К ним можно отнести такие как распространение состояния «отказ в обслуживании» в облачной инфраструктуре, утечка информации с неподключенных к сети Интернет компьютеров, захват информации в процессе ее передачи и др. [5; 12].

В этих условиях, анализ совокупности угроз информационной безопасности, а также классификация и ранжирование органов государственной власти по степени устойчивости к информационным угрозам для принятия дальнейших управленческих решений, становится трудоемкой задачей, решение которой видится нами в применении нейронных сетей.

Анализ литературных источников показал недостаточность исследований, касающихся аналитико-управленческих аспектов оценки подверженности органов государственной власти информационным угрозам, в том числе, с помощью нейронных

¹ По данным официального интернет-портала «Банк данных угроз безопасности информации» ФАУ «ГНИИИ ПТЗИ ФСТЭК России». – URL: <https://bdu.fstec.ru/threat>



сетей. Кроме того, в органах государственной власти существует необходимость постоянного мониторинга событий информационной безопасности, позволяющего оперативно противодействовать внешним нарушителям, повышать уровень защищенности сетей за счет интеллектуализации методов борьбы с угрозами информационной безопасности [7; 8]. Соответственно существует необходимость в создании методики, позволяющей анализировать актуальность различных информационных угроз, классифицировать и ранжировать с помощью нейронных сетей органы государственной власти по степени их устойчивости угрозам информационной безопасности.

Данное исследование нацелено на разработку методики анализа угроз информационной безопасности с помощью нейронных сетей на основе концепта устойчивости органов государственной власти угрозам информационной безопасности.

Основные задачи исследования:

- охарактеризовать угрозы информационной безопасности органов государственной власти и правовые последствия от их реализации;
- сформулировать правила формирования набора данных, для классификации органов государственной власти по степени устойчивости угрозам информационной безопасности с помощью нейронных сетей;
- описать этапы обучения нейронной сети для решения задач классификации органов государственной власти по степени их устойчивости угрозам информационной безопасности;
- дать оценку качества нейронной сети, а также интерпретацию полученным в ходе обучения результатам.

Новизна исследования заключается в разработке правил формирования набора данных об угрозах информационной безопасности для нейросетевого анализа устойчивости органов государственной власти информационным угрозам. В предложенный набор данных можно включать разнообразный перечень угроз, оценка каждой из которых должна быть дана по дихотомической шкале.

Методологию исследования составляет системный подход, который позволяет придерживаться идеи формирования набора данных для нейросетевого анализа, включающего различные угрозы информационной безопасности данным и каналам связи органов государственной власти. Используемая в исследовании архитектура MLP адаптирована под задачу исследования. Модуль нейронной сети был реализован на языке программирования Python. Вычисления проводились с помощью библиотек TensorFlow, Keras, Pandas, Scikit-learn, Matplotlib. Разработка велась в специализированной среде Jupyter Notebook.

Разработанная методика позволяет решать задачи классификации органов государственной власти по интегральной оценке, характеризующей степень их устойчивости ко всей совокупности анализируемых угроз информационной безопасности.



2. СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ К ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ В ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОРГАНОВ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ВЛАСТИ

Угрозы информационной безопасности в деятельности органов государственной власти тесно коррелируют с уже существующими системами по противодействию преступности, которые используют правоохранительные органы. Зарубежный опыт применения информационных систем для анализа и прогнозирования преступлений в сфере информационной безопасности и определения мер их предупреждения активно используется на протяжении последних десятилетий. При этом, опыт использования информационных систем в деятельности правоохранительных органов для осуществления анализа киберпреступлений, прогнозирования (преступлений, личностей правонарушителей, жертв преступлений), определения мероприятий по предупреждению преступности, в том числе с привязкой к их географическому положению, оперативный анализ данных из сети Интернет, а также на основе данных из социальных сетей с дачей оценки последствий их проведения, на протяжении последних десятилетий активно используется в зарубежных странах [3].

Угрозы информационной безопасности органов государственной власти могут содержать противоправные и насильственные действия отдельных групп людей, направленные на дискредитацию социально-политической и правовой системы российского общества, т.е. преступления террористической и экстремистской направленности.

Также, сегодня необходимы исследования системы факторов, определяющих угрозы информационной безопасности, которые могут, в определенных условиях, преобразоваться в реальные угрозы жизни, здоровью, свободе передвижения государственных служащих и их семей. Эта тема нуждается не только в широком экспертном разностороннем обсуждении (с позиции знаний политологии, социологии, информационных угроз, инженерии информационных систем, правового регулирования и т.п.); но, и, в междисциплинарном исследовании с разработкой единых подходов защиты органов государственной власти в информационном поле и социально-экономическом пространстве. Необходимы разработки конкретных методик, позволяющих выявлять подверженность информационным угрозам и своевременно разрабатывать меры по противодействию им.

Проведение анализа угроз информационной безопасности органов государственной власти, в первую очередь, предполагает их идентификацию. При идентификации, выявляются не только угрозы информационной безопасности в деятельности органов государственной власти, но и источники их возникновения. При этом мы предлагаем использовать системный подход, включающий в себя научно-технический, социальный, экономический и политический аспекты возникновения угроз информационной безопасности в деятельности органов государственной власти. Еще раз подчеркнем о необходимости классификации и градации самих информационных угроз.

С точки зрения типов угроз информационной безопасности, в частности, МВД России ведет статистику числа киберпреступлений в соответствии с нормами УК РФ

(ст.ст.159.3, 272, 273, 274 и т. п.). Например, если в первый год действия норм гл. 28 УК РФ было зарегистрировано 2698 преступлений, то в 2017 г. таких преступлений стало почти вдвое меньше – 1883 (рис. 1).

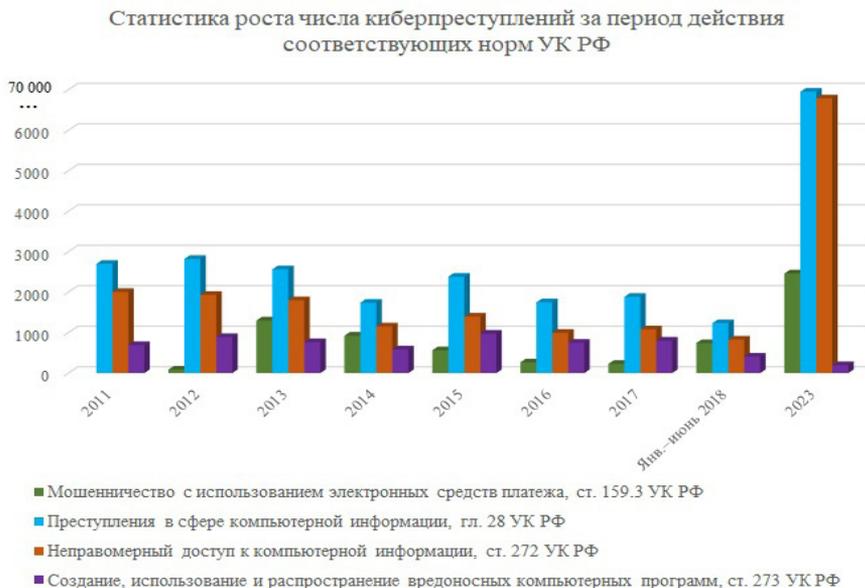


Рис. 1. Статистика роста числа киберпреступлений в России за 2011–2023 гг.²

Примечательно, что ст. 274 УК РФ о нарушении правил эксплуатации средств хранения, обработки или передачи компьютерной информации совсем не пользуется популярностью: всего 2 преступления зафиксировано в 2017 г. и ни одного – за первое полугодие 2018-го. В тоже время число преступлений, предусмотренных ст. 273 УК РФ, о создании, использовании и распространении вредоносных программ, напротив, возросло до 802 в 2017 г. по сравнению с 693 случаями в 2011 г. Всплеск преступлений, предусмотренных ст. 159.3 УК РФ «Мошенничество с использованием электронных средств платежа», наблюдался в 2013 г. – втором году действия нормы – 1297 случаев. Почти аналогичная цифра формируется и в текущем году – 741 преступление за первое полугодие. Увеличилось число хакерских атак на бюджетников и госслужащих. На их страницах появляются обращения к подписчикам с просьбой совершить определенные противоправные действия или распространить запрещенные ссылки. Министерство внутренних дел РФ за 2023 год зарегистрировало 677 тыс. IT – преступлений в стране, что стало рекордным уровнем за все время. В 2022 году МВД зафиксировало 522,1 тыс. таких преступлений – на треть меньше, чем в 2023 году.

² Составлено по данным официального интернет-портала МВД Российской Федерации. – URL: <https://мвд.рф/reports>, портала правовой статистики Генеральной прокуратуры России. – URL: <http://crimestat.ru/analytics>



Удельный вес дел по таким правонарушениям увеличился с 26,5% до 34,8%. Свыше половины зарегистрированных преступлений, совершенных с использованием информационных технологий, относится к категориям тяжких и особо тяжких. Число преступлений с применением Интернет выросло с 381 тыс. до 526,7 тыс.

Следом идут преступления, совершенные с использованием средств мобильной связи и пластиковых карт.

В контексте изучаемой нами проблемы следует отметить, что угрозы информационной безопасности в деятельности органов государственной власти связаны с ростом напряженности в обществе, что повышает риск нарушений в обращении с персональными данными в деятельности органов государственной власти, что также является отдельным видом угроз. Задача оценки и предотвращения подобных угроз заключается в уменьшении социальной напряженности российского общества, страдающего от негативных последствий этих угроз в будущем.

3. ПРИМЕНЕНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ АНАЛИЗА УГРОЗ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ ОРГАНОВ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ВЛАСТИ

Рассматриваемая в данной статье методика анализа угроз информационной безопасности органов государственной власти предполагает решение задачи классификации с помощью нейронных сетей. Задача классификации может быть поставлена в случаях, когда требуется определить, какие органы государственной власти могут быть отнесены к группам с удовлетворительной и низкой степенью устойчивости к угрозам информационной безопасности.

Предлагаемая нами методика анализа включает в себя несколько этапов.

Первый этап предполагает выбор органов государственной власти для последующего анализа. Мы не дифференцируем органы государственной власти на исполнительные, законодательные и судебные, делая акцент на универсальности методики. При ее внедрении в практическую деятельность органов государственной власти, необходимо осуществлять выбор объектов анализа, исходя из ключевых положений Доктрины информационной безопасности Российской Федерации, утвержденной Указом Президента РФ от 5 декабря 2016 г. N 646, в которой обозначены основные участники системы обеспечения информационной безопасности.

Второй этап предполагает составление реестра угроз информационной безопасности, подлежащих анализу. В контексте данного этапа необходимо отметить, что при составлении реестра следует учитывать методический документ «Методика оценки угроз безопасности информации», утвержденный Федеральной службой по техническому и экспертному контролю 5 февраля 2021 года (далее Методический документ). Для составления реестра угроз информационной безопасности с целью последующего анализа, также, необходимо опираться на общий перечень угроз безопасности

информации, а также существование шести типов нарушителей и их потенциал³. При этом следует учитывать отсутствие метода, позволяющего выявить прямые зависимости между конкретным видом угроз и типом нарушителя. В связи с этим, реестр угроз информационной безопасности может быть построен путем перебора всех возможных нарушителей относительно отдельно взятой угрозы [1].

На третьем этапе осуществляется оценка и градация каждой угрозы по двум признакам: «вероятность реализации угрозы» и «значимость ущерба, причиненного в случае реализации угрозы». Указанные признаки связаны с основными задачами, решаемыми в ходе оценки и обозначенными в Методическом документе. При оценке значимости ущерба, причиненного в случае реализации угрозы, в первую очередь рассматриваются такие последствия как нарушение конфиденциальности, целостности и доступности информации. В свою очередь, Федеральная служба по техническому и экспертному контролю предлагает рассматривать 52 негативных последствия⁴. Однако не все из них возникают в случаях, когда речь идет об органах государственной власти.

Четвертый этап предполагает экспертную оценку и присвоение каждому из анализируемых органов государственной власти класса от 0 до 2 с учетом значимости ущерба и вероятности реализации угроз информационной безопасности. Набор данных, формируемый для последующего нейросетевого анализа, будет содержать оценки угроз информационной безопасности по дихотомической шкале: актуальные (1) или неактуальные (0), составленные на основании правил, предложенных Ершовым В.Н. и Смирновой П.Л. [1]. Оценка угроз информационной безопасности производится экспертами или сотрудниками, ответственными за обеспечение информационной безопасности в органах государственной власти. При этом следует отметить важность оценки размера потенциального ущерба (градация угроз по величине потенциального ущерба или масштабу негативных последствий). В вопросах информационной безопасности ключевым значением является неприемлемость ущерба, возникшего вследствие нарушения информационной защищенности органов государственной власти.

При составлении набора данных существует риск получения несбалансированных данных, когда один или два класса являются преобладающими, а третий находится в меньшинстве. Одно из возможных решений предложено Azad S., Naqvi S.S., Sabrina F., Sohail S., Thakur S., которые отмечали, что в случае возникновения проблемы обучения нейронной сети на основе несбалансированных данных можно использовать бинарный классификатор для каждой категории угроз информационной безопасности, где объекты рассматриваемого класса угроз могут быть помечены как класс 1, а остальные объекты – как класс 0 [9].

На пятом этапе подготовленный набор данных используется для обучения нейронной сети. Данные, нормализуются с помощью формулы Z-преобразования для

³ По данным официального интернет-портала «Банк данных угроз безопасности информации» ФАУ «ГНИИИ ПТЗИ ФСТЭК России». – URL: <https://bdu.fstec.ru/threat>

⁴ По данным официального интернет-портала «Банк данных угроз безопасности информации» ФАУ «ГНИИИ ПТЗИ ФСТЭК России». – URL: <https://bdu.fstec.ru/threat>



каждого признака, далее они делятся на обучающий и тестовый набор, включающие в себя: обучающий набор признаков, тестовый набор признаков, обучающий набор целевых переменных, тестовый набор целевых переменных; размер тестового набора. После этого осуществляется обучение нейронной сети, которая представляет собой многослойный перцептрон (MLP). В данном случае MLP имеет два скрытых слоя. Входной слой имеет столько нейронов, сколько признаков в данных. Выходной слой имеет столько нейронов, сколько классов в задаче классификации. В предлагаемой нами модели это 3 класса. MLP обучается с использованием алгоритма обратного распространения. Он минимизирует функцию потерь, которая измеряет ошибку модели на обучающем наборе. В данном случае используется функция потерь кросс-энтропии для многоклассовой кластеризации. При классификации угроз информационной безопасности может возникнуть необходимость решения проблемы несбалансированности данных [9].

После создания нейронной сети необходимо провести оценку качества. Оценка качества нейронной сети выполняется с помощью формулы для вычисления точности [4]:

$$accuracy = \frac{(TP+TN)}{(TP+TN+FP+FN)},$$

где: TP – количество истинных положительных результатов; TN – количество истинных отрицательных результатов; FP – количество ложных положительных результатов; FN – количество ложных отрицательных результатов.

На шестом этапе предполагается применение обученной нейронной сети на новых данных, что позволяет осуществлять классификацию органов государственной власти по степени устойчивости к угрозам информационной безопасности. С помощью обученной нейронной сети предсказываются классы. На этом этапе используются тестовый набор данных с аналогичными параметрами. Нейронная сеть вычисляет вероятность того, что точка данных принадлежит каждому классу, а затем предсказывает класс с наивысшей вероятностью.

На седьмом этапе осуществляется разработка мер по обеспечению большей защищенности от угроз информационной безопасности органов государственной власти, отнесенных к классам с удовлетворительной и низкой устойчивостью. Для успешного обучения нейронной сети необходима разметка данных, при которой органы государственной власти классифицируются по степени устойчивости к угрозам информационной безопасности с учетом того, что вероятность реализации хотя бы одной из анализируемых угроз имеется:

- хорошая устойчивость угрозам информационной безопасности (2);
- удовлетворительная устойчивость угрозам информационной безопасности (1);
- низкая устойчивость угрозам информационной безопасности (0).

Предлагаемая нами методика позволяет анализировать различные модели угроз, включающие в себя как угрозы данным, так и информационным системам или сетям,

используемых органами государственной власти; учитывает критерий «достаточности защиты», при этом выстроена не вокруг оценки уровня защищенности органов государственной власти, а сконцентрирована на выявлении степени их устойчивости угрозам информационной безопасности.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ПОСТРОЕНИЯ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Модуль нейронной сети реализован нами на языке программирования Python с использованием смоделированного набора данных. Обучающий набор включал 1000 записей, тестовый – 200 записей. Эти данные послужили основой для разработки и обучения нейронной сети, которая представляет собой многослойный перцептрон (MLP) и используется для обеспечения высокой точности в задачах классификации. Разработка нейронной сети велась в специализированной среде jupyter notebook. Вычисления проводились с помощью библиотек TensorFlow, Keras, Pandas, Scikit-learn, Matplotlib.

Ключевые особенности архитектуры нейронной сети:

- Входной слой: принимает данные с размерностью, равной количеству признаков. В нашем случае признаков 20, что соответствует количеству анализируемых угроз информационной безопасности, каждая из которых была оценена по признакам вероятности реализации и вероятности значимости ущерба на основе правил, сформулированных Ершовым В.Н. и Смирновой П.Л. [1].
- Скрытые слои: два скрытых слоя с 68 нейронами в каждом, функцией активации ReLU и L2 регуляризацией для предотвращения переобучения. В данном случае был учтен опыт первоначального построения нейронной сети с двумя скрытыми слоями и без регуляризации, что привело к ее переобучению.
- Dropout слои: с вероятностью отключения нейронов 0,5 после каждого скрытого слоя для уменьшения переобучения.
- Выходной слой: предполагающий наличие трех классов.
- Оптимизатор: метод адаптивного момента (Adam) с функцией потерь перекрестной энтропии для многоклассовой классификации [6].

Для корректного обучения нейронной сети было задано 200 эпох, тем не менее, высокая точность достигалась раньше. Нами были получены следующие результаты, указывающие на качество машинного обучения: пройдено 128 эпох из 200, точность на обучающем наборе данных составляет 96,25%, а на валидационном – 96,5%. Это очень близко к итоговой точности на тестовом наборе данных, которая равна 97% (рис. 2).

Потери на тестовом наборе данных низкие и составляют 0,2276. Это свидетельствует о том, что модель хорошо обучилась и обладает хорошей обобщающей способностью, поскольку показатели на валидационном и тестовом наборах данных схожи с результатами на обучающем наборе. Соответственно, риск переобучения минимален (рис. 3).

Для оценки качества модели использовались следующие метрики: accuracy (точность), precision (точность) для каждого класса, recall (полнота), f1-score (среднее гармоническое precision и recall) [4].

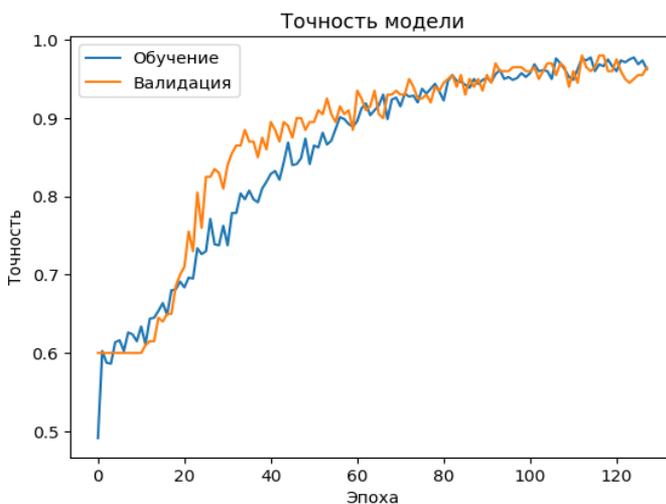


Рис. 2. Отчет о качестве работы нейронной сети, указывающие на ее точность

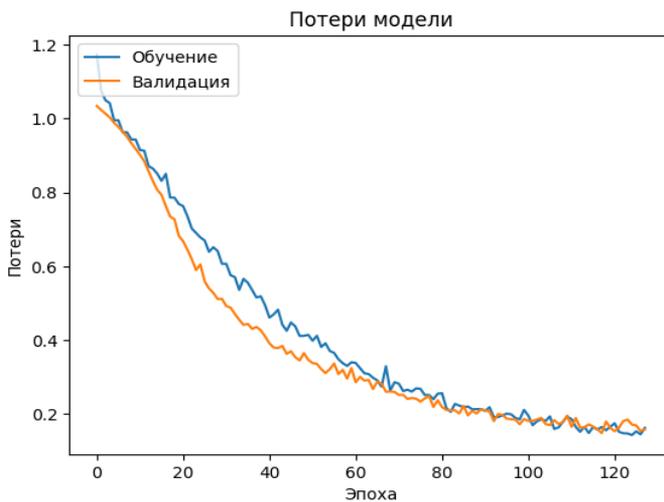


Рис. 3. Отчет о качестве работы нейронной сети, демонстрирующие потери

Применение обученной модели на новых данных показало, что модель демонстрирует высокую точность в 95% случаев на тестовом наборе данных. При этом класс 0 имеет показатели precision и recall равные 1, что означает, что нейронная сеть отлично классифицирует этот класс. Класс 1 также показывает хорошие результаты, так как показатель precision равен 0,94, а показатель recall равен 0,99, что указывает на высокую точность и полноту. Класс 2 имеет хороший показатель precision



равный 0,97, но при этом показатель recall равен 0,8, что указывает на то, что модель может упускать некоторые положительные случаи этого класса.

Полученные нами результаты демонстрируют, что в анализе угроз информационной безопасности возможно применение системного подхода, позволяющего включать в набор данных оценки информационных угроз разных видов, при условии оценки вероятности возникновения и вероятности нанесения значимого ущерба по дихотомической шкале. Обученная нейронная сеть может быть использована при анализе систем информационной безопасности органов государственной власти. Востребованность в этом отмечалась, например, Resch С. [11].

Проведенное исследование показало, что применение нейронных сетей позволяет давать точные результаты классификации органов государственной власти при работе с набором данных, содержащим оценки разных угроз информационной безопасности. Применение разработанной авторами методики анализа угроз информационной безопасности возможно в различных органах государственной власти.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в ходе исследования результаты позволяют сделать вывод, что предложенные нами правила формирования набора данных угроз информационной безопасности для классификации органов государственной власти по степени устойчивости угрозам информационной безопасности с помощью нейронных сетей, позволяют получать результаты высокой точности.

Ограничением предлагаемой методики является необходимость решения вопроса об используемых для обучения нейронной сети объемах данных, которое определяется рядом факторов. К ним относятся сложность задачи, неизвестная целевая функция, которая оптимально описывает связь между входными и выходными переменными, а также сложность выбранного алгоритма обучения. Также следует учитывать существование риска переобучения модели нейронной сети. В связи с чем, необходимо обращать внимание на такие ее параметры как: погрешность ошибок или число итераций. В решаемой задаче метод классификации был определен нами заранее. Сложность задачи потребовала применение функции потерь, что на начальном этапе разработки нейронной сети нами не предполагалось.

Использование системного подхода представлено в формировании набора данных, включающих различные виды информационных угроз, имеющих разные источники возникновения. В данном случае мы придерживались точки зрения, что выполнение анализа информационных угроз изолированно друг от друга нецелесообразно, так как нарушается целостность научного изучения «информационной безопасности».

Применение данной методики может представлять интерес при анализе систем информационной безопасности органов государственной власти и возможно в ходе аудита. Результатом применения методики на практике является получение интегрированной оценки степени устойчивости органов государственной власти актуальным угрозам информационной безопасности. По результатам нейросетевого анализа



могут приниматься управленческие решения, связанные с противодействием информационным угрозам, в том числе разрабатываться инструкции для государственных служащих, детальные планы мероприятий с четким описанием последовательности действий по предотвращению информационных угроз.

Литература

1. *Ершов В.Н., Смирнова П.Л.* Информационная защита персональных данных: доминирующий источник угрозы // Бизнес-информатика. 2012. № 2(20).
2. *Клименко Л.В.* Концептуальные основания исследования социетальной сферы поликультурных регионов // Материалы международной научно-практической конференции «Этносоциальные процессы на Юге России: способы регулирования» (г. Майкоп, 21–22 ноября 2017 г.). Майкоп: ООО «Электронные издательские технологии», 2017. С. 48–50.
3. *Лантес А.С.* Цифровой портал «Криминологическое планирование» – основной помощник в принятии управленческих решений в сфере предупреждения преступлений // Юридические исследования. 2023. № 8. С. 84–95. doi:10.25136/2409-7136.2023.8.43734
4. *Мамиев О.А., Финогенов Н.А., Сологуб Г.Б.* Использование методов машинного обучения для решения задач прогнозирования суммы и вероятности покупки на основе данных электронной коммерции // Моделирование и анализ данных. 2020. Т. 10. № 4. С. 31–40. doi:10.17759/mda.2020100403
5. *Михайлова Л.С.* О некоторых проблемах обеспечения информационной безопасности органов исполнительной власти // Вестник Воронежского института МВД России. 2022. № 2. С. 276–282.
6. Сравнение методов обучения нейронных сетей в задаче классификации / Перков А.С. [и др.] // Известия СПбГЭТУ ЛЭТИ. 2019. № 6. С. 53–61.
7. Алгоритм выявления угроз информационной безопасности в распределенных мультисервисных сетях органов государственного управления / Пучков А.Ю. [и др.] // Прикладная информатика. 2023. Т. 18. № 2(104). С. 85–102. doi:10.37791/2687-0649-2023-18-2-85-102
8. *Сиденко А.И.* О подготовке стратегии информационной безопасности исполнительных органов государственной власти Санкт-Петербурга // Сборник трудов Санкт-Петербургской международной конференции «Региональная информатика и информационная безопасность» (г. Санкт-Петербург, 25–27 октября 2023 г.). Санкт-Петербург: Санкт-Петербургское Общество информатики, вычислительной техники, систем связи и управления, 2023. С. 8–18.
9. *Azad S. et al.* IoT Cybersecurity: On the Use of Machine Learning Approaches for Unbalanced Datasets // 2021 IEEE Asia-Pacific Conference on Computer Science and Data Engineering (CSDE), Brisbane, Australia. 2021. P. 1–6. doi:10.1109/CSDE53843.2021.9718426
10. *Bohme G.* Am Ende des Beconschen Zeitalters, Wissenschaft und Gesellschaft. Science and Society. N. 3. 129 p.
11. *Resch C.* Designing an information security system // 5th Annual IEEE Information Assurance Workshop. 2004. P. 449–450. doi:10.1109/IAW.2004.1437857
12. *Stephen D.G.* IT Audit Drivers // The Basics of IT Audit. 2014. P. 129–148. doi:10.1016/B978-0-12-417159-6.00007-9



Analysis of Threats to Information Security of Public Authorities Using Neural Networks

Luyciyena E. Puinko*

Far Eastern Institute of Management – branch of RANEPA
Khabarovsk, Russian Federation
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8938-130X>
lusiena_03@mail.ru

Elena V. Tolkacheva**

St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russian Federation
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1304-809X>
e-mail: e.tolkacheva@spbu.ru

Ensuring the information security of public authorities requires the use of specialized tools that take into account various sources of information threats and their constant changes. This study aims to develop a methodology for analyzing these threats using neural networks. The research uses methods such as machine learning and neural network analysis to systematize the data. The authors adapted the Multi-Layer Perceptron (MLP) architecture and configured the hyperparameters of the neural network to achieve their objectives. The neural network was trained using the Python programming language, and its effectiveness was evaluated using metrics such as accuracy, precision, recall, and F1 score. The results of the study included the development of a method for creating a data set that encompasses assessments of threats to the information security of various public authorities and their sources. Additionally, the study evaluated the effectiveness of neural networks in solving classification problems for public authorities. Finally, the study interpreted the results of neural network analysis to determine the resistance of public authorities against information security threats.

Keywords: public authorities, information security, information threats, neural network, data set.

For citation:

Puinko L.E., Tolkacheva E.V. Analysis of Threats to Information Security of Public Authorities Using Neural Networks. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 3, pp. 7–21. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140301> (In Russ., abstr. in Engl.).

****Luyciyena E. Puinko***, PhD (Economics), Associate Professor, Department of Economics and Digital Technologies, Far Eastern Institute of Management the Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8938-130X>, e-mail: lusiena_03@mail.ru

*****Elena V. Tolkacheva***, PhD (Social), Associate Professor, Department of Social Analysis and Mathematical Methods in Sociology, St. Petersburg State University, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1304-809X>, e-mail: e-v-tolkacheva@ya.ru



References

1. Ershov V.N., Smirnova P.L. Informatsionnaya zashchita personal'nykh dannykh: dominiruyushchii istochnik ugrozy [Information protection of personal data: the dominant source of threat]. *Biznes-informatika = Business Informatics*. 2012. no. 2 (20).
2. Klimenko L.V. Kontseptual'nye osnovaniya issledovaniya sotsietal'noi sfery polikul'turnykh regionov [Conceptual foundations for the study of the societal sphere of multicultural regions]. *Materialy mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii "Ethnosotsial'nye protsessy na Yuge Rossii: sposoby regulirovaniya"* (g. Maikop, 21–22 noyabrya 2017 g.) [Proceedings of the International Scientific and Practical Conference "Ethnosocial processes in the South of Russia: methods of regulation"]. Maykop: Publ. Electronic Publishing Technologies LLC, 2017. pp. 48–50.
3. Laptev A.S. Tsifrovoy portal "Kriminologicheskoe planirovanie" – osnovnoi pomoshchnik v prinyatii upravlencheskikh reshenii v sfere preduprezhdeniya prestuplenii [Digital portal "Criminological planning" – the main assistant in making managerial decisions in the field of crime prevention]. *Yuridicheskie issledovaniya = Legal research*. 2023. no. 8. pp. 84–95. doi:10.25136/2409-7136.2023.8.43734
4. Mamiev O.A., Finogenov N.A., Sologub G.B. Ispol'zovanie metodov mashinnogo obucheniya dlya resheniya zadach prognozirovaniya summy i veroyatnosti pokupki na osnove dannykh elektronnoy kommersii [Using machine learning methods to solve problems of predicting the amount and probability of purchase based on e-commerce data]. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modeling and data analysis*. 2020. T. 10. no. 4. pp. 31–40. doi:10.17759/mda.2020100403
5. Mikhailova L.S. O nekotorykh problemakh obespecheniya informatsionnoi bezopasnosti organov ispolnitel'noi vlasti [About some problems of ensuring information security of executive authorities]. *Vestnik Voronezhskogo instituta MVD Rossii = Bulletin of the Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia*. 2022. no. 2. pp. 276–282.
6. Perkov A.S. [i dr.] Svravnenie metodov obucheniya neironnykh setei v zadache klassifikatsii [Comparison of neural network training methods in the classification problem] *Izvestiya SPbGETU LETI = Izvestiya SPbGETU LETI*. 2019. no. 6. pp. 53–61.
7. Puchkov A.Yu. [i dr.] Algoritm vyavleniya ugroz informatsionnoi bezopasnosti v raspredelennykh mul'tiservisnykh setyakh organov gosudarstvennogo upravleniya [Algorithm for identifying information security threats in distributed multiservice networks of government agencies] *Prikladnaya informatika = Applied Informatics*. 2023. T. 18. no. 2 (104). pp. 85–102. doi:10.37791/2687-0649-2023-18-2-85-102
8. Sidenko A.I. O podgotovke strategii informatsionnoi bezopasnosti ispolnitel'nykh organov gosudarstvennoi vlasti Sankt-Peterburga [On the preparation of the information security strategy of the executive bodies of state power of St. Petersburg]. *Sbornik trudov Sankt-Peterburgskoi mezhdunarodnoi konferentsii "Regional'naya informatika i informatsionnaya bezopasnost"* (g. Sankt-Peterburg, 25–27 oktyabrya 2023 g.) [Proceedings of the St. Petersburg International Conference "Regional Informatics and Information Security"]. St. Petersburg: Publ. St. Petersburg Society of Informatics, Computer Technology, Communication and Management Systems, 2023. pp. 8–18.
9. Azad S. et al. IoT Cybersecurity: On the Use of Machine Learning Approaches for Unbalanced Datasets 2021 *IEEE Asia-Pacific Conference on Computer Science and Data Engineering (CSDE)*, Brisbane, Australia. 2021. pp. 1–6. doi:10.1109/CSDE53843.2021.9718426
10. Bohme G. Am Ende des Beconschen Zeitalters, Wissenschaft und Gesellschaft. *Science and Society*. no. 3. 129 p.



11. Resch C. Designing an information security system *5th Annual IEEE Information Assurance Workshop*. 2004. pp. 449–450. doi:10.1109/IAW.2004.1437857
12. Stephen D.G. IT Audit Drivers *The Basics of IT Audit*. 2014. pp. 129–148. doi:10.1016/B978-0-12-417159-6.00007-9

Получена 19.07.2024

Принята в печать 18.08.2024

Received 19.07.2024

Accepted 18.08.2024

Анализ взаимосвязей предикторов академической успеваемости школьников методом сетевого моделирования

Потанина А.М.*

Федеральный научный центр психологических
и междисциплинарных исследований (ФГБНУ ФНЦ ПМИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4358-6948>
e-mail: a.m.potan@gmail.com

Артеменков С.Л.**

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1619-2209>
e-mail: slart@inbox.ru

Проблема изучения факторов, влияющих на академические достижения обучающихся, не теряет своей актуальности в современной психологической и педагогической науке, в особенности в связи с развитием представлений об образовании как способе развития человеческого капитала, повышения благополучия и качества жизни людей в современном обществе. Академическая успеваемость школьников во многом определяется некогнитивными факторами, включающими личностные характеристики, мотивационные показатели и развитие саморегуляции. Цель представляемой работы – анализ взаимосвязей между некогнитивными предикторами академической успеваемости учащихся средней и старшей школы методом сетевого моделирования. Первичные данные получены с помощью следующих методик: опросник «Стиль саморегуляции учебной деятельности (ССУД-М)», «Шкалы академической мотивации школьников (ШАМ-Ш)», «Отношение к учению в средних и старших классах школы», «Большая пятерка – детский вариант». В качестве показателя академической успеваемости использовался средний балл по русскому языку и математике. Выборку исследования составили 307 обучающихся общеобразовательных школ (37,1 % юноши, возраст: 10–18 лет). В результате исследования проведен расчет описательных статистик по 28 исследуемым показателям, построены и проанализированы сети частных корреляций, описывающие взаимосвязи регуляторных и личностных переменных, а также академической успеваемости обучающихся в 5–6, 7–9 и 10–11 классах школы. Выделены и описаны значимые взаимосвязи между переменными вне зависимости от периода обучения,



а также проанализированы сходства и различия в структуре сетей частных корреляций в 5–6, 7–8 и 9–11 классах. Показано, что характер взаимосвязей между некогнитивными предикторами и академической успеваемостью изменяется в зависимости от периода обучения. Обнаружено, что успеваемость обучающихся в 5–6 классе значимо прямо связана с показателем открытости новому опыту, тогда как в 7–9 также обнаруживается прямая связь с общим уровнем отношения к учению, а в 10–11 классах – с познавательной мотивацией, нейротизмом и осознанной саморегуляцией. Полученные результаты подтверждают известные взаимосвязи, а также позволяют описать новые, ранее не обнаруживаемые в исследованиях, например, негативная связь академической успеваемости с познавательной мотивацией школьников. В заключении представлены перспективы дальнейших исследований модераторных-медиаторных взаимодействий некогнитивных переменных в их влиянии на академическую успешность обучающихся.

Ключевые слова: некогнитивные предикторы, академическая успеваемость, школьники, сетевое моделирование.

Для цитаты:

Потанина А.М., Артеменков С.Л. Анализ взаимосвязей предикторов академической успеваемости школьников методом сетевого моделирования // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 3. С. 22–40. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140302>

***Потанина Анна Михайловна**, научный сотрудник, лаборатория психологии саморегуляции, ФГБНУ «Федеральный научный центр психологических и междисциплинарных исследований» (ФНЦ ПМИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4358-6948>, e-mail: a.m.potan@gmail.com

****Артеменков Сергей Львович**, кандидат технических наук, профессор, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1619-2209>, e-mail: slart@inbox.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема изучения факторов, влияющих на академические достижения обучающихся, не теряет своей актуальности в современной психологической и педагогической науке, в особенности в связи с развитием представлений об образовании как факторе развития современной культуры и социально-экономической системы в целом [10], способе развития человеческого капитала, повышения благополучия и качества жизни людей [1, 20].

Под академической успеваемостью в современных работах, посвященных ее изучению, обычно понимается некоторый обобщенный балл обучающегося, получаемый путем усреднения его школьных или экзаменационных оценок [29]. В последние 10–15 лет наблюдается большое число работ, посвященное исследованиям некогнитивных предикторов академических достижений: личностных, мотивационных, эмоциональных, регуляторных особенностей обучающихся, вносящих значимый вклад в их успеваемость [19; 24; 25; 30]. Такой интерес именно к данному виду предикторов



обусловлен, с одной стороны, данными об их высокой предсказательной ценности, при контроле интеллекта, и, с другой, более высокими возможностями для психологических и педагогических интервенций [13; 18; 24].

В качестве наиболее значимых некогнитивных предикторов академической успеваемости обучающихся исследователями называются личностные черты, академическая мотивация и саморегуляция [11; 13; 25]. Личностные черты в большинстве исследований принято рассматривать в контексте пятифакторной модели личности «Большая пятерка», включающей пять широких личностных черт (факторов): экстраверсию, нейротизм, дружелюбность, добросовестность и открытость новому опыту. Личностные черты Добросовестности и Открытости опыту, согласно большинству исследований и метаанализов, являются самыми значимыми предикторами академических достижений, тогда как Дружелюбность, напротив, демонстрирует наиболее слабый или даже незначимый вклад [22; 31]. Экстраверсия, как показывают современные исследования, достаточно неоднозначно связана с академическими достижениями: если на младшей ступени обучения (начальная школа) она влияет на них положительно, то на старших ступенях (старшая школа, колледж/университет) она влияет на успеваемость негативно [27; 32]. Нейротизм, хотя и является традиционно негативным предиктором успеваемости, при выраженности на некотором оптимальном уровне, может выступать позитивным предиктором успеваемости [26].

Что касается академической мотивации, то исследования демонстрируют высокий вклад внутренней мотивации (познавательной мотивации, мотивации достижения) на протяжении всего процесса обучения в школе [9; 21]. При этом, если в младшей школе ее прямое влияние практически не обнаруживается, ввиду большого вклада других переменных [21], то в средней и старшей школе ее роль повышается: в особенности растут вклады мотивации саморазвития, самоэффективности, а также возможных негативных последствий выполнения учебных заданий [9; 23].

Саморегуляция является одним из ключевых факторов успешности учебной деятельности на протяжении всего обучения: ее сформированность на ранних этапах обучения является важным предиктором академической успешности на более поздних этапах, в частности, в подростковом возрасте [30]. Осознанная саморегуляция, как показывают многочисленные исследования, является значимым предиктором успеваемости на протяжении всего процесса обучения, причем ее вклад также имеет возрастную специфику: ее сильное влияние в средней школе снижается к 9–10 классу и вновь возрастает в 11-ом [6; 14; 27; 28].

Таким образом, наблюдается большое число работ, анализирующих вклад самых разнообразных некогнитивных характеристик в успеваемость школьников [9; 27; 31]. Тем не менее, отмечается, что в социальных и смежных с ними науках (в том числе и в психологии) существует проблема воспроизводимости данных [8]. Таким образом, даже известные взаимосвязи оказываются необходимым постоянно проверять и подтверждать на различных выборках. В связи с этим, актуальной становится задача уточнения характера связей некогнитивных предикторов академической успешности обучающихся с использованием современных методов математического анализа



данных. Одним из методов, который позволяет уточнять характер связей между измеряемыми показателями, является сетевое моделирование [3]. Применение в сетевом моделировании современного метода регуляризации сетей частных корреляций является новым мощным средством установления реальных связей между случайными переменными [4; 5]. Данный метод предполагает расчет коэффициентов частных корреляций между исследуемыми переменными, позволяющих оценить степень связанности переменных без учета влияния других переменных. Дополнительная регуляризация сети частных корреляций позволяет построить упрощенную сеть, максимально соответствующую значимым взаимным связям измеренных данных. Такие сети частных корреляций являются мощными инструментами исследования мультиколлинеарности, выделения латентных переменных как кластеров взаимосвязанных психологических характеристик, а также прогнозирования сложных модерационных и медиационных взаимодействий между переменными [4].

Целью данной работы выступил сетевой анализ взаимосвязей некогнитивных предикторов академической успеваемости обучающихся средней и старшей школы. Исследовательские вопросы: 1) Существуют ли значимые взаимосвязи между некогнитивными переменными и академической успеваемостью вне зависимости от периода обучения; 2) Каковы различия в структуре и характере взаимосвязей между некогнитивными предикторами и академической успеваемостью в зависимости от периода обучения.

2. МЕТОДЫ И ИСПЫТУЕМЫЕ

Для проверки исследовательских вопросов использовался следующий диагностический инструментарий.

Методики:

1. «Стиль саморегуляции учебной деятельности (ССУД-М)» [15]. Методика направлена на диагностику стилевых особенностей саморегуляции и включает следующие шкалы: планирование, моделирование, программирование, оценивание результатов, гибкость, инициативность, надежность, ответственность, интегральный показатель общего уровня осознанной саморегуляции».
2. «Отношение к учению в средних и старших классах школы» [2]. Опросник позволяет оценить познавательную активность учеников, их мотивационную направленность и основные негативные эмоции, возникающие в процессе обучения. Шкалы: познавательная активность, мотивация достижения, тревожность, гнев, мотивация избегания неудач, общий уровень отношения к учению.
3. «Шкала академической мотивации школьников (ШАМ-Ш)» [9]. Опросник позволяет диагностировать 8 типов мотивации при помощи 8 соответствующих шкал: познавательная мотивация, мотивация достижения, мотивация саморазвития, мотивация самоуважения, интроецированная мотивация, мотивация уважения родителей, экстернатальная мотивация, амотивация.



4. «Большая пятерка – детский вариант» [12]. Опросник основан на пятифакторной модели черт личности и включает 5 шкал: экстраверсия, нейротизм, дружелюбность, добросовестность, открытость новому опыту.

Показатель академической успеваемости анализировался как средний балл оценок по математике и русскому языку. Выбор средних оценок по математике и русскому языку связан с тем, что данные предметы являются обязательными для всех обучающихся.

Выборка исследования: 307 обучающихся 5–11 классов общеобразовательных школ (37,1 % юноши, возраст: 10–18 лет).

3. ПРОЦЕДУРЫ

Для удобства представления данных, все исследуемые переменные были закодированы. В таблице 1 ниже представлены символические обозначения исследуемых 28 показателей по четырем опросникам. Отдельно показан средний балл G.

Таблица 1

Символические обозначения исследуемых показателей

Методика	Название показателя	Символьное обозначение
	Средний балл	G
Стиль саморегуляции учебной деятельности	Планирование	SG
	Моделирование	SM
	Программирование	SP
	Оценивание результатов	SE
	Гибкость	SF
	Инициативность	SI
	Надежность	ST
	Ответственность	SO
	Общий уровень саморегуляции	SR
Отношение к учению в средних и старших классах школы	Познавательная активность	AP
	Мотивация достижения	AM
	Тревожность	AT
	Гнев	AI
	Мотивация избегания неудач	AA
	Общий уровень отношения к учению	AG



Шкалы академической мотивации	Познавательная мотивация	MC
	Мотивация достижения	MF
	Мотивация саморазвития	MD
	Мотивация самоуважения	MR
	Интроецированная мотивация	MI
	Мотивация уважения родителей	MP
	Экстернальная мотивация	ME
	Амотивация	MA
Большая пятерка – детский вариант	Экстраверсия	BE
	Дружелюбность	BA
	Добросовестность	BC
	Нейротизм	BN
	Открытость новому опыту	BO

Статистические процедуры осуществлялись при помощи статистического пакета IBM SPSS Statistics 22, а также языка программирования R. Статистический пакет был использован для расчета описательных статистик по исследуемым психологическим показателям: среднего значения, стандартного отклонения, минимума, максимума. Язык программирования R применялся для сетевого моделирование с помощью построения и интерпретации сетей частных корреляций с помощью метода регуляризации glasso [3, 4].

4. РЕЗУЛЬТАТЫ

Результаты расчета описательных статистик представлены в таблице 2 ниже.

Таблица 2

Описательные статистики по 28 исследуемым психологическим переменным (N=307)

Показатели	M	SD	Min	Max
Планирование	4,00	1,62	0	6
Моделирование	3,78	1,68	0	6
Программирование	3,80	1,68	0	6
Оценивание результатов	3,36	1,78	0	6
Гибкость	3,37	1,57	0	6



Инициативность	3,35	1,53	0	6
Надежность	3,36	1,61	0	6
Ответственность	3,39	1,74	0	6
Общий уровень саморегуляции	28,40	8,34	12	47
Познавательная активность	17,15	3,35	7	24
Мотивация достижения	18,48	3,64	7	24
Тревожность	11,23	3,82	6	24
Гнев	9,84	4,22	6	24
Мотивация избегания неудач	13,29	3,37	6	22
Общий уровень отношения к учению	1,27	12,98	-29	29
Познавательная мотивация	3,62	0,92	1	5
Мотивация достижения	3,26	1,00	1	5
Мотивация саморазвития	3,55	0,91	1	5
Мотивация самоуважения	3,54	0,97	1	5
Интроецированная мотивация	3,36	0,86	1	5
Мотивация уважения родителями	3,26	1,10	1	5
Экстернальная мотивация	3,12	0,98	1	5
Амотивация	1,87	0,89	1	4,25
Экстраверсия	45,37	7,50	21	60
Дружелюбность	47,37	8,46	24	65
Добросовестность	43,92	7,96	23	60
Нейротизм	30,11	9,48	12	56
Открытость новому опыту	46,43	7,86	25	65

Полученные результаты свидетельствуют о смещении средних значений мотивационных показателей ($M = 3,11-3,26$), показателей осознанной саморегуляции ($M = 3,39-4,00$), и показателей личностных диспозиций экстраверсии, дружелюбности и добросовестности в сторону высоких значений, в сравнении с показателями, обнаруживаемыми на выборках школьников коллективами, разработавшими используемые методики [11; 13; 16]. Анализ распределения данных при помощи критерия Колмогорова-Смирнова также подтвердил смещенность представленных выше показателей: только для переменной Открытость новому опыту критерий оказался незначимым ($\alpha = 0,044$, $p = 0,200$). Полученные результаты могут объясняться как особенностями выборки, так и характером исследуемых конструктов: например,

показатель нейротизма на выборах школьников часто оказывается смещенным в сторону низких значений, а экстраверсия и дружелюбность – напротив, в сторону высоких.

Далее, для выявления взаимосвязей между изучаемыми переменными, был применен метод сетевого моделирования. В данном исследовании сети частных корреляций оценивались с применением метода регуляризации *glasso*, позволяющим удалять вероятные ложные связи между переменными [4]. На рис. 1. представлена сеть частных корреляций для всех изучаемых переменных, за исключением тех, для распределения которых было обнаружено наибольшее отклонение от нормальности (МА – амотивация, АТ – тревожность, АГ – гнев). Отметим также, что для упрощения анализа все незначимые связи с частными корреляциями менее 0,1 были удалены ($\text{threshold} = \text{TRUE}$). Расшифровка символических обозначений узлов сети представлена выше в таблице 1.

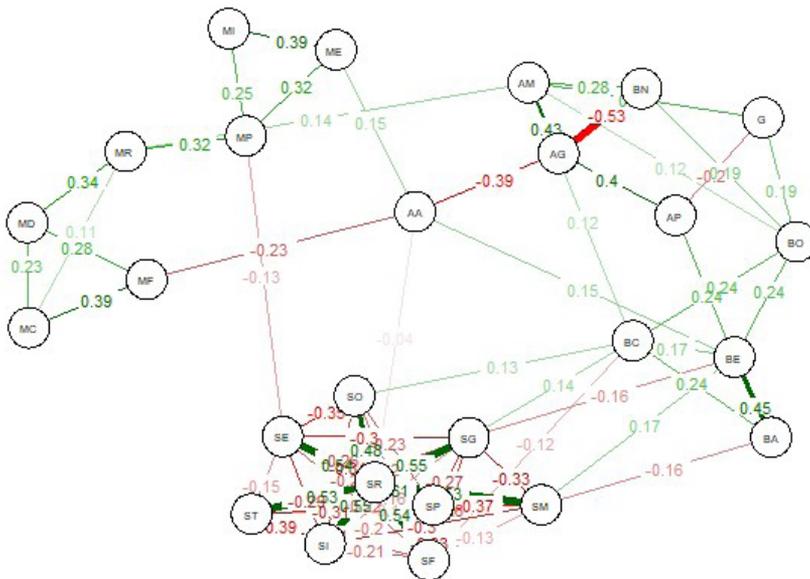


Рис. 1. Сеть *glasso* частных корреляций между 26 показателями ($\gamma = 0,5$, $\text{threshold} = \text{TRUE}$)

Согласно полученным результатам, мы можем констатировать достаточно высокую согласованность используемых методик, поскольку показатели, соответствующие шкалам методик, объединились в кластеры, соответствующие исследуемым латентным конструктам: осознанной саморегуляции, мотивационным факторам и личностным чертам. В частности, мы можем наблюдать, что все показатели шкал осознанной саморегуляции группируются вокруг показателя ее общего уровня (SR) и положительно коррелируют с ним. Похожую картину, хотя и с более низкой степенью связанности, мы можем наблюдать для показателей академической мотивации



(значения коэффициентов корреляции $r = 0,2-0,5$), а также для показателей отношения к учению ($r = 0,4-0,6$). Интересно, что показатель нейротизма (BN) на нашей выборке коррелирует с другими личностными чертами не напрямую, а только через показатель открытости новому опыту (BO). При этом обнаруживается высокая негативная корреляция нейротизма с показателем общего уровня отношения к учению (AG) ($r = -0,63$).

Что касается показателя академической успеваемости (G), то, согласно нашим данным, он положительно коррелирует с мотивацией достижения и открытостью новому опыту. В меньшей степени, успеваемость положительно коррелировала с мотивационными факторами познавательной мотивации (MC) и мотивации достижения (MF) и, что достаточно парадоксально, негативно – с показателем познавательной активности (AP). Отметим, что мы не обнаружили прямых связей показателя успеваемости с показателями осознанной саморегуляции и академической мотивации.

Обнаружены позитивные корреляции саморегуляции и личностных диспозиций: показателей ответственности (SO) и гибкости (SG) с показателем добросовестности (BC), а также показателя моделирования (SM) с показателем экстраверсии (BE). Обозначим также интересную негативную взаимосвязь показателя оценивания результатов (SE) с показателем мотивации уважения родителей (MP).

Для проверки предположения о характере взаимосвязей между некогнитивными предикторами академической успеваемости в разные периоды обучения, были построены сети частных корреляций в трех подгруппах: 5–6 класс, 7–9 класс, и 10–11 класс, выделенных на основе данных ранее проведенных исследований [17; 27]. Основываясь на проведенном выше анализе сети для всех исследуемых переменных, для анализа в подгруппах, там, где это возможно, были использованы общие показатели (общий уровень саморегуляции и общий уровень отношения к учению), а также ряд показателей, согласно нашему анализу, наиболее высоко коррелировавших с академической успеваемостью (открытость новому опыту, нейротизм). В сетевое рассмотрение были включены показатели познавательной мотивации и мотивации достижения, также связанные с успеваемостью, и показатели добросовестности и экстраверсии. На рис. 2–4 представлены сети частных корреляций для выборок 5–6, 7–9 и 10–11 классов.

Полученные результаты, в целом, соотносятся с картиной, выявленной на общей выборке. Успеваемость (G) обучающихся в 5–6 классе демонстрирует значимые прямые связи только с показателем открытости новому опыту (BO). Обнаруживаются значимые позитивные корреляции между добросовестностью (BC), открытостью новому опыту (BO) и экстраверсией (BE). Что касается показателя осознанной саморегуляции (SR), то он демонстрирует прямые связи с общим уровнем отношения к учению (AG) и мотивацией достижения (MF), которые, в свою очередь положительно коррелируют с открытостью новому опыту (BO). Отметим также выявленные отрицательные корреляции: показатель нейротизма (BN) оказался сильно негативно связан с общим уровнем отношения к учению (AG), а показатель добросовестности (BC) – слабо с показателем мотивации достижения (MF).

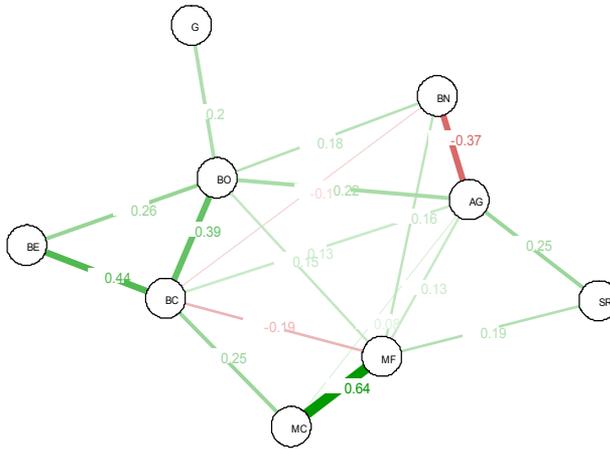


Рис. 2. Сеть glasso частных корреляций между 9 показателями для выборки 5–6 классов ($\gamma = 0,5$, threshold=TRUE)

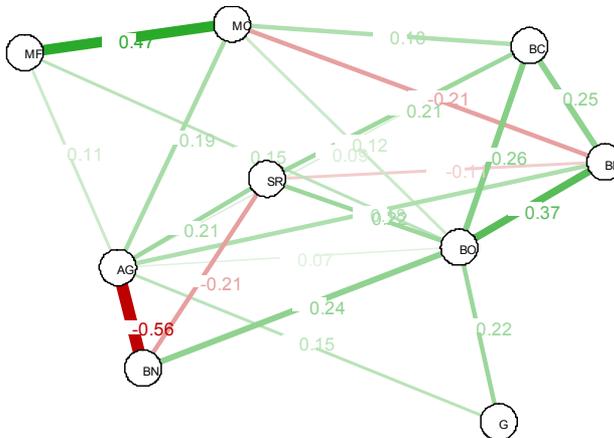


Рис. 3. Сеть glasso частных корреляций между 9 показателями для выборки 7–8 классов ($\gamma = 0,5$, threshold=TRUE)

Согласно полученным результатам, в 7–9 классах характер связей изменяется. В частности, показатель осознанной саморегуляции (SR) становится одним из центральных элементов сети, демонстрируя значимые положительные корреляции с показателями открытости новому опыту (BO), добросовестностью (BC), общим уровнем отношения к учению (AG), а также значимую негативную корреляцию с показателем нейротизма (BN). Отметим также, что академическая успеваемость (G) в 7–9 классах оказывается напрямую связана не только с открытостью новому опыту (BO), но и с общим уровнем отношения к учению (AG). Из принципиально новых в сравнении с 5–6 классами, отметим значимую негативную корреляцию экстраверсии (BE)

с познавательной мотивацией (MC) ($r = -0,36$). Также отметим усилившуюся негативную связь между нейротизмом (BN) и общим уровнем отношения к учению (AG) ($r = -0,66$ в сравнении с $r = -0,37$ в 5–6 классе).

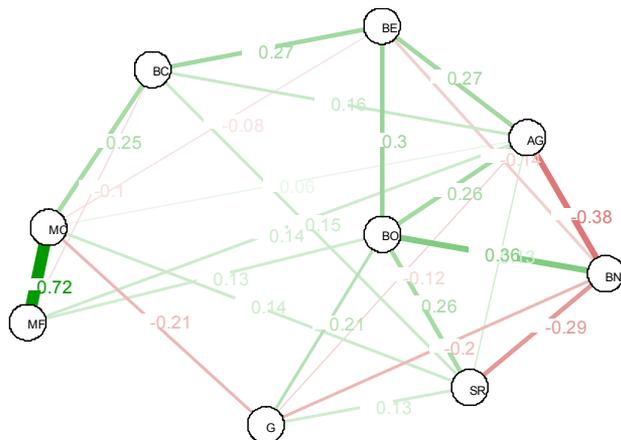


Рис. 4. Сеть glasso частных корреляций между 9 показателями для выборки 10–11 классов ($\gamma = 0,5$, $\text{threshold}=\text{TRUE}$)

В 10–11 классе, согласно полученным данным (рис. 4), характер связей вновь изменяется (как в сравнении как с сетью, выявленной на общей выборке, так и с корреляционными структурами в 5–6 и 7–9 классах). Академическая успеваемость (G) коррелирует с наибольшим количеством некогнитивных переменных в этот период обучения. Отметим, что впервые обнаруживаются факторы, напрямую негативно связанные с успеваемостью: это нейротизм (BN) и познавательная мотивация (MC). Интересно, что в сравнении с двумя другими периодами обучения исчезает прямая связь с отношением к учению (AG), но появляется корреляция с показателем осознанной саморегуляции (SR) ($r = 0,13$). Кроме того, в отличие от 5–6 и 7–9 классов, исчезает значимая позитивная корреляция между открытостью новому опыту (BO) и добросовестностью (BC).

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В результате исследования, при помощи метода сетевого моделирования были проанализированы взаимосвязи некогнитивных предикторов академической успеваемости в разные периоды обучения: в 5–6 классе, в 7–9 классе и 10–11 классе. Полученные данные, как уже было отмечено выше, позволяют говорить о высокой согласованности используемых методик, подтверждая, таким образом, данные об их валидности и надежности для изучения регуляторных и личностных предикторов академической успеваемости на выборках учеников средней и старшей школы [9; 12; 15].



Проведенный анализ позволил выявить ряд значимых взаимосвязей между некогнитивными предикторами академической успеваемости. Согласно нашим данным, академическая успеваемость позитивно связана с личностной диспозицией открытости опыту и нейротизмом. В меньшей степени, успеваемость оказалась положительно коррелировала с мотивационными факторами познавательной мотивации и мотивации достижения и, что достаточно парадоксально, негативно – с показателем познавательной активности. Отметим, что мы не обнаружили прямых связей показателя успеваемости с показателями осознанной саморегуляции и академической мотивации. Этот результат может объясняться, с одной стороны, характеристиками выборки: в ней присутствуют обучающиеся разных возрастов и периодов обучения, для которых, согласно данным литературы, связи успеваемости с ее некогнитивными предикторами могут различаться, и, с другой стороны, тем фактом, что личностные диспозиции в сложных моделях, учитывающих большое число разнообразных переменных, зачастую выступают модераторами их связи с академической успешностью [напр., 16; 27].

Результаты исследования позволили выявить изменения в характере взаимосвязей некогнитивных предикторов академической успеваемости в зависимости от периода обучения. Так, успеваемость обучающихся в 5–6 классе значимо коррелировала напрямую только с показателем открытости новому опыту, тогда как в 7–9 к ней добавилась прямая связь с общим уровнем отношения к учению, а в 10–11 классах – с познавательной мотивацией, нейротизмом и осознанной саморегуляцией. Позитивный вклад открытости новому опыту в успеваемость во всех возрастных группах соотносится с результатами проведенных ранее эмпирических исследований [22]. Появление положительной связи отношения к учению с успеваемостью в 7–9 классе может объясняться тем, что этот период является одним из критических в процессе возрастных изменений познавательной активности – компонента отношения к учению, поддерживающему успеваемость обучающихся [7]. Положительная корреляция осознанной саморегуляции и академической успеваемости в 10–11 классе также соотносится с данными исследований [14; 27]. Что касается специфических для 10–11 классов негативных связей академической успеваемости, если ее негативная связь с нейротизмом не нуждается в дополнительных пояснениях [31], то обнаруженная негативная связь с познавательной мотивацией является неожиданной, учитывая данные о позитивном вкладе внутренних видов мотивации в успеваемость в старших классах [9]. Можно предположить, что познавательная мотивация вступает в конфликт с ориентацией на успешную сдачу обучающимися экзаменов, что и приводит к снижению общей успеваемости, однако это предположение нуждается в дальнейшей эмпирической проверке.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая статья посвящена анализу взаимосвязей некогнитивных предикторов академической успеваемости школьников при помощи метода сетевого анализа. В результате проведенного исследования, на выборке учеников средней и старшей



школы были построены и проанализированы сети частных корреляций, описывающие взаимосвязи регуляторных и личностных переменных, а также академической успеваемости обучающихся в 5–6, 7–9 и 10–11 классах школы. Выделены и описаны значимые взаимосвязи между переменными вне зависимости от периода обучения, а также проанализированы сходства и различия в структуре сетей частных корреляций в 5–6, 7–8 и 9–11 классах. Проведенный анализ позволил выявить ряд значимых взаимосвязей между некогнитивными предикторами академической успеваемости, соотносящихся с ранее полученными данными. Показано, что характер взаимосвязей между некогнитивными предикторами и академической успеваемостью изменяется в зависимости от периода обучения. Обнаружено, что успеваемость обучающихся в 5–6 классе значимо прямо связана с показателем открытости новому опыту, тогда как в 7–9 также обнаруживается прямая связь с общим уровнем отношения к учению, а в 10–11 классах – с познавательной мотивацией, нейротизмом и в меньшей мере с осознанной саморегуляцией.

Таким образом, полученные результаты, с одной стороны, подтвердили известные взаимосвязи и их возрастные особенности, с другой – позволили выявить новые, ранее не обнаруживаемые в исследованиях. Дальнейшее исследование может быть посвящено проверке выявленных взаимосвязей, а также предположений о возможных модераторных-медиаторных взаимодействиях некогнитивных переменных в их влиянии на академическую успешность обучающихся.

Литература

1. *Авалуева Н.Б., Алексеева А.С., Алиева Э.Ф.* Система оценивания субъективного благополучия российских школьников: теоретико-методологическое обоснование // Сибирский психологический журнал. 2022. № . 83. С. 100–121.
2. *Андреева А.Д., Прихожан А.М.* Методика диагностики мотивации учения и эмоционального отношения к учению в средних и старших классах школы // Психологическая диагностика. 2006. № 1. С. 33–38.
3. *Артеменков С.Л.* Сетевое моделирование психологических конструктов // Моделирование и анализ данных. 2017. № 1. С. 9–28.
4. *Артеменков С.Л.* Упорядоченные сети частных корреляций в психологических исследованиях // Моделирование и анализ данных. 2021. № 2. С. 31–50. DOI: 10.17759/mda.2021110202
5. *Артеменков С.Л.* Проблемы построения и анализа упорядоченных сетей частных корреляций в психологических исследованиях // Моделирование и анализ данных. 2021. № 3. С. 36–56. DOI: 10.17759/mda.2021110303
6. *Бондаренко И.Н., Потанина А.М., Моросанова В.И.* Осознанная саморегуляция как ресурс успешности по русскому языку у школьников с различным уровнем интеллекта // Экспериментальная психология. 2020. Т. 13. № 1. С. 63–78. DOI: 10.17759/exppsy.2020130105
7. *Бондаренко И.Н., Цыганов И.Ю., Моросанова В.И.* Роль осознанной саморегуляции в динамике познавательной активности и когнитивной вовлеченности учащихся в период перехода из основной в старшую школу: лонгитюдное исследование // Вестник Московского Университета. Серия 14. Психология. 2022. Т. 45, № 4. С. 200–223. DOI: 10.11621/vsp.2022.04.09
8. *Вачков И.В., Вачкова С.Н.* Воспроизводимость психологических экспериментов как проблема постнеклассической науки // Культурно-историческая психология. 2016. Т. 12. № 1. С. 97–101.



9. Гордеева Т.О., Сычев О.А., Гижицкий В.В., Гавриченко Т.К. Шкалы внутренней и внешней академической мотивации школьников // Психологическая наука и образование. 2017. Т. 22. № 2. С. 65–74.
10. Дормидонтов Р.А. Проблема успеваемости и успешности обучающихся в свете социальных изменений развития общества и образовательных систем // Мир науки. Педагогика и психология. 2022. Т. 10. № 5. URL: <https://mir-nauki.com/PDF/27PDMN522.pdf>
11. Ишмуратова Ю.А., Потанина, А.М., Цыганов И.Ю., Моросанова В.И. Некогнитивные предикторы академических достижений в различные периоды обучения // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Психологические науки. 2019. № 3. С. 25–40.
12. Малых С.Б., Тихомирова Т.Н., Васин Г.М. Адаптация русскоязычной версии опросника «Большая Пятерка – детский вариант» // Теоретическая и экспериментальная психология. 2015. Т. 8. № 4. С. 6–12.
13. Моросанова В.И. Развитие ресурсного подхода к исследованию осознанной саморегуляции достижения целей и саморазвития человека / Психология саморегуляции: эволюция подходов и вызовы времени / Под ред. Ю.П. Зинченко, В.И. Моросановой. М.; СПб.: Нестор-История, 2020. С. 11–36.
14. Моросанова В.И. Осознанная саморегуляция как метаресурс достижения целей и разрешения проблем жизнедеятельности // Вестник Московского университета. Серия 14. Психология. 2021. № 1. С. 4–37. DOI:10.11621/vsp.2021.01.01
15. Моросанова В.И., Бондаренко И.Н. Диагностика осознанной саморегуляции учебной деятельности: новая версия опросника ССУД-М // Теоретическая и экспериментальная психология. 2017. Т. 10. № 2. С. 27–37.
16. Моросанова В.И., Бондаренко И.Н., Фомина Т.Г. Осознанная саморегуляция и личностно-мотивационные особенности младших подростков с различной динамикой психологического благополучия // Психологическая наука и образование. 2019. Т. 24. № 4. С. 5–21. DOI:10.17759/pse.2019240401
17. Моросанова В.И., Фомина Т.Г., Ованесбекова М.Л. Возрастная специфика взаимосвязи осознанной саморегуляции, академической мотивации и личностных особенностей учащихся // Теоретическая и экспериментальная психология. 2017. Т. 10. № 3. С. 34–45.
18. Хэтти Дж.А.С. Видимое обучение: синтез результатов более 50000 исследований с охватом более 86 миллионов школьников. М.: Издательство «Национальное образование», 2017. 496 с.
19. Camacho-Morles J., Slemp G.R., Pekrun R., Loderer K., Hou H., Oades L.G. Activity achievement emotions and academic performance: A meta-analysis // Educational Psychology Review. 2021. Vol. 33, No. 3. P. 1051–1095.
20. Farooq M.S. et al. Factors affecting students' quality of academic performance: A case of secondary school level // Journal of quality and technology management. 2011. Vol. 7. No. 2. P. 1–14.
21. Garon-Carrier G. et al. Intrinsic Motivation and Achievement in Mathematics in Elementary School: A Longitudinal Investigation of Their Association // Child development. 2016. Vol. 87. No. 1. P. 165–175. DOI: 10.1111/cdev.12458
22. Hessen P.R., Kuncel N.R. Beyond grades: A meta-analysis of personality predictors of academic behavior in middle school and high school // Personality and Individual Differences. 2022. Vol. 199. A. 111809. DOI: 10.1016/j.paid.2022.111809
23. Jiang Y., Rosenzweig E.Q., Gaspard H. An expectancy-value-cost approach in predicting adolescent students' academic motivation and achievement // Contemporary Educational Psychology. 2018. Vol. 54. P. 139–152.



24. *Kriegbaum K., Becker N., Spinath B.* The relative importance of intelligence and motivation as predictors of school achievement: A meta-analysis // *Educational Research Review*. 2018. Vol. 25. P. 120–148. DOI: 10.1016/j.edurev.2018.10.001
25. *Lee J., Stankov L.* Non-cognitive predictors of academic achievement: Evidence from TIMSS and PISA // *Learning and Individual Differences*. 2018. Vol. 65. P. 50–64. DOI: 10.1016/j.lindif.2018.05.009
26. *Mammadov S.* Big Five personality traits and academic performance: A meta-analysis // *Journal of Personality*. 2022. Vol. 90. No. 2. P. 222–255.
27. *Morosanova V.I., Bondarenko I.N., Fomina T.G., Burmistrova-Savenkova A.V.* Self-regulation, personality factors, academic achievement in middle and senior school: variations across grade level // *The European Proceedings of Social and Behavioral Sciences EpSBS*. 2018. No. 43. P. 401–410. DOI: 10.15405/epsbs.2018.07.53/
28. *Morosanova V.I., Bondarenko I.N., Fomina T.G.* Conscious Self-regulation, Motivational Factors, and Personality Traits as Predictors of Students' Academic Performance: A Linear Empirical Model // *Psychology in Russia*. 2022. Vol. 15. No. 4. P. 170. DOI:10.11621/pir.2022.0411
29. *Poropat A.E.* A meta-analysis of adult-rated child personality and academic performance in primary education. *British Journal of Educational Psychology*. 2014. Vol. 84. P. 239–252. DOI: 10.1111/bjep.12019
30. *Robson D.A., Allen M.S., Howard S.J.* Self-regulation in childhood as a predictor of future outcomes: A meta-analytic review // *Psychological bulletin*. 2020. Vol. 146. No. 4. P. 324. DOI:10.1037/bul0000227
31. *Stajkovic A.D., Bandura A., Locke E.A., Lee D., Sergent K.* Test of three conceptual models of influence of the big five personality traits and self-efficacy on academic performance: A meta-analytic path-analysis // *Personality and individual differences*. 2018. Vol. 120. P. 238–245. DOI: 10.1016/j.paid.2017.08.014
32. *Zupancic M., Kavcic T., Slobodskaya H.R., Akhmetova O.A.* Broad and Narrow Personality Traits Predicting Academic Achievement Over Compulsory Schooling: A Cross-Sectional Study in Two Countries // *Journal of Early Adolescence*. 2016. Vol. 36. No. 6. P. 783–806. DOI: 10.1177/0272431615588954



Analysis of the Relationship between Predictors of Academic Achievement of Schoolchildren Using the Network Modeling

Anna M. Potanina*

Federal Scientific Center of Psychological
and Multidisciplinary Research (FNC PMI), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4358-6948>
e-mail: a.m.potan@gmail.com

Sergei L. Artemenkov**

Moscow State University of Psychology
and Education (MSUPE), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1619-2209>
e-mail: slart@inbox.ru

The problem of studying the factors influencing students' academic achievement does not lose its relevance in modern psychological and pedagogical science. Such interest arises due to current development of ideas about education as a way of developing human capital, increasing well-being and quality of life of people in modern society. The academic achievement of schoolchildren is largely determined by non-cognitive factors, including personality characteristics, motivational indicators and the development of self-regulation. The present work aims to analyze the relationships between non-cognitive predictors of academic achievement of middle and high school students using the network modeling method. Primary data was obtained using the following methods: V.I. Morosanova's "The Self-Regulation Profile of Learning Activity Questionnaire (SRPLAQ)", "Academic Motivation Scale – School (AMS-S)", "Attitude towards learning in middle and high school", "Big Five Questionnaire – Children version, BFQ-C". The average score in Russian language and mathematics was used as an indicator of academic achievement. The sample consisted of 307 secondary school students (37.1 % boys, age: 10–18 years). The statistical analysis included calculation of descriptive statistics for 28 indicators, and analyses of partial correlation networks, describing the relationships between regulatory and personality variables, as well as the academic achievement of students in grades 5–6, 7–9 and 10–11. The results revealed significant relationships between variables regardless of the period of education, and differences in the structure of partial correlation networks in grades 5–6, 7–8 and 9–11. It was found that the nature of the relationships between non-cognitive predictors and academic achievement varies depending on the period of study. The result showed that the achievement of students in grades 5–6 is significantly and directly correlated to the indicator of openness to new experience, while in grades 7–9 a direct correlation is also found with the general level of attitude towards learning, and in grades 10–11 – with cognitive motivation, neuroticism and conscious self-regulation. The results confirm the known relationships, and also reveal new ones that were not previously discovered in existing research: for example, a negative relationship between academic performance and



cognitive motivation. The article concludes with directions for further research of moderator-mediator interactions between non-cognitive variables in their impact on students' academic achievement.

Keywords: non-cognitive predictors, academic achievement, schoolchildren, network modeling.

For citation:

Potanina A.M., Artemenkov S.L. Analysis of the Relationship between Predictors of Academic Achievement of Schoolchildren Using the Network Analysis Method. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 3, pp. 22–40. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140302> (In Russ., abstr. in Engl.).

***Anna M. Potanina**, Research Fellow, Laboratory of Psychology of Self-Regulation, Federal Scientific Center of Psychological and Multidisciplinary Research (FNC PMI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4358-6948>, e-mail: a.m.potan@gmail.com

****Sergei L. Artemenkov**, PhD (Technical Sciences), Professor, Moscow State University Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1619-2209>, e-mail: slart@inbox.ru

References

1. Avalueva N.B., Alekseeva A.S., Alieva E.F. Assessment System for Subjective Well-being of Russian Schoolchildren: a Theoretical and Methodological Rationale. *Sibirskij psihologicheskij zhurnal = Siberian journal of psychology*, 2022, no. 83. pp. 100–121.
2. Andreeva A.D., Prikhozhan A.M. Metodika diagnostiki motivacii ucheniya i emocional'nogo ot-nosheniya k ucheniyu v srednih i starshih klassah shkoly [Methods of diagnostics of learning motivation and emotional attitude to learning in middle and high school]. *Psichologicheskaya di-agnostika = Psychological diagnostics*, 2006, no. 1. pp. 33–38.
3. Artemenkov S.L. Setevoe modelirovanie psichologicheskikh konstruktov [Net modelling of psy-chological constructs]. *Modelirovanie i analiz dannyh = Modelling and Data Analysis*, 2017, no. 1, pp. 9–28.
4. Artemenkov S.L. Ordered Partial Correlation Networks in Psychological Research. *Mode-lirovanie i analiz dannyh = Modelling and Data Analysis*, 2021, no. 2, pp. 31–50. DOI: [10.17759/mda.2021110202](https://doi.org/10.17759/mda.2021110202)
5. Artemenkov S.L. The Issues of Construction and Analysis of Ordered Partial Correlation Net-works in Psychological Research. *Modelirovanie i analiz dannyh = Modelling and Data Analysis*, 2021, no. 3, pp. 36–56. DOI: [10.17759/mda.2021110303](https://doi.org/10.17759/mda.2021110303)
6. Bondarenko I.N., Potanina A.M., Morosanova V.I. Conscious self-regulation as a resource for success in the Russian language in students with different levels of intelligence. *Ekspertim-ental'naya psihologiya = Experimental Psychology*, 2020, Vol. 13, no. 1. pp. 63–78. DOI: [10.17759/exppsy.2020130105](https://doi.org/10.17759/exppsy.2020130105)
7. Bondarenko I.N., Tsyganov I.Yu., Morosanova V.I. The Role of Conscious Self-Regulation in the Dynamics of Cognitive Activity and Cognitive Engagement of Students during the Transi-tion from Secondary to High School: A Longitudinal Study. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 14. Psikhologiya = Moscow University Psychology Bulletin*, 2022, no. 4, pp.200–224. DOI:[10.11621/vsp.2022.04.09](https://doi.org/10.11621/vsp.2022.04.09)
8. Vachkov I.V., Vachkova S.N. Reproducibility of Psychological Experiments as a Problem of Post-Nonclassical Science. *Kul'turno-istoricheskaya psihologiya = Cultural-Historical Psychology*, 2016, Vol. 12, no. 1, pp. 97–101.



9. Gordeeva T.O., Sychev O.A., Gizhickij V.V., Gavrichenkova, T.K. Intrinsic and extrinsic academic motivation for schoolchildren. *Psichologicheskaja nauka i obrazovanie = Psychological science and education*, 2017. Vol. 22, no. 2, pp. 65–74.
10. Dormidontov R.A. The issue of academic achievements under modern educational conditions. *Mir nauki. Pedagogika i psihologiya = World of Science. Pedagogy and psychology*, 2022, Vol. 10, no. 5. URL: <https://mir-nauki.com/PDF/27PDMN522.pdf>
11. Ishmuratova Y.A., Potanina, A.M., Tsyganov I.Yu., Morosanova V.I. Noncognitive predictors of academic success at different stages of education. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Psichologicheskie nauki = Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Psychology*, 2019, no. 3, pp. 25–40.
12. Malyh S.B., Tihomirova T.N., Vasin G.M. Adaptaciya ruskoyazychnoj versii oprosnika «Bol'shaya Pyaterka – detskij variant» [Adaptation of the Russian version of the “Big Five Questionnaire – Children (BFQ-C)”]. *Teoreticheskaya i eksperimental'naya psikhologiya = Theoretical and experimental psychology*, 2015, Vol. 8, no. 4, pp. 6–12
13. Morosanova, V.I. Razvitiye resursnogo podhoda k issledovaniju osoznannoj samoreguljicii dostizhenija celej i samorazvitiya cheloveka [Development of the resource approach to the study of conscious self-regulation of achieving goals and self-development of a person]. *Psikhologija samoreguljicii: jevoljucija podhodov i vyzovy vremeni (eds. Yu. P. Zinchenko, V.I. Morosanova)* [Psychology of self-regulation: evolution of approaches and challenges of time]. Moscow; Saint-Petersburg: Nestor-Istorija, 2020. pp. 11–36.
14. Morosanova V.I. Conscious self-regulation as a metaresource for achieving goals and solving the problems of human activity. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 14. Psikhologiya = Moscow University Psychology Bulletin*, 2021, no. 1, pp. 4–37. DOI:10.11621/vsp.2021.01.01
15. Morosanova V.I., Bondarenko I.N. Diagnostika osoznannoj samoreguljicii uchebnoj deyatel'nosti: novaya versiya oprosnika SSUD-M [Diagnosis of conscious self-regulation of educational activity: a new version of the SRPLAQ]. *Teoreticheskaya i eksperimental'naya psikhologiya = Theoretical and experimental psychology*, 2017, Vol. 10, no. 2, pp. 27–37.
16. Morosanova V.I., Bondarenko I.N., Fomina T.G. Personality and Motivational Features and Conscious Self-Regulation in Early Adolescents with Different Dynamics of Psychological Well-Being. *Psikhologicheskaja nauka i obrazovanie = Psychological Science and Education*, 2019. Vol. 24, no. 4, pp. 5–21. DOI:10.17759/pse.2019240401
17. Morosanova V.I., Fomina T.G., Ovanesbekova M.L. Vozrastnaja specifika vzaimosvjazi osoznannoj samoreguljicii, akademicheskoy motivacii i lichnostnyh osobennostej uchashhihsja [Age specificity of the relationship of conscious self-regulation, academic motivation and personality characteristics of students]. *Teoreticheskaya i eksperimental'naya psikhologiya = Theoretical and experimental psychology*, 2017, Vol. 10, no 3, pp. 34–45.
18. Hetti Dzh.A.S. *Visible learning*. Moscow: Izdatel'stvo «Nacional'noe obrazovanie», 2017, 496 p.
19. Camacho-Morles J., Slep G.R., Pekrun R., Loderer K., Hou H., Oades L.G. Activity achievement emotions and academic performance: A meta-analysis. *Educational Psychology Review*, 2021, Vol. 33, no. 3. pp. 1051–1095.
20. Farooq M.S. et al. Factors affecting students' quality of academic performance: A case of secondary school level. *Journal of quality and technology management*. 2011, Vol. 7, no. 2, pp. 1–14.
21. Garon-Carrier G. et al. Intrinsic Motivation and Achievement in Mathematics in Elementary School: A Longitudinal Investigation of Their Association. *Child development*, 2016, Vol. 87, No. 1, pp. 165–175. DOI: 10.1111/cdev.12458
22. Hessen P.R., Kuncel N.R. Beyond grades: A meta-analysis of personality predictors of academic behavior in middle school and high school. *Personality and Individual Differences*, 2022, ol. 199, A. 111809. DOI: 10.1016/j.paid.2022.111809



23. Jiang Y., Rosenzweig E.Q., Gaspard H. An expectancy-value-cost approach in predicting adolescent students' academic motivation and achievement. *Contemporary Educational Psychology*, 2018, Vol. 54, pp. 139–152.
24. Kriegbaum K., Becker N., Spinath B. The relative importance of intelligence and motivation as predictors of school achievement: A meta-analysis. *Educational Research Review*, 2018, Vol. 25, pp. 120–148. DOI: 10.1016/j.edurev.2018.10.001
25. Lee J., Stankov L. Non-cognitive predictors of academic achievement: Evidence from TIMSS and PISA. *Learning and Individual Differences*, 2018, Vol. 65, pp. 50–64. DOI: 10.1016/j.lindif.2018.05.009
26. Mammadov S. Big Five personality traits and academic performance: A meta-analysis. *Journal of Personality*, 2022, Vol. 90, no. 2, P. 222–255.
27. Morosanova V.I., Bondarenko I.N., Fomina T.G., Burmistrova-Savenkova A.V. Self-regulation, personality factors, academic achievement in middle and senior school: variations across grade level. *The European Proceedings of Social and Behavioral Sciences EpSBS*, 2018, no. 43, pp. 401–410. DOI: 10.15405/epsbs.2018.07.53
28. Morosanova V.I., Bondarenko I.N., Fomina T.G. Conscious Self-regulation, Motivational Factors, and Personality Traits as Predictors of Students' Academic Performance: A Linear Empirical Model. *Psychology in Russia*, 2022, Vol. 15, no. 4, pp. 170. DOI:10.11621/pir.2022.0411
29. Poropat A.E. A meta-analysis of adult-rated child personality and academic performance in primary education. *British Journal of Educational Psychology*, 2014, Vol. 84, pp. 239–252. DOI: 10.1111/bjep.12019
30. Robson D.A., Allen M.S., Howard S.J. Self-regulation in childhood as a predictor of future outcomes: A meta-analytic review. *Psychological bulletin*, 2020, Vol. 146, no. 4, pp. 324. DOI:10.1037/bul0000227
31. Stajkovic A.D., Bandura A., Locke E.A., Lee D., Sergent K. Test of three conceptual models of influence of the big five personality traits and self-efficacy on academic performance: A meta-analytic path-analysis. *Personality and individual differences*, 2018, Vol. 120, pp. 238–245. DOI: 10.1016/j.paid.2017.08.014
32. Zupancic M., Kavcic T., Slobodskaya H.R., Akhmetova O.A. Broad and Narrow Personality Traits Predicting Academic Achievement Over Compulsory Schooling: A Cross-Sectional Study in Two Countries. *Journal of Early Adolescence*, 2016, Vol. 36, no. 6, pp. 783–806. DOI: 10.1177/0272431615588954

Получена 03.06.2024

Принята в печать 03.07.2024

Received 03.06.2024

Accepted 03.07.2024

◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

УДК 519.7

Приближенный метод синтеза непрерывных систем совместного оценивания и управления на основе SDRE технологии

Пантелеев А.В. *

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>
e-mail: avpanteleev@inbox.ru

Хвошнянская Е.А. **

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-6901-8720>
e-mail: [e-mail: Liza190401@mail.ru](mailto:Liza190401@mail.ru)

Рассматривается проблема приближенного синтеза замкнутой нелинейной непрерывной системы совместного оценивания и управления. Используется подход, основанный на применении идеи теоремы разделения для линейных динамических систем. При помощи операции факторизации нелинейная система преобразуется к похожей по структуре на линейную систему, а уже к трансформированной системе применяются алгоритмы синтеза оптимального линейного регулятора и наблюдателя состояния, особенностью которых является зависимость матриц, входящих в соответствующие уравнения Риккати, от вектора состояния. Приведен пример синтеза наблюдателя состояния и регулятора, демонстрирующий применение предложенного алгоритма.

Ключевые слова: оптимальный линейный регулятор, наблюдатель состояния, принцип разделения, уравнение Риккати, нелинейная динамическая система.

Для цитаты:

Пантелеев А.В., Хвошнянская Е.А. Приближенный метод синтеза непрерывных систем совместного оценивания и управления на основе SDRE технологии // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 3. С. 41–62. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140303>



***Пантелеев Андрей Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики института «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: avpanteleev@inbox.ru

****Хвошнянская Елизавета Аркадьевна**, студент магистратуры, институт «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-6901-8720>, e-mail: Liza190401@mail.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Большинство задач нахождения оптимального управления нелинейными динамическими решается при предположениях об отсутствии информации о векторе состояния (программное управление), о наличии информации о части координат вектора состояния (управление с неполной обратной связью) или о наличии полной информации о векторе состояния (управление с полной обратной связью). Для их решения успешно применяются необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума, соотношения, полученные на основе достаточных условий оптимальности, достаточные условия в форме уравнения Беллмана [1]. В задачах, где информация о векторе состояния или его части не доступна, т.е. поступает некоторая косвенная информация с модели измерительной системы, требуется решать задачу об определении управления, зависящего от поступающей информации, причем эта информация может накапливаться на отрезке от начального момента времени до текущего. Если модели объекта управления и измерительной системы являются линейными, а критерий качества управления квадратичным, то в стохастическом случае справедлива теорема разделения о возможности независимого решения задачи синтеза оптимального линейного регулятора и оптимального фильтра Калмана с последующей заменой вектора состояния в линейном регуляторе его оценкой, вырабатываемой фильтром [1, 2]. При этом управление с обратной связью, формируемой фильтром и линейным регулятором, является оптимальным, т.е. обеспечивает минимальное значение величины математического ожидания квадратичного критерия качества. В детерминированном случае использование аналогичного подхода, т.е. нахождения оптимального линейного регулятора и наблюдателя состояния полного или низкого порядка с последующей заменой вектора состояния в регуляторе его оценкой, вырабатываемой наблюдателем, приводит лишь к субоптимальному управлению. Оно тем ближе к оптимальному, чем точнее вырабатываемая оценка вектора состояния [1, 2].

При управлении нелинейными системами также возможно применение идей теоремы разделения. При этом постулируются структуры управления объектом и управления наблюдателем или фильтром с учетом возможных ограничений на управление, содержащие конечное число параметров [3]. Наилучшие значения параметров находятся, как правило, с помощью применения современных метаэвристических алгоритмов условной глобальной оптимизации [4].

В статье предлагается альтернативный подход, связанный с приближенной заменой нелинейной системы линейной, с матрицами, зависящими от вектора состояния. Для этого применяется операция факторизации [5–11], которая в общем случае не является однозначной. Такое представление позволяет описать поведение нелинейной системы в некоторой окрестности начала координат. Функционал качества также представляется в форме, аналогичной квадратичному функционалу, применяемому в линейных системах, при этом функционал является квадратичным по управлению и нелинейным по вектору состояния. Такое представление позволяет представить решение задачи в форме, аналогичной известному результату в теории линейных систем [5–11]. Оптимальность при этом не достигается, но процедура синтеза управления упрощается. Главной вычислительной проблемой описанного подхода является необходимость решения уравнения Риккати, коэффициенты которого зависят от вектора состояния (State-Dependent Riccati Equation, SDRE).

Для решения задачи оценивания вектора состояния также может применяться аналогичный подход [12–14]. При этом возможно построение асимптотического наблюдателя, обеспечивающего стремление ошибки оценивания к нулю на полубесконечном промежутке времени [14].

Для решения задачи синтеза системы совместного управления и оценивания предлагается объединить в едином алгоритме два описанных подхода.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть уравнение, описывающее поведение модели объекта управления, имеет вид

$$\dot{x}(t) = A(x(t)) x(t) + B(x(t)) u(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

а модель измерительной системы

$$y = C(x(t))x(t), \quad (2)$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния, $u \in R^q$ – вектор управления, $y \in R^m$ – вектор измерений, $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ – матрицы размеров $(n \times n)$, $(n \times q)$, $(m \times n)$ соответственно, зависящие от вектора состояния x ; $t \in [0, \infty)$ – время; x_0 – вектор начальных состояний.

Предполагается, что непрерывные матричные функции $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ получены в результате реализации процесса факторизации нелинейной системы вида

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + B(x(t))u(t),$$

$$y(t) = h(x(t)),$$

где $f(\cdot) \in C^1(R^n)$, $h(\cdot) \in C^1(R^n)$, т.е. ее приближенной замены системой, аналогичной линейной [5–11]. Известно, что при $n > 1$ эта процедура является неединственной [7, 9, 11].

Функционал качества управления квадратичный:

$$\tilde{I} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[x^T(t) \tilde{S}(x(t)) x(t) + u^T(t) \tilde{Q}(x(t)) u(t) \right] dt, \quad (3)$$



где $\tilde{S}(x)$, $\tilde{Q}(x)$ – непрерывные весовые матрицы размеров $(n \times n)$, $(q \times q)$ соответственно, причем $\tilde{S}(x) \geq 0$, $\tilde{Q}(x) > 0 \quad \forall x \in R^n$. Функционал (3) является квадратичным по вектору управления u и неквадратичным по вектору состояния x .

Для приближенного решения задачи минимизации величины функционала (3) предлагается использовать идею разделения задач нахождения управления $u(t, x)$ с полной обратной связью объектом (1) и процедуру определения оценки $\hat{x}(t)$ вектора состояния по результатам измерений (2), а потом объединить полученные результаты в законе управления вида $u(t, \hat{x})$.

Требуется разработать и реализовать алгоритм нахождения управления в задаче (1)–(3), близкого по величине функционала (3) к оптимальному.

3. СТРАТЕГИЯ СИНТЕЗА СУБОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Стратегия состоит из нескольких этапов.

Первый этап (синтез регулятора). При формировании алгоритма предлагается реализовать идеи синтеза субоптимальных линейных систем управления, используя аналогию с уравнениями (1) и (2), а также структурой функционала (3). Отличие от классического случая заключается в зависимости матриц $A, B, \tilde{Q}, \tilde{S}$ от вектора состояния. Поэтому далее реализуется подход, использующий решение уравнений Риккати с коэффициентами, зависящими от вектора состояния [5–11]. Так как в рассматриваемой задаче промежуток функционирования системы является полубесконечным, то по аналогии с линейными стационарными системами составляется и решается алгебраическое уравнение Риккати, формально получаемое из соответствующего дифференциального уравнения путем приравнивания производной решения к нулевой матрице.

Решая алгебраическое уравнение Риккати с коэффициентами, зависящими от вектора состояния x :

$$A^T(x)K_2(x) + K_2(x)A(x) - K_2(x)B(x)\tilde{Q}^{-1}(x)B^T(x)K_2(x) + \tilde{S}(x) = 0, \quad (4)$$

можно найти матрицу $K_2(x)$ и явный вид управления в форме оптимального линейного регулятора [5–11]

$$u(x) = -\tilde{Q}^{-1}(x)B^T(x)K_2(x)x. \quad (5)$$

Известно, что если $K_2(x)$ есть единственное, симметричное, положительно определенное решение уравнения (4), то управление (5) при использовании в (1) порождает устойчивую замкнутую систему, т.е. $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$. Можно показать, что описанный подход при $n > 1$ дает лишь приближенное решение задачи минимизации величины функционала (3). Поскольку решение уравнения (4) для всех x затруднительно, то управление объектом находится в процессе моделирования при каждом текущем значении времени:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(x(t)) x(t) + B(x(t)) u(t), \quad x(0) = x_0, \\ u(t) &= u(x(t)) = -\tilde{Q}^{-1}(x(t)) B^T(x(t)) K_2(x(t)) x(t), \end{aligned} \quad (6)$$

$$A^T(x(t)) K_2(x(t)) + K_2(x(t)) A(x(t)) - K_2(x(t)) B(x(t)) \tilde{Q}^{-1}(x(t)) B^T(x(t)) K_2(x(t)) + \tilde{S}(x(t)) = 0.$$

Если при решении системы (6) используется один из численных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений [16], то моменты времени, в которых требуется решение SDRE, определяются величиной шага интегрирования.

Второй этап (синтез наблюдателя состояния). Поскольку вектор состояния в рассматриваемой задаче в общем случае не доступен измерению, требуется нахождение его оценки с помощью наблюдателя состояния. Его уравнение задается в форме [14]

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(\hat{x}(t)) \hat{x}(t) + B(\hat{x}(t)) u(t) + K(\hat{x}(t))[y - C(\hat{x}(t))\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \quad (7)$$

где $\hat{x} \in R^n$ – вектор оценок координат вектора состояния, $K(\hat{x}(t))$ – неизвестная непрерывная матрица размеров $(n \times m)$, \hat{x}_0 – вектор начальных значений оценок координат вектора состояния, $t \in [0, \infty)$ – время.

Матрица $K(\hat{x}(t))$ выполняет функцию управления процессом наблюдения:

$$K(\hat{x}(t)) = P(\hat{x}(t)) C^T(\hat{x}(t)) Q(\hat{x}(t)), \quad (8)$$

где матрица $P(\hat{x}(t))$ является решением дифференциального уравнения Риккати, коэффициенты которого зависят от оценок вектора состояния [14]:

$$\begin{aligned} \dot{P}(\hat{x}(t)) &= (A(\hat{x}(t)) + \alpha E)P(\hat{x}(t)) + P(\hat{x}(t))(A^T(\hat{x}(t)) + \alpha E) - \\ &- P(\hat{x}(t)) B(\hat{x}(t)) Q^{-1}(\hat{x}(t)) B^T(\hat{x}(t)) P(\hat{x}(t)) + S(\hat{x}(t)), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\alpha > 0$ – подбираемый параметр, который определяет скорость уменьшения величины ошибки наблюдателя, $Q(\hat{x})$, $S(\hat{x})$ – симметрические положительно определенные матрицы размеров $(m \times m)$, $(n \times n)$ соответственно, определяющие поведение вектора оценки во времени. Заметим, что в уравнении наблюдателя (7) используется соотношение (6) для регулятора с полной обратной связью.

Для получения уравнения, описывающего изменение ошибки оценивания, следует вычесть из уравнения (1) уравнение (7) с учетом (2) и обозначения $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = A(x(t)) x(t) + B(x(t)) u(t) - \{A(\hat{x}(t)) \hat{x}(t) + B(\hat{x}(t)) u(t) + K(\hat{x}(t))[y - C(\hat{x}(t))\hat{x}(t)]\},$$

$$\varepsilon(0) = x_0 - \hat{x}_0.$$

При выполнении ряда дополнительных условий на матричные функции $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $Q(x)$, $S(x)$, ограничивающих скорость их роста, и параметр α , а также поточечного выполнения критерия наблюдаемости:



$$\text{rg}(C^T(x) \quad A^T(x)C^T(x) \quad (A^T(x))^2 C^T(x) \dots (A^T(x))^{n-1} C^T(x)) = n$$

в окрестности начала координат, можно доказать [14], что в результате синтезируется асимптотический наблюдатель с $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Для упрощения процедуры синтеза наблюдателя в уравнении (9) предлагается положить $\dot{P}(\hat{x}(t)) = 0$ аналогично задаче синтеза регулятора, т.е. вместо дифференциального решать алгебраическое уравнение Риккати (SDRE):

$$\begin{aligned} & [A(\hat{x}(t)) + \alpha E]P(\hat{x}(t)) + P(\hat{x}(t))[A^T(\hat{x}(t)) + \alpha E] - \\ & - P(\hat{x}(t))B(\hat{x}(t))Q^{-1}(\hat{x}(t))B^T(\hat{x}(t))P(\hat{x}(t)) + S(\hat{x}(t)) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Для нахождения оценки вектора состояния требуется решить совместно систему уравнений (6),(7),(8),(10). При применении численных алгоритмов интегрирования дифференциальных уравнений [16] следует учитывать, что моменты времени, в которых требуется найти решение SDRE вида (4),(10), определяются величиной шага интегрирования.

Третий этап. Применяя идею принципа расширения, вместо вектора состояния подставим в закон управления вектор оценки состояния:

$$u(t) = u(\hat{x}(t)) = -\tilde{Q}^{-1}(\hat{x}(t))B^T(\hat{x}(t))K_2(\hat{x}(t))\hat{x}(t) \quad (11)$$

Для оценки качества синтезируемого управления требуется реализовать процедуру совместного решения системы уравнений (1),(2),(7),(8),(11) с учетом необходимости решения SDRE (4),(10) в каждый момент времени при известных векторах $x(t)$ и $\hat{x}(t)$.

4. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

1. Задать матрицы $A(x), B(x), C(x), Q(x), S(x), \tilde{Q}(x), \tilde{S}(x), \hat{x}_0$, входящие в математические модели (1),(2),(3),(7),(9). Проверить поточечное выполнение критерия наблюдаемости:

$$\text{rg}(C^T(x) \quad A^T(x)C^T(x) \quad (A^T(x))^2 C^T(x) \dots (A^T(x))^{n-1} C^T(x)) = n$$

в окрестности начала координат. Задать начальные векторы $x(0) = x_0, \hat{x}(0) = \hat{x}_0$.

2. Найти матрицу $K_2(x)$, решая алгебраическое уравнение Риккати (SDRE):

$$A^T(x)K_2(x) + K_2(x)A(x) - K_2(x)B(x)\tilde{Q}^{-1}(x)B^T(x)K_2(x) + \tilde{S}(x) = 0$$

и управление $u(x) = -\tilde{Q}^{-1}(x)B^T(x)K_2(x)x$.

3. Найти матрицу $P(\hat{x})$, решая алгебраическое уравнение Риккати (SDRE):

$$[A(\hat{x}) + \alpha E]P(\hat{x}) + P(\hat{x})[A^T(\hat{x}) + \alpha E] - P(\hat{x})C^T(\hat{x})Q^{-1}C(\hat{x})P(\hat{x}) + S(\hat{x}) = 0$$

и управление процессом наблюдения $K(\hat{x}) = P(\hat{x})C^T(\hat{x})Q(\hat{x})$,



4. Решить задачу оценивания координат вектора состояния, моделируя систему

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(x(t)) x(t) + B(x(t)) u(t), \quad x(0) = x_0, \\ u(t) &= u(x(t)) = -\tilde{Q}^{-1}(x(t)) B^T(x(t)) K_2(x(t)) x(t), \\ A^T(x(t)) K_2(x(t)) + K_2(x(t)) A(x(t)) - K_2(x(t)) B(x(t)) \tilde{Q}^{-1}(x(t)) B^T(x(t)) K_2(x(t)) + \tilde{S}(x(t)) &= 0, \\ \dot{\hat{x}}(t) &= A(\hat{x}(t)) \hat{x}(t) + B(\hat{x}(t)) u(t) + K(\hat{x}(t)) [y - C(\hat{x}(t)) \hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \\ K(\hat{x}(t)) &= P(\hat{x}(t)) C^T(\hat{x}(t)) Q(\hat{x}(t)), \\ [A(\hat{x}(t)) + \alpha E] P(\hat{x}(t)) + P(\hat{x}(t)) [A^T(\hat{x}(t)) + \alpha E] - \\ - P(\hat{x}(t)) B(\hat{x}(t)) Q^{-1}(\hat{x}(t)) B^T(\hat{x}(t)) P(\hat{x}(t)) + S(\hat{x}(t)) &= 0 \end{aligned}$$

сравнивая поведение векторов $\hat{x}(t)$ и $x(t)$ для различных начальных состояний x_0 .

5. Решить задачу управления по оценке вектора состояния, моделируя систему

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(x(t)) x(t) + B(x(t)) u(t), \quad x(0) = x_0, \\ A^T(x(t)) K_2(x(t)) + K_2(x(t)) A(x(t)) - K_2(x(t)) B(x(t)) \tilde{Q}^{-1}(x(t)) B^T(x(t)) K_2(x(t)) + \tilde{S}(x(t)) &= 0, \\ \dot{\hat{x}}(t) &= A(\hat{x}(t)) \hat{x}(t) + B(\hat{x}(t)) u(t) + K(\hat{x}(t)) [y - C(\hat{x}(t)) \hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \\ K(\hat{x}(t)) &= P(\hat{x}(t)) C^T(\hat{x}(t)) Q(\hat{x}(t)), \\ [A(\hat{x}(t)) + \alpha E] P(\hat{x}(t)) + P(\hat{x}(t)) [A^T(\hat{x}(t)) + \alpha E] - \\ - P(\hat{x}(t)) B(\hat{x}(t)) Q^{-1}(\hat{x}(t)) B^T(\hat{x}(t)) P(\hat{x}(t)) + S(\hat{x}(t)) &= 0, \\ u(t) &= u(\hat{x}(t)) = -\tilde{Q}^{-1}(\hat{x}(t)) B^T(\hat{x}(t)) K_2(\hat{x}(t)) \hat{x}(t) \end{aligned}$$

для различных начальных состояний x_0 .

5. ПРИКЛАДНОЙ ПРИМЕР

Рассматривается задача управления квадрокоптером с четырьмя независимыми приводами и электрической силовой установкой, расположенной в центре тяжести. Математическая модель устройства имеет шесть степеней свободы, где вертикальное перемещение в глобальной системе координат и три угла Эйлера являются управляемыми параметрами.

Для описания системы используются углы Эйлера: $\varphi \in [-\pi; \pi]$ – угол крена, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ – угол тангажа, $\psi \in [-\pi; \pi]$ – угол рыскания.

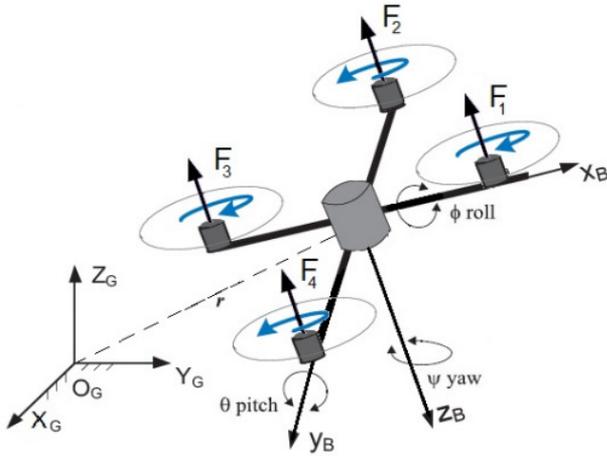


Рис. 1. Модель квадрокоптера [15]

Параметры математической модели (1) и (2):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_6 I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_6 I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 I_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{l}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{I_z} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0,11 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0,1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{pmatrix},$$

где $I_1 = \frac{(I_y - I_z)}{I_x}$, $I_2 = \frac{(I_z - I_x)}{I_y}$, $I_3 = \frac{(I_x - I_y)}{I_z}$, I_x, I_y, I_z – моменты инерции, вектор состояния $x = (x_1, \dots, x_6)^T = (\varphi \ \dot{\varphi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi})^T$. Параметры, используемые при моделировании движения, представлены в табл. 1.

Матрицы, определяющие функционал (3):

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Матрицы и параметр, входящие в (8),(9):

$$S = \begin{pmatrix} 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 21.$$

Таблица 1

Параметры, используемые при моделировании движения

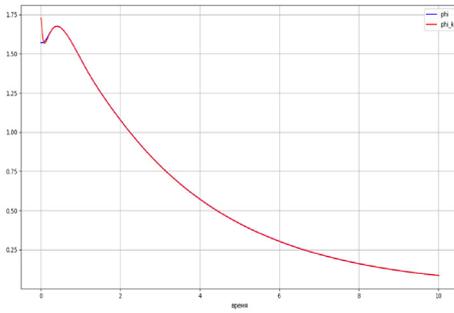
Параметр	Значение	Единица измерения
l	0,3	kgm^2
I_x	0,0081	m
I_y	0,0081	kgm^2
I_z	0,0162	kgm^2

где l – длина плеча квадрокоптера.

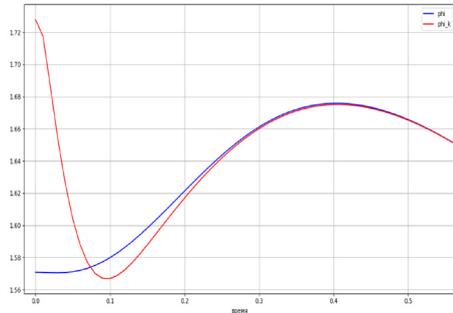
Начальные условия задаются в окрестности базового начального состояния $x(0) = (\pi / 2; 0; 3\pi / 2; 0; \pi; 0)^T$.

Рассмотрим реализацию пунктов 1–4 алгоритма, т.е. проанализируем качество решения задачи синтеза наблюдателя состояния. В модели объекта используется регулятор с полной обратной связью по вектору состояния. Моделирование системы управления производилось методом Рунге-Кутты 4 порядка [16] с шагом $h = 0,001$.

Графики изменения вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые секунды полета при начальном состоянии наблюдателя $\hat{x}(0) = (1, 1\pi / 2; 0; 3, 3\pi / 2; 0; 1, 1\pi; 0)^T$ приведены на рис. 2–7.

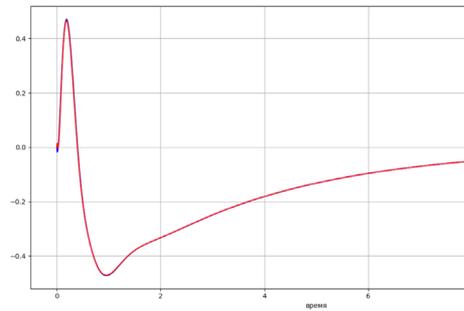


а)

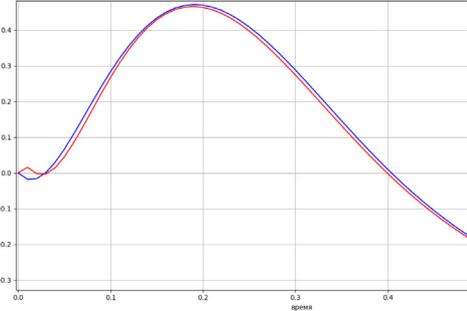


б)

Рис. 2. а) график изменения координаты φ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты φ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} на промежутке от 0 до 0,6 секунд

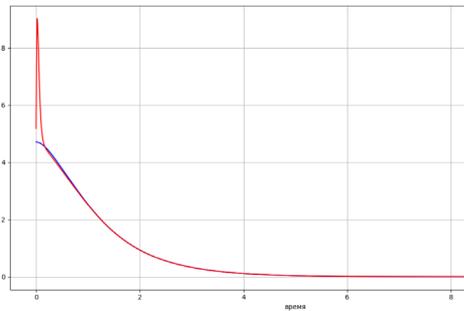


а)

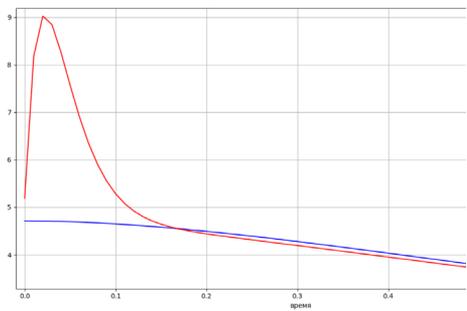


б)

Рис. 3. а) график изменения координаты $\dot{\varphi}$ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты $\dot{\varphi}$ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} на промежутке от 0 до 0,6 секунд



а)



б)

Рис. 4. а) график изменения координаты θ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты θ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} на промежутке от 0 до 0,6 секунд

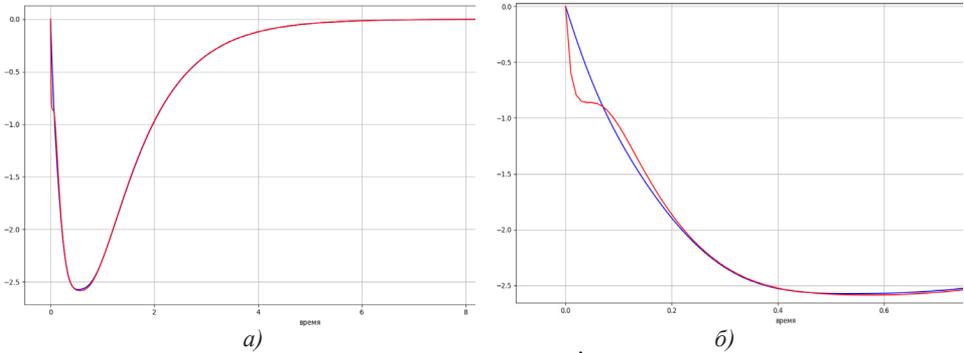


Рис. 5. а) график изменения координаты $\dot{\theta}$ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты $\dot{\theta}$ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} на промежутке от 0 до 0,8 секунд

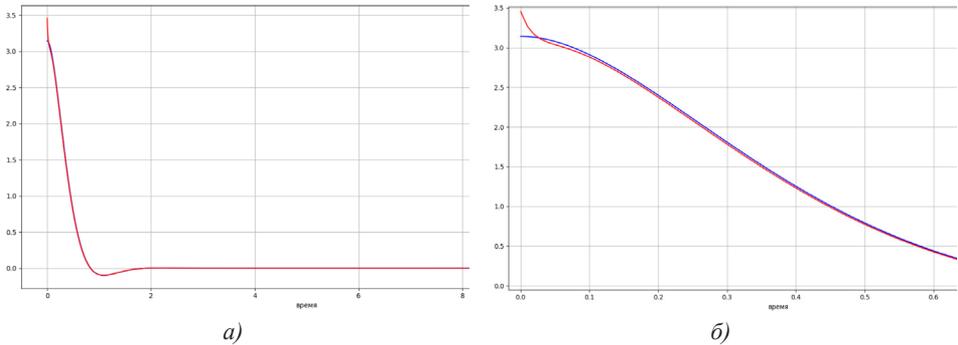


Рис. 6. а) график изменения координаты ψ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты ψ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} на промежутке от 0 до 0,7 секунд

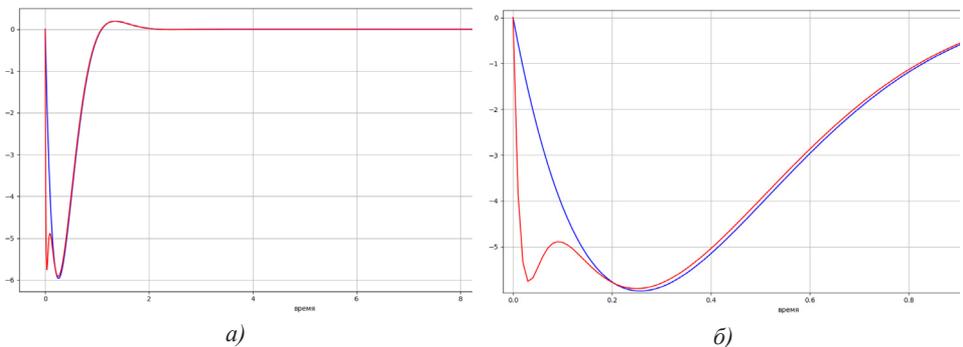
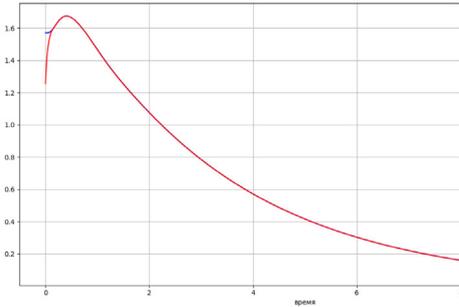


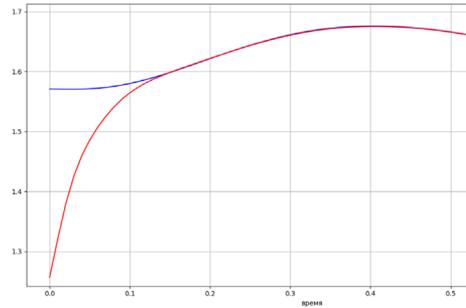
Рис. 7. а) график изменения координаты $\dot{\psi}$ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты $\dot{\psi}$ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} на промежутке от 0 до 1,1 секунд



Графики изменения вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые секунды полета при начальном состоянии наблюдателя $\hat{x}(0) = (0, 4\pi; 0; 0, 4\pi; 0; 0, 9\pi; 0)^T$ приведены на рис. 8–13.

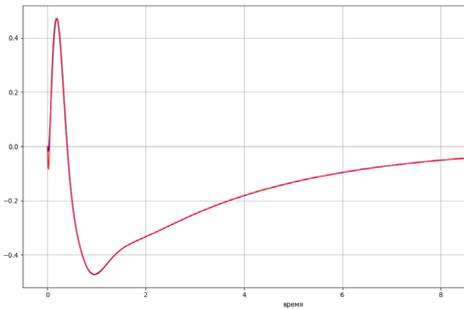


а)

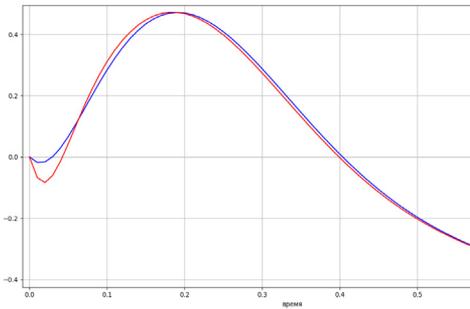


б)

Рис. 8. а) график изменения координаты φ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты φ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} на промежутке от 0 до 0,6 секунд



а)



б)

Рис. 9. а) график изменения координаты $\dot{\varphi}$ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты $\dot{\varphi}$ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} на промежутке от 0 до 0,6 секунд

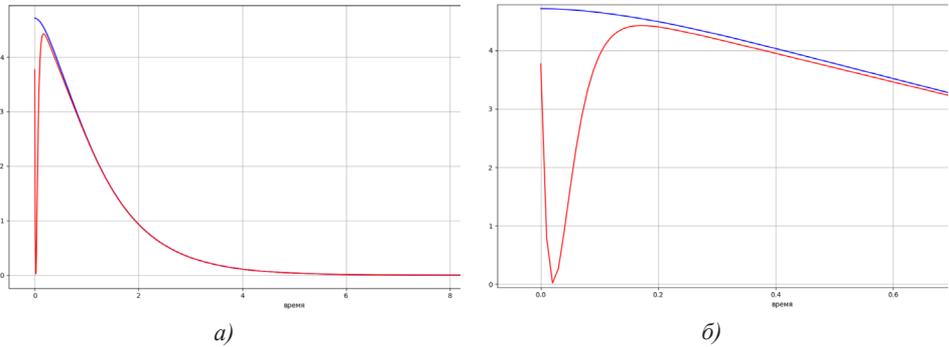


Рис. 10. а) график изменения координаты θ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты θ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} на промежутке от 0 до 0,6 секунд

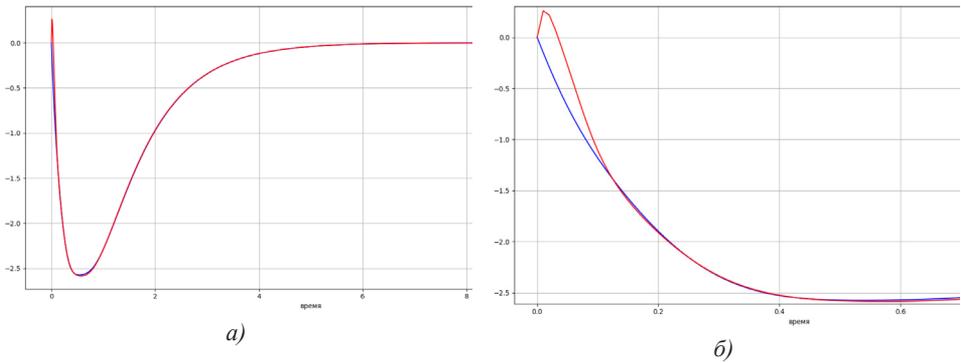


Рис. 11. а) график изменения координаты $\dot{\theta}$ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты $\dot{\theta}$ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} на промежутке от 0 до 0,8 секунд

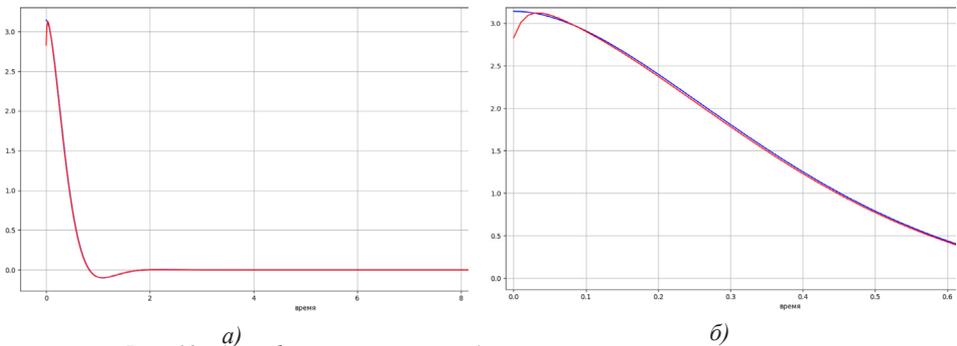


Рис. 12. а) график изменения координаты ψ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты ψ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} на промежутке от 0 до 0,7 секунд

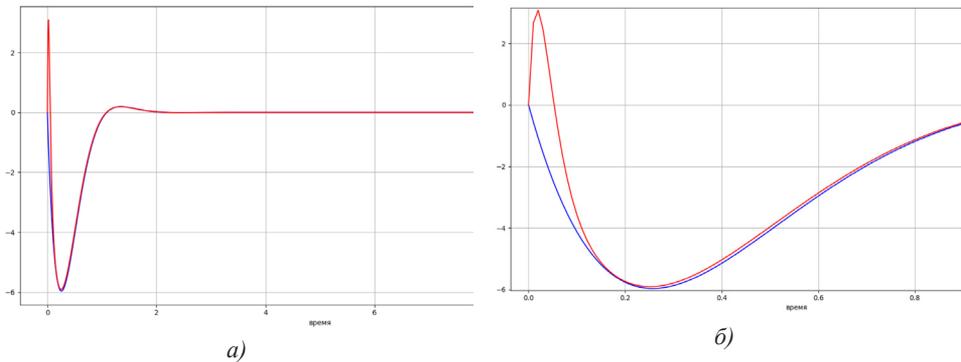


Рис. 13. а) график изменения координаты ψ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты ψ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} на промежутке от 0 до 1,1 секунд

Приведенные результаты моделирования показывают, что ошибка оценивания достаточно быстро стремится к нулю, что свидетельствует об эффективности наблюдателя состояния.

Продемонстрируем реализацию пункта 5 алгоритма, в котором используется управление по оценке вектора состояния системы. Графики изменения вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые секунды полета при начальном состоянии наблюдателя:

$$\hat{x}(0) = (1, 1\pi / 2; 0; 3, 3\pi / 2; 0; 1, 1\pi; 0)^T$$

приведены на рис. 14–19.

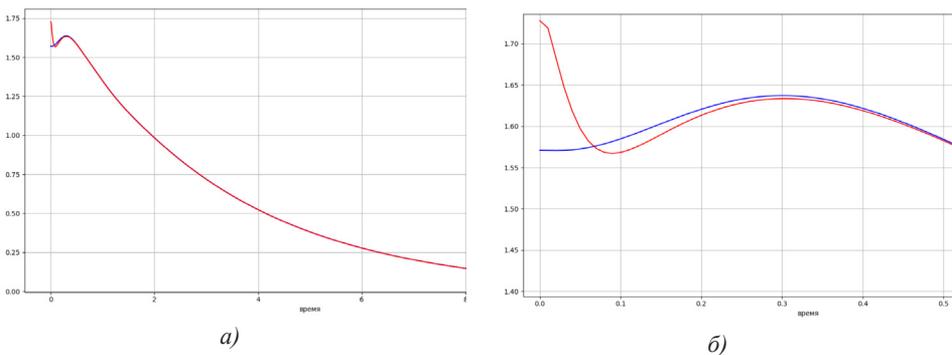
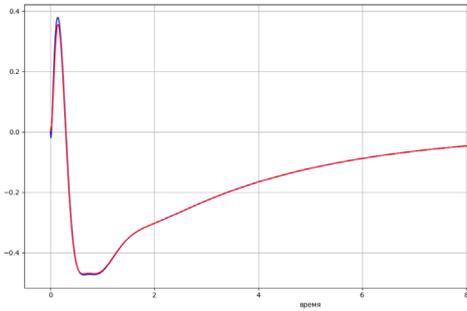
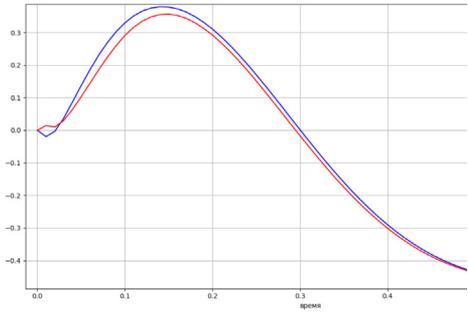


Рис. 14. а) график изменения координаты φ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты φ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} на промежутке от 0 до 0,6 секунд

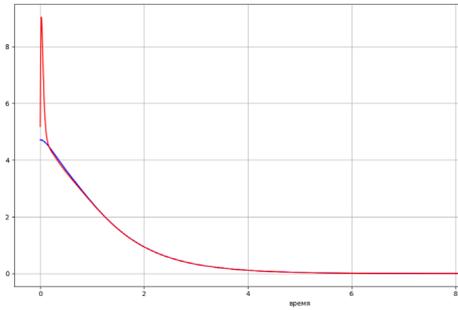


а)

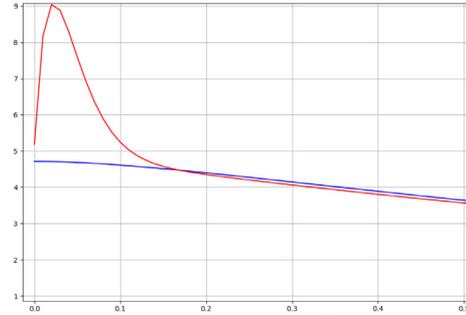


б)

Рис. 15. а) график изменения координаты $\dot{\varphi}$ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты $\dot{\varphi}$ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} на промежутке от 0 до 0,6 секунд

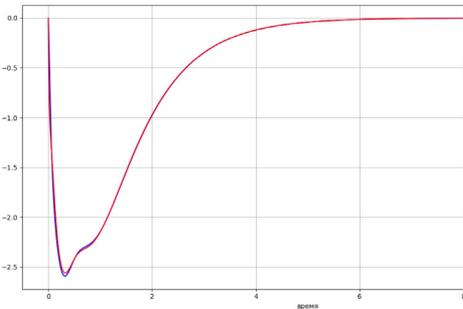


а)

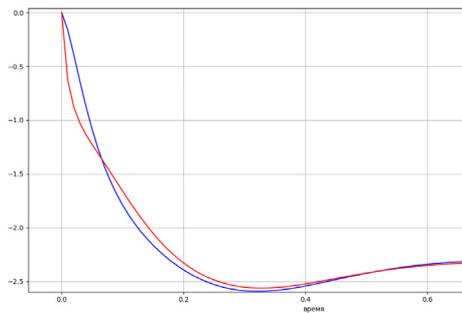


б)

Рис. 16. а) график изменения координаты θ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты θ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} на промежутке от 0 до 0,6 секунд

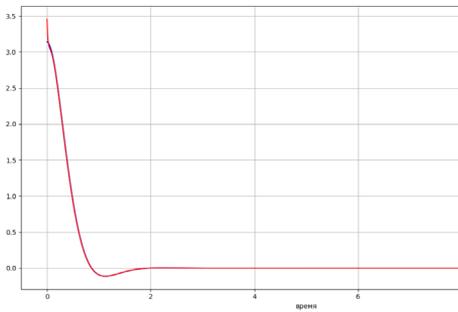


а)

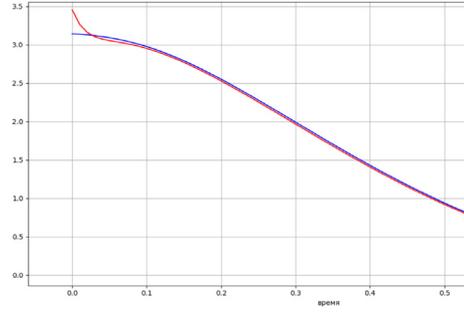


б)

Рис. 17. – а) график изменения координаты $\dot{\theta}$ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты $\dot{\theta}$ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} на промежутке от 0 до 0,8 секунд

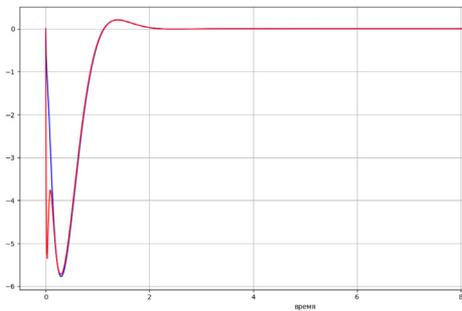


а)

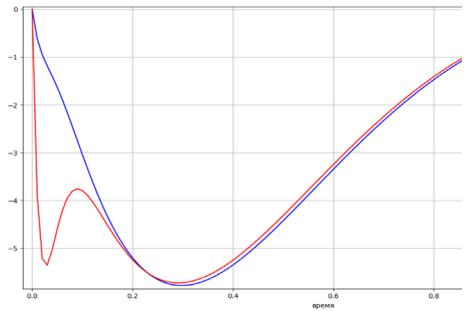


б)

Рис. 18. а) график изменения координаты ψ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты ψ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} на промежутке от 0 до 0,7 секунд



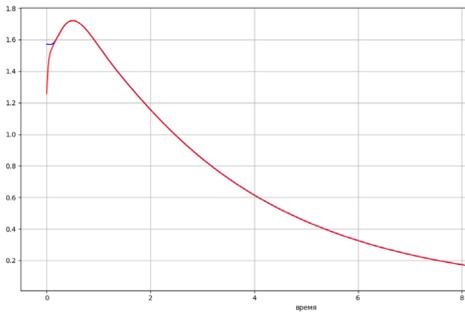
а)



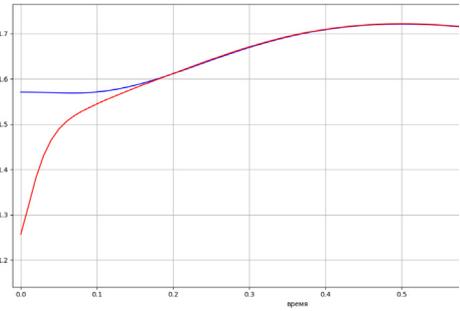
б)

Рис. 19. а) график изменения координаты ψ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты ψ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} на промежутке от 0 до 1,1 секунд

Графики изменения вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые секунды полета при начальном состоянии наблюдателя $\hat{x}(0) = (0, 4\pi; 0; 0, 4\pi; 0; 0, 9\pi; 0)^T$ приведены на рис. 20–25.

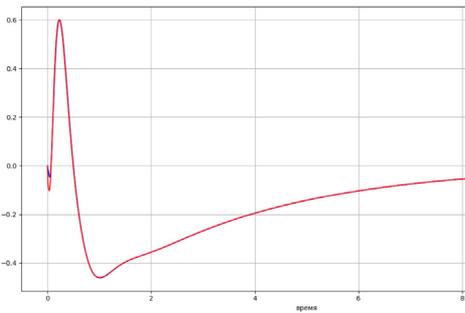


а)

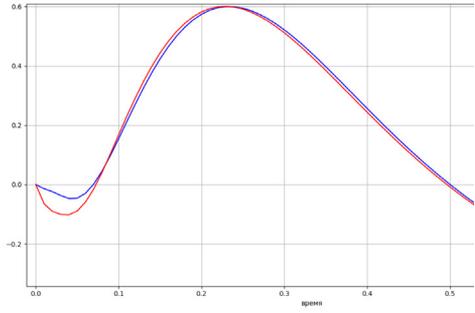


б)

Рис. 20. а) график изменения координаты φ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты φ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} на промежутке от 0 до 0,7 секунд

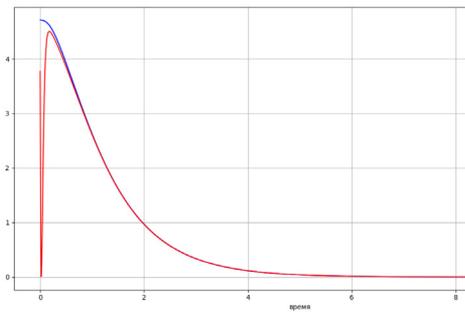


а)

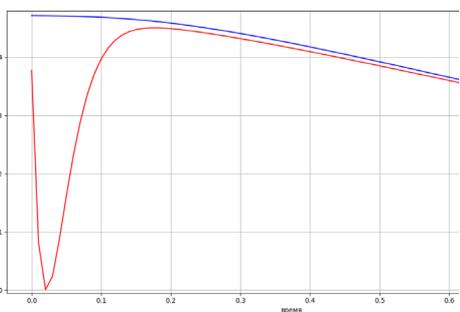


б)

Рис. 21. а) график изменения координаты $\dot{\varphi}$ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты $\dot{\varphi}$ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} на промежутке от 0 до 0,6 секунд

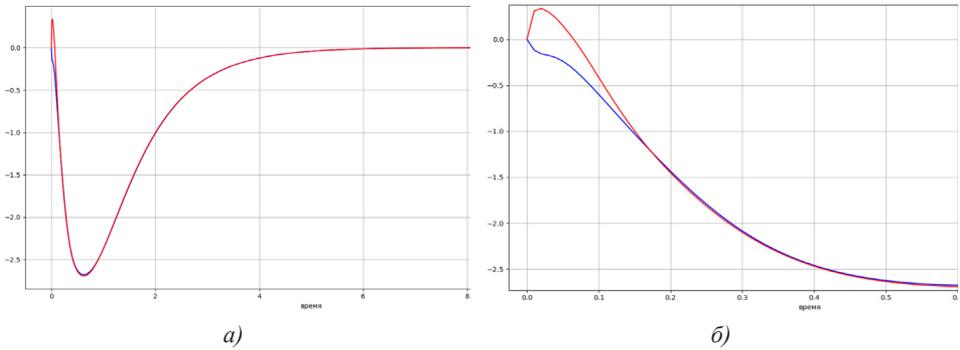


а)



б)

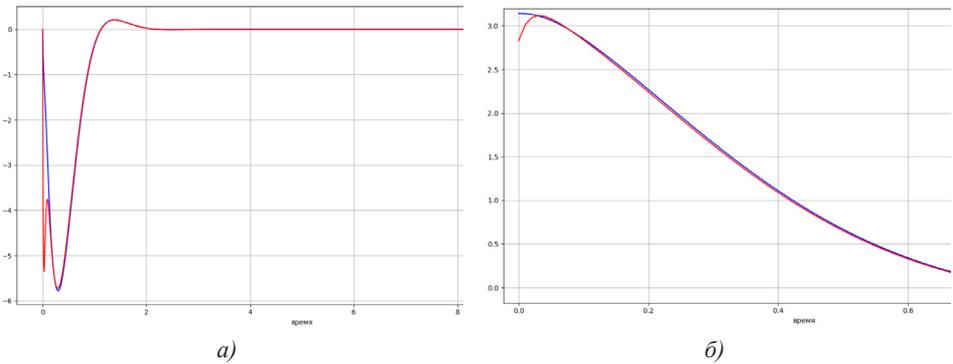
Рис. 22. а) график изменения координаты θ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты θ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} на промежутке от 0 до 0,6 секунд



а)

б)

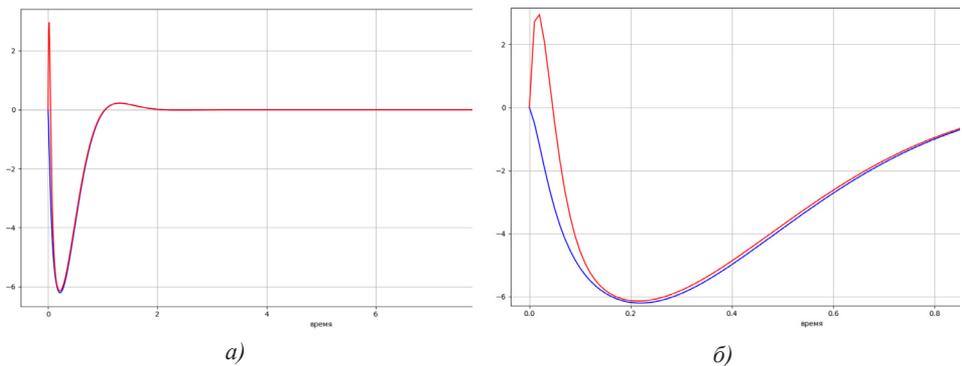
Рис. 23. а) график изменения координаты θ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты θ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} на промежутке от 0 до 0,8 секунд



а)

б)

Рис. 24. а) график изменения координаты ψ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты ψ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} на промежутке от 0 до 0,7 секунд



а)

б)

Рис. 25. а) график изменения координаты $\dot{\psi}$ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты $\dot{\psi}$ вектора состояния x и вектора оценивания \hat{x} на промежутке от 0 до 1,1 секунд

Приведенные результаты моделирования свидетельствуют о том, что ошибка оценивания координат вектора состояния стремится к нулю, а регулятор, использующий вместо вектора состояния его оценку, порождает желаемую структуру переходных процессов в замкнутой системе.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен алгоритм приближенного синтеза систем совместного оценивания и управления на основе гипотезы о выполнении принципа разделения и применении уравнений Риккати с матрицами, зависящими от вектора состояния объекта и наблюдателя.

Литература

1. Пanteleev A.V., Бортаковский А.С. Теория управления в примерах и задачах. М.: ИНФРА-М, 2016.
2. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
3. Давтян Л.Г., Пanteleev A.V. Метод параметрической оптимизации нелинейных непрерывных систем совместного оценивания и управления // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2019. № 3. С. 34–47.
4. Пanteleev A.V., Скавинская Д.В. Метаэвристические алгоритмы глобальной оптимизации. – М.: Вузовская книга, 2019.
5. Wernli A., Cook G. Suboptimal control for the nonlinear quadratic regulator problem // Automatica. 1975. Vol. 11. № 1. P. 75–84.
6. Qu Z., Cloutier J.R., Mracek C.P. A new sub-optimal nonlinear control design technique-SDARE / In Proceedings of the 13th IFAC World Congress, 1996, San Francisco, USA. P. 365–370.
7. Cloutier J.R., D'Souza C.N., Mracek C.P. Nonlinear regulation and nonlinear H ∞ control via the state-dependent Riccati equation technique: Part 1, theory. In Proceedings of the First International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace, Daytona Beach, FL, USA, 9–11 May 1996; Embry-Riddle Aeronautical Univ. Press: Daytona Beach, FL, USA, 1996. P. 117–130.
8. Cimen T. Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the state-dependent Riccati equation (SDRE) method // Annual Reviews in Control. 2010. Vol. 34. № 1. P. 32–51.
9. Cimen T. Survey of state-dependent Riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2012. Vol. 35. № 4. P. 1025–1047.
10. Haessig D., Friedland B. State dependent differential Riccati equation for nonlinear estimation and control / In Proceedings of the 15th IFAC Triennial World Congress, Barcelona, Spain, 2002. [Online], Available: <http://www.nt.ntnu.no/users/skoge/>
11. Nekoo C.R. Tutorial and Review on the State-dependent Riccati Equation // Journal of Applied Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 8. № 2. P. 109–166.
12. Panteleev A.V., Khvoshnyanskaya E.A. Robust estimation of state vector coordinates in the controlled airplane motion problem // Aerospace Systems. 2024. Vol. 7. № 1. P. 167–173. DOI: 10.1007/s42401-023-00224-7
13. Beikzadeh H., Taghirad H.D. Nonlinear sensorless speed control of PM synchronous motor via an SDRE observer-controller combination / In Proceedings of the 4th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications, IEEE, Xi'an, China, 2009. P. 3570–3575.
14. Beikzadeh H., Taghirad H.D. Exponential nonlinear observer based on the differential state-dependent Riccati equation // International Journal of Automation and Computing. 2012. Vol. 9. № 4. P. 358–368. DOI: 10.1007/s11633-012-0656-y



15. *Stepien S., Superczynska P.* Modified infinite-time state-dependent Riccati equation method for nonlinear affine systems: quadrotor control // *Appl. Sci.* 2021. Vol. 11. 10714. <https://doi.org/10.3390/app112210714>
16. *Киреев В.И.* Численные методы в примерах и задачах / В.И. Киреев, А.В. Пантелеев. – 4-е, Исправленное. Санкт-Петербург: Издательство Лань, 2015.



Approximate Method for Synthesizing Continuous Joint Estimation and Control Systems Via the State-Dependent Riccati Equation Technique

Andrei V. Panteleev*

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>

e-mail: avpanteleev@inbox.ru

Elizaveta A. Khvoshnyanskaya**

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-6901-8720>

e-mail: Liza190401@mail.ru

The problem of approximate synthesis of a closed loop nonlinear continuous system of joint estimation and control is considered. An approach is used based on the application of the idea of the separation theorem for linear dynamical systems. Using the factorization operation, a nonlinear system is transformed into a structure similar to a linear system, and algorithms for synthesizing an optimal linear controller and state observer are applied to the transformed system, a feature of which is the dependence of the matrices included in the corresponding Riccati equations on the state vector. An example of the synthesis of a state observer and a controller is given, demonstrating the application of the proposed algorithm.

Keywords: optimal linear controller, state observer, separation principle, state-dependent Riccati equation, nonlinear dynamical system.

For citation:

Panteleev A.V., Khvoshnyanskaya E.A. Approximate Method for Synthesizing Continuous Joint Estimation and Control Systems Via the State-Dependent Riccati Equation Technique. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 3, pp. 41–62. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140303> (In Russ., abstr. in Engl.).

***Andrei V. Panteleev**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Mathematics and Cybernetics, Institute “Computer Science and Applied Mathematics”, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: avpanteleev@inbox.ru

****Elizaveta A. Khvoshnyanskaya**, Master’s Degree Student of the Institute “Computer Science and Applied Mathematics”, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-6901-8720>, e-mail: Liza190401@mail.ru



References

1. Panteleev A.V., Bortakovskij A.S. *Teoriya upravleniya v primerah i zadachah*. M.: INFRA–M, 2016. (In Russ.)
2. Kwakernaak H., Sivan R. *Linear Optimal Control Systems*. NY., Wiley-Interscience. 1972.
3. Davtyan L.G., Panteleev A.V. Parametric optimization method for nonlinear continuous systems of joint estimation and control. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2019. Vol. 58, no. 3, pp. 360–373. DOI:10.1134/S1064230719030079
4. Panteleev A.V., Skavinskaya D.V. *Metaevristicheskie algoritmy global'noj optimizacii*. M.: Vuzovskaya kniga, 2019. (In Russ.)
5. Wernli A., Cook G. Suboptimal control for the nonlinear quadratic regulator problem. 1975, *Automatica*. Vol. 11, no. 1, pp. 75–84.
6. Qu Z., Cloutier J.R., Mracek C.P. A new sub-optimal nonlinear control design technique-SDARE / In *Proceedings of the 13th IFAC World Congress*, San Francisco, USA, pp. 365–370, 1996.
7. Cloutier J.R., D'Souza C.N.; Mracek C.P. Nonlinear regulation and nonlinear HI control via the state-dependent Riccati equation technique: Part 1, theory. In *Proceedings of the First International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace*, Daytona Beach, FL, USA, 9–11 May 1996; Embry-Riddle Aeronautical Univ. Press: Daytona Beach, FL, USA, 1996; pp. 117–130.
8. Cimen T. Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the state-dependent Riccati equation (SDRE) method. *Annual Reviews in Control*, 2010. Vol. 34, no. 1, pp. 32–51.
9. Cimen T. Survey of state-dependent Riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2012. Vol. 35, no. 4, pp. 1025–1047.
10. Haessig D., Friedland B. State dependent differential Riccati equation for nonlinear estimation and control / In *Proceedings of the 15th IFAC Triennial World Congress*, Barcelona, Spain, 2002. [Online]. Available: <http://www.nt.ntnu.no/users/skoge/>
11. Nekoo C.R. Tutorial and Review on the State-dependent Riccati Equation. *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, 2019. Vol. 8, no. 2, pp. 109–166.
12. Panteleev A.V., Khvoshnyanskaya E.A. Robust estimation of state vector coordinates in the controlled airplane motion problem. *Aerospace Systems*, 2024. Vol. 7, no.1, pp. 167–173. DOI: 10.1007/s42401-023-00224-7
13. Beikzadeh H., Taghirad H.D. Nonlinear sensorless speed control of PM synchronous motor via an SDRE observer-controller combination / In *Proceedings of the 4th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications*, IEEE, Xi'an, China, pp. 3570–3575, 2009.
14. Beikzadeh H., Taghirad H.D. Exponential nonlinear observer based on the differential state-dependent Riccati equation // *International Journal of Automation and Computing*, 2012. Vol. 9, no. 4, pp. 358–368. DOI: 10.1007/s11633-012-0656-y
15. Stepien S., Superczynska P. Modified infinite-time state-dependent Riccati equation method for nonlinear affine systems: quadrotor control. *Appl. Sci.* 2021. Vol. 11, 10714. <https://doi.org/10.3390/app112210714>
16. Kireev V.I., Panteleev A.V. *Chislennyye metody v primerah i zadachah*. M.: izdatel'stvo Lan', 2015. (In Russ.)

УДК 517.977

О субоптимальном решении задачи быстродействия для линейной дискретной системы в случае несимметричных ограничений на управления

*Подгорная В.М.**

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-9956-3002>
e-mail: vita1401@outlook.com

В статье рассматривается линейная дискретная система с ограниченным управлением. Для системы решается задача быстродействия, то есть требуется построить процесс управления, переводящий систему из начального состояния в начало координат за минимальное число шагов. Если множество допустимых значений управления имеет структуру суперэллипса, то задача вычисления оптимального управления может быть сведена к решению системы алгебраических уравнений. Для множеств произвольной структуры разработан метод суперэллипсоидальной аппроксимации, рассмотрен случай несимметричных множеств. Приведены примеры.

Ключевые слова: линейная система управления, задача быстродействия, множества 0-управляемости, принцип максимума, суперэллипс.

Для цитаты:

Подгорная В.М. О субоптимальном решении задачи быстродействия для линейной дискретной системы в случае несимметричных ограничений на управления // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 3. С. 63–86. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140304>

**Подгорная Виолетта Михайловна*, аспирант, ассистент кафедры теории вероятностей и компьютерного моделирования, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВО МАИ (ниу)), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-9956-3002>, e-mail: vita1401@outlook.com



1. ВВЕДЕНИЕ

Дискретный принцип максимума часто используется для решения задач оптимального управления дискретными системами в качестве необходимых, а иногда и достаточных условий оптимальности процесса. В частности, для линейных систем он является необходимым и достаточным условием [2, 11]. Принцип максимума испытывает сложности при рассмотрении вырожденных задач, то есть тех, для которых оптимальное значение достигается во внутренней точке множества достижимости [11], это приводит к вырождению траектории сопряженной системы и, как следствие, к невозможности вычислить оптимальное управление из его соотношений. Одной из таких задач является задача быстродействия, которая характеризуется дискретным критерием качества, то есть числом шагов, необходимым для перевода системы в начало координат, которое не может быть вычислено из дискретного принципа максимума.

Среди актуальных исследований на тему решения задачи быстродействия для линейных дискретных систем можно выделить следующие работы.

В [14] рассматривается смешанный функционал, включающий в том числе и время, но за счет второго слагаемого в функционале не происходит вырождения. В [16] предложен подход к решению задачи быстродействия, основанный на разреженной оптимизации множества состояний, то есть минимизации количества ненулевых элементов из множества состояний. В [18] решается задача управления путем дискретизации по Годунову дифференциального уравнения в частных производных Лайтхилла–Уильямса–Ричардса. С использованием метода дискретных сопряжений результирующая нелинейная задача оптимального управления сводится к системе градиентных вычислений.

Если время вычислено и зафиксировано, то задача обладает вырожденностью с точки зрения построения сопряженной траектории. Поэтому оказывается актуальным исследование различных подходов к регуляризации принципа максимума. В частности, в работе [9, 6] одним из таких методов регуляризации является сужение множества допустимых значений управлений для того, чтобы терминальное состояние оптимальной траектории находилось в граничной точке множества достижимости. Это приводит к возможности составить конструктивные соотношения принципа максимума, из которых может быть построен процесс. Сложностью такого подхода является численное разрешение полученных условий.

В работах [7, 8] рассматривается задача сведения соотношений регуляризованного принципа максимума к системе алгебраических уравнений для суперэллипсоидальной структуры множества допустимых значений управлений при помощи аппроксимационных методов. Суперэллипсы в качестве аппроксимирующих множеств обладают большим числом степеней свободы, чем эллипсы. Хотя существует ряд приложений данного класса множеств в прикладных и теоретических задачах [13, 15, 17], их аппарат на данный момент является плохо исследованным. Данная работа продолжает



результаты [7, 8], расширяя возможности суперэллипсоидальных аппроксимаций за счет выбора центра множества в приложении к решению задачи быстродействия.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Будем полагать, что фазовое пространство является евклидовым пространством \mathbb{R}^n со скалярным произведением, определяемым соотношением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Для произвольного $r \in [1; +\infty)$ введем на \mathbb{R}^n норму

$$x_r = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

При $r = 2$ норма $\|\cdot\|_2$ оказывается согласованной со скалярным произведением. Значение $r = 1$ с точки зрения теории является допустимым, но в рамках данной статьи рассматриваться не будет, что позволяет определить число $q > 1$ как двойственное по Гельдеру числу r :

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1.$$

Для произвольных множеств $\mathcal{X}, \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ и матрицы $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ через $\mathcal{X} + \mathcal{U}$ будем обозначать сумму по Минковскому [12, § 3 гл. I]

$$\mathcal{X} + \mathcal{U} = \{x + u : x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}\},$$

а через $D\mathcal{U}$ – образ множества \mathcal{U} при воздействии на него отображения D

$$D\mathcal{U} = \{Du : u \in \mathcal{U}\}.$$

Через $\partial\mathcal{U}$ и $\text{int}\mathcal{U}$ обозначим множества граничных и внутренних точек \mathcal{U} соответственно. Под $\text{cone}\{\mathcal{U}\}$ будем понимать коническую оболочку множества \mathcal{U} [12, § 2 гл. I].

Если множество $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ является выпуклым компактом, то для произвольной точки $u \in \mathcal{U}$ через $\mathcal{N}(u, \mathcal{U})$ обозначим нормальный конус множества \mathcal{U} в точке u [12, § 2 гл. I]:

$$\mathcal{N}(u, \mathcal{U}) = \left\{ p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : (p, u) = \max_{\tilde{u} \in \mathcal{U}} (p, \tilde{u}) \right\}.$$

Элементы нормального конуса $\mathcal{N}(u, \mathcal{U})$ называются векторами, опорными к \mathcal{U} в точке u . Заметим, что по построению $\mathcal{N}(u, \mathcal{U}) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда



$u \in \text{int } \mathcal{U}$. Если также верно включение $0 \in \text{int } \mathcal{U}$, то \mathcal{U} будем называть выпуклым телом [10, раздел 3 § 1 гл IV] и для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ введем функционал Минковского [10, раздел 3 § 2 гл. III] или калибровочную функцию [12, § 4 гл. I]:

$$M(x, \mathcal{U}) = \inf \{t > 0 : x \in t\mathcal{U}\} = \inf \left\{ t > 0 : \frac{x}{t} \in \mathcal{U} \right\}.$$

Под строго выпуклым множеством $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ будем понимать такое множество, что для любых $u^1, u^2 \in \mathcal{U}, \lambda \in (0; 1)$ верно включение $\lambda u^1 + (1 - \lambda)u^2 \in \text{int } \mathcal{U}$.

Будем называть суперэллипсом или суперэллипсоидальным множеством для некоторых $a_1 > 0, \dots, a_n > 0, r > 1$ множество вида

$$\mathcal{E}_r(a_1, \dots, a_n) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \leq 1 \right\}. \quad (1)$$

Для краткости будем полагать $a = (a_1, \dots, a_n)^T$ и обозначать соответствующий суперэллипс через $\mathcal{E}_r(a)$. Под $\text{diag}(a) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ будем полагать диагональную матрицу, построенную из вектора $a \in \mathbb{R}^n$:

$$\text{diag}(a) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается линейная дискретная система с ограниченным управлением (A, \mathcal{U}) :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + u(k), \\ x(0) &= x_0, \quad u(k) \in \mathcal{U}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $u(k) \in \mathbb{R}^n$ – управляющее воздействие, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица системы, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – множество допустимых значений управлений. Предполагается, что $\det A \neq 0$, \mathcal{U} – выпуклый компакт, $0 \in \text{int } \mathcal{U}$.

Для системы (2) решается задача быстродействия, т.е. требуется перевести систему (A, \mathcal{U}) из заданного начального состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в начало координат за минимальное число шагов N_{\min} :

$$N_{\min} = \min \{N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \exists u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = 0\}.$$

Процесс управления $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$, удовлетворяющий условию $x^*(N_{\min}) = 0$, будем называть оптимальным. Предполагается, что задача быстродействия для системы (A, \mathcal{U}) разрешима, т.е. $N_{\min} < \infty$. Подробно вопросы разрешимости задачи быстродействия для системы (2) рассмотрены в [1].

Построение оптимальных по быстродействию процессов сильно связано с аппаратом множеств 0-управляемости [5, 9].

Для произвольного $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ обозначим через $\mathcal{X}(N) \subset \mathbb{R}^n$ множество 0-управляемости системы (2) за N шагов, т.е. множество тех начальных состояний, из которых систему (2) возможно перевести в 0 за N шагов посредством выбора допустимых управляющих воздействий:

$$\mathcal{X}(N) = \begin{cases} \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = 0\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Тогда согласно определению N_{\min} также справедливо представление:

$$N_{\min} = \min \{N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x_0 \in \mathcal{X}(N)\}. \quad (4)$$

При этом управление, как продемонстрировано в [4, 6], оптимально тогда и только тогда, когда для всех $k = 0, N_{\min} - 1$ верно включение

$$x^*(k+1) = Ax^*(k) + u^*(k) \in \mathcal{X}(N_{\min} - k - 1).$$

В [9] получен ряд результатов для задачи быстродействия, которые можно представить в форме принципа максимума для строго выпуклого \mathcal{U} .

Теорема 1. ([9, теоремы 1–2]). Пусть \dots – строго выпуклое и компактное множество, $0 \in \text{int } \mathcal{U}$, $\det A \neq 0$, класс множеств $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется согласно (3), процесс управления $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$ и траектория сопряженной системы $\{\psi(k)\}_{k=1}^{N_{\min}-1}$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} x^*(k+1) &= Ax^*(k) + u^*(k), \\ u^*(k) &= \alpha \arg \max_{u \in \mathcal{U}} \left((A^{-1})^T \psi(k), u \right), \\ \psi(k+1) &= (A^{-1})^T \psi(k), \\ x^*(0) &= x_0, \\ -\psi(0) &\in \mathcal{N}(x_0, \alpha \mathcal{X}(N_{\min})), \\ \alpha &= M(x_0, \mathcal{X}(N_{\min})). \end{aligned}$$

Тогда

$\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$ – оптимальный по быстродействию процесс системы (A, \mathcal{U}) ;



если $\alpha = 1$, то оптимальный процесс единственный;

$$-\psi(k) \in \mathcal{N}(x^*(k), \alpha \mathcal{X}(N_{\min} - k)), k = \overline{0, N_{\min} - 1}.$$

С вычислительной точки зрения вопрос применения теоремы 1 сводится к определению α и $\psi(0)$ из условий

$$\begin{aligned} -\psi(0) &\in \mathcal{N}(x_0, \alpha \mathcal{X}(N_{\min})), \\ \alpha &= M(x_0, \mathcal{X}(N_{\min})), \end{aligned} \quad (5)$$

что в случае произвольного выпуклого тела \mathcal{U} может быть нетривиальной задачей.

В [8] представлен метод формирования субоптимального управления, основанный на использовании аппроксимации \mathcal{U} множеством вида $\hat{\mathcal{U}} = B\mathcal{E}_r(a)$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. При этом в случае, когда верно равенство $\mathcal{U} = B\mathcal{E}_r(a)$, условия (5) удается свести к системе алгебраических уравнений относительно $\psi(0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $\alpha > 0$. Однако эффективность данного подхода снижается в случае несимметричных относительно начала координат множеств \mathcal{U} , поскольку точность аппроксимации, в роли которой выступает мера Лебега разности двух множеств $\mu(\mathcal{U} \setminus \hat{\mathcal{U}})$, может оказаться невысокой.

В этой статье предлагается усилить результаты, полученные в [8], рассмотрев более общий подход к аппроксимации:

$$\hat{\mathcal{U}} = B(\mathcal{E}_r(a) + u_0), u_0 \in \text{int } \mathcal{E}_r(a). \quad (6)$$

В частности, необходимо построить эквивалентную условиям (5) систему алгебраических уравнений для частного случая (6), сформулировать основные условия ее разрешимости численно, усилить существующий метод суперэллипсоидальной аппроксимации за счет выбора точки u_0 и исследовать его на оптимальность.

4. СВЕДЕНИЕ УСЛОВИЙ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА К СИСТЕМЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Покажем, что условия (5) можно свести к эквивалентной системе алгебраических уравнений. Для этого приведем аналитическое описание множеств 0-управляемости и некоторые свойства строго выпуклых и суперэллипсоидальных множеств.

Лемма 1. [9, лемма 1]. Пусть $\det A \neq 0$, класс множеств $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется соотношениями (3). Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ верно представление

$$\mathcal{X}(N) = -\sum_{k=1}^N A^{-k} \mathcal{U}.$$

Лемма 2. [6, лемма 3]. Пусть $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – строго выпуклый компакт, $0 \in \text{int } \mathcal{U}$. Тогда для любых различных $u^1, u^2 \in \mathcal{U}$ верно

$$\mathcal{N}(u^1, \mathcal{U}) \cap \mathcal{N}(u^2, \mathcal{U}) = \emptyset.$$

Также из [6, леммы 5, 6] вытекает следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть $\mathcal{U}, \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклые компакты, $u \in \mathcal{U}$, $x \in \mathcal{X}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det A \neq 0$.

Тогда

$$\mathcal{N}(u+x, \mathcal{U}+\mathcal{X}) = \mathcal{N}(u, \mathcal{U}) \cap \mathcal{N}(x, \mathcal{X});$$

$$\mathcal{N}(Ax, A\mathcal{X}) = (A^{-1})^T \mathcal{N}(x, \mathcal{X}).$$

Лемма 3 определяет преобразование нормального конуса выпуклых множеств при невырожденном линейном преобразовании и сложении по Минковскому. С учетом леммы 1 это позволяет описать произвольный нормальный конус любого множества 0-управляемости в терминах нормальных конусов множества \mathcal{U} или $\mathcal{E}_r(a_1, \dots, a_n)$ в случае (6). С другой стороны, лемма 2 устанавливает взаимнооднозначное соответствие между опорной точкой и ее нормальным конусом для строго выпуклого множества. Если данную зависимость описать в явном виде, то можно получить алгебраические уравнения, эквивалентные условиям (5).

Введем для произвольного $r > 1$ биективный оператор $I_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, действующий по правилу

$$I_r(x) = (\text{sign}(x_1)|x_1|^{r-1}, \dots, \text{sign}(x_n)|x_n|^{r-1})^T.$$

Также введем обозначение опорной точки для выпуклого $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ и $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$x_{\mathcal{U}}^*(p) = \arg \max_{x \in \mathcal{U}} (p, x).$$

Теорема 2. Пусть $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – строго выпуклое и компактное множество, $0 \in \text{int } \mathcal{U}$, $\det A \neq 0$, класс множеств $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется согласно (3). Тогда условия (5) эквивалентны равенству

$$\frac{x_0}{\alpha} = - \sum_{k=1}^{N_{\min}} A^{-k} x_{\mathcal{U}}^* \left((A^{-k})^T \psi(0) \right).$$

Доказательство. Поскольку $x_0 \neq 0$, согласно определению функционала Минковского $\alpha > 0$ и верно включение $\frac{x_0}{\alpha} \in \partial \mathcal{X}(N_{\min})$. С учетом леммы 1 справедливо

$$\frac{x_0}{\alpha} \in \partial \left(- \sum_{k=1}^{N_{\min}} A^{-k} \mathcal{U} \right).$$

Тогда в силу определения алгебраической суммы множеств найдутся такие $x^1 \in -A^{-1}\mathcal{U}, \dots, x^{N_{\min}} \in -A^{-N_{\min}}\mathcal{U}$, что



$$\frac{x_0}{\alpha} = \sum_{k=1}^{N_{\min}} x^k.$$

С учетом пункта 1 леммы 3

$$\begin{aligned} -\psi(0) &\in \mathcal{N}\left(\frac{x_0}{\alpha}, \mathcal{X}(N_{\min})\right) = \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^{N_{\min}} x^k, -\sum_{k=1}^{N_{\min}} A^{-k} \mathcal{U}\right) = \bigcap_{k=1}^{N_{\min}} \mathcal{N}(x^k, -A^{-k} \mathcal{U}). \\ x^k &= x_{-A^{-k}\mathcal{U}}^*(-\psi(0)) = \arg \max_{u \in -A^{-k}\mathcal{U}} (-\psi(0), u) = -A^{-k} \arg \max_{\tilde{u} \in \mathcal{U}} (-\psi(0), -A^{-k} \tilde{u}) = \\ &= -A^{-k} \arg \max_{\tilde{u} \in \mathcal{U}} \left((A^{-k})^T \psi(0), \tilde{u} \right) = -A^{-k} x_{\mathcal{U}}^* \left((A^{-k})^T \psi(0) \right). \end{aligned}$$

Таким образом

$$\frac{x_0}{\alpha} = \sum_{k=1}^{N_{\min}} x^k = -\sum_{k=1}^{N_{\min}} A^{-k} x_{\mathcal{U}}^* \left((A^{-k})^T \psi(0) \right).$$

Теорема 2 полностью доказана.

5. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ СУПЕРЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

Рассмотрим частный случай (6), который характерен тем, что опорную точку для множества \mathcal{U} можно построить в явном виде.

Лемма 4. Пусть $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – строго выпуклое и компактное множество, $u_0 \in \mathbb{R}^n$.

Тогда

1) для любого $u \in \mathcal{U} + u_0$

$$\mathcal{N}(u, \mathcal{U} + u_0) = \mathcal{N}(u - u_0, \mathcal{U});$$

2) для любого $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ существует единственная опорная точка

$$x_{\mathcal{U}+u_0}^*(p) = u_0 + x_{\mathcal{U}}^*(p).$$

Доказательство. Из определения нормального конуса следует пункт 1. Рассмотрим цепочку равенств

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{U}+u_0}^*(p) &= \arg \max_{x \in \mathcal{U}+u_0} (p, x) = \arg \max_{\tilde{x} \in \mathcal{U}} (p, \tilde{x} + u_0) + u_0 = \\ &= u_0 + \arg \max_{\tilde{x} \in \mathcal{U}} (p, \tilde{x}) = u_0 + x_{\mathcal{U}}^*(p). \end{aligned}$$

Пункт 2 доказан.

Учтем известное представление нормального конуса и опорной точки для суперэллипсоидального множества и построим их описание для случая (6).

Лемма 5. [8, лемма 5]. Пусть множество $\mathcal{U} = D\mathcal{E}_r(a)$, где $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1), $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det A \neq 0$. Тогда

1) для любого $u \in \partial\mathcal{U}$

$$\mathcal{N}(u, \mathcal{U}) = \left\{ \gamma (D^{-1})^T \text{diag}(a)^{-1} I_r \left(\text{diag}(a)^{-1} D^{-1} u \right) \in \mathbb{R}^n : \gamma > 0 \right\};$$

2) для любого $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ существует единственная опорная точка

$$x_u^*(p) = \frac{D \text{diag}(a) I_q \left(\text{diag}(a) D^T p \right)}{\text{diag}(a) D^T p_q^{q-1}}.$$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{U} = D(\mathcal{E}_r(a) + u_0)$, где $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1), $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det A \neq 0$. Тогда

1) для любого $u \in \partial\mathcal{U}$

$$\mathcal{N}(u, \mathcal{U}) = \left\{ \gamma (D^{-1})^T \text{diag}(a)^{-1} I_r \left(\text{diag}(a)^{-1} D^{-1} (u - u_0) \right) \in \mathbb{R}^n : \gamma > 0 \right\};$$

2) для любого $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ существует единственная опорная точка

$$x_u^*(p) = \frac{D \text{diag}(a) I_q \left(\text{diag}(a) D^T p \right)}{\text{diag}(a) D^T p_q^{q-1}} + D u_0.$$

Доказательство. Согласно определению нормального конуса и лемме 4 пункту 1 выполняется включение

$$\begin{aligned} p \in \mathcal{N}(u, D(\mathcal{E}_r(a) + u_0)) &\Leftrightarrow D^T p \in \mathcal{N}(D^{-1}(u - u_0), \mathcal{E}_r(a)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow p \in (D^T)^{-1} \mathcal{N}(D^{-1}(u - u_0), \mathcal{E}_r(a)). \end{aligned}$$

Пункт 2 следует из пункта 2 леммы 4 и пункта 2 леммы 5:

$$\begin{aligned} x_u^*(p) &= \arg \max_{x \in D(\mathcal{E}_r(a) + u_0)} (p, x) = \arg \max_{x \in D\mathcal{E}_r(a) + D u_0} (p, x) = \\ &= \arg \max_{x \in D\mathcal{E}_r(a)} (p, x) + D u_0 = \frac{D \text{diag}(a) I_q \left(\text{diag}(a) D^T p \right)}{\text{diag}(a) D^T p_q^{q-1}} + D u_0. \end{aligned}$$

Следствие 1 доказано

Следствие 1 в случае (6) позволяет вычислить оптимальное управление согласно теореме 1 при выборе $D = B$, а в сочетании с теоремой 2 делает возможным свести условия (5) к эквивалентным алгебраическим уравнениям.



Теорема 3. Пусть \mathcal{U} определяется согласно (6), $x_0 \neq 0$, $\psi(0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\alpha > 0$. В таком случае $\psi(0)$ и α удовлетворяет условиям (5) тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$\frac{x_0}{\alpha} = - \sum_{k=1}^{N_{\min}} \left(A^{-k} B u_0 + \frac{A^{-k} B \text{diag}(a) I_q \left(\text{diag}(a) B^T \left((A^{-k})^T \psi(0) \right) \right)}{\text{diag}(a) B^T \left((A^{-k})^T \psi(0) \right)_q^{q-1}} \right).$$

Доказательство. Доказательство теоремы 3 следует непосредственно при подстановке в соотношение, полученное в теореме 2, выражения для опорной точки из пункт 2 следствия 1.

Система уравнений, представленная в теореме 3, имеет не единственное решение, поскольку правая часть инвариантна к домножению вектора $\psi(0)$ на любое положительное число. Для использования численных методов можно предположить модификацию данной системы, которая имеет единственное решение.

Следствие 2. Пусть \mathcal{U} определяется согласно (6), $\psi(0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\alpha > 0$. Тогда для любого $x_0 \neq 0$ существует единственное решение системы уравнений

$$\begin{cases} -x_0 = \alpha \sum_{k=1}^{N_{\min}} \frac{A^{-k} B \text{diag}(a) I_q \left(\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0) \right)}{\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0)_q^{q-1}} + A^{-k} B u_0, \\ (\psi(0), \psi(0)) = 1, \end{cases}$$

которое также удовлетворяет условиям (5).

Теорема 3 и следствие 2 в совокупности с теоремой 1 позволяют полностью решить задачу быстродействия для линейной дискретной системы в случае суперэллипсоидальной структуры множества допустимых значений управлений (6). Разрешение условий (5) согласно следствию 2 эквивалентно численному решению системы алгебраических уравнений. Одновременно оптимальный процесс и траектория сопряженной системы могут быть вычислены по рекуррентным соотношениям, представленным в теореме 1. Оптимальное управление явным образом определяется пунктом 2 следствия 1.

6. ВНУТРЕННЯЯ СУПЕРЭЛЛИПСОИДАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА

Результаты [7, 8] расширены на случай, когда множество допустимых значений управлений несимметрично. Имеет смысл рассмотреть сдвиг множества для лучшей аппроксимации, то есть подобрать центр аппроксимирующего множества.



Рассмотрим два различных способа нахождения u_0 – центр масс u_{01} и Чебышевский центр u_{02} . Так же в работе рассмотрен случай центра суперэллипса в начале координат u_{00} .

Центром масс называется геометрическая точка, положение которой определяется распределением массы в теле [4, § 10 гл. IV]. Он может быть вычислен путем численного интегрирования:

$$u_{01} = \left(\frac{I_{x_1}}{S}, \frac{I_{x_2}}{S}, \dots, \frac{I_{x_n}}{S} \right)^T,$$

где

$$I_{x_i} = \int_{\mathcal{U}} x_i dx_1 \dots dx_n, \quad i = \overline{1, n}, \quad S = \int_{\mathcal{U}} dx_1 \dots dx_n.$$

Чебышевский центр ограниченного выпуклого множества является центром описанного шара минимального радиуса [3]. Для случая, когда множество допустимых значений управлений является многогранником, Чебышевский центр является решением следующей задачи оптимизации

$$x_0 = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ R > 0 : \max_{u \in \mathcal{U}} x - u \leq R \right\}.$$

После определения центра суперэллипсоидального множества и его сдвига, задача сводится к уже рассмотренному в [7, 8].

Рассмотрим примеры субоптимального решения задачи быстрогодействия с помощью суперэллипсоидальной аппроксимации для нескольких различных систем, где множество \mathcal{U} является выпуклым несимметричным многогранником. В каждом примере рассматриваются 3 случая – множество с центром в начале координат, со сдвигом на центр масс и со сдвигом на Чебышевский центр.

Пример 1. Для системы с исходными параметрами

$$A = \begin{pmatrix} -0,10 & -1,36 \\ 0,55 & -0,65 \end{pmatrix}, \mathcal{U} = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\},$$

$$x_0 = (10, 30)^T$$

вычислены центры суперэллипса: центр масс $u_{01} = (3,59 \quad 1,40)^T$ и Чебышевский центр $u_{02} = (3,67 \quad 1,33)^T$.

Для 3 случаев центра суперэллипса определены тензоры инерции и вычислены матрицы ориентации суперэллипса:

$$J_{01} = \begin{pmatrix} 815,08 & -460,15 \\ -460,15 & 1871,61 \end{pmatrix}, B_{01} = \begin{pmatrix} 0,94 & -0,35 \\ 0,35 & 0,94 \end{pmatrix};$$



$$J_{01} = \begin{pmatrix} 637,74 & -3,81 \\ -3,81 & 696,41 \end{pmatrix}, B_{01} = \begin{pmatrix} 0,99 & -0,06 \\ 0,06 & 0,99 \end{pmatrix};$$

$$J_{02} = \begin{pmatrix} 638,10 & -3,40 \\ -3,40 & 696,96 \end{pmatrix}, B_{02} = \begin{pmatrix} 0,99 & -0,05 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}.$$

Ориентация множества \mathcal{U} при разных центрах множества отражена на рис. 1.

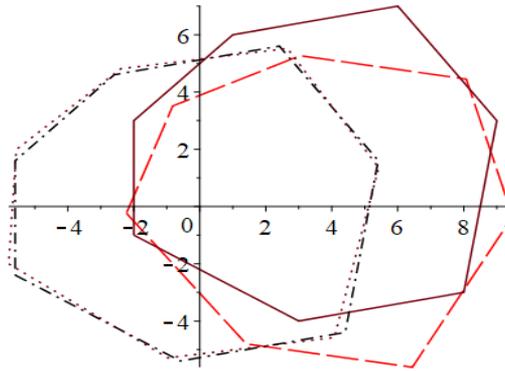


Рис. 1. Исходное множество \mathcal{U} (непрерывной линией), ориентированное $B^{-1}(\mathcal{U} - u_{00})$ (штриховой линией), ориентированное $B^{-1}(\mathcal{U} - u_{01})$ (штрихпунктирной линией), ориентированное $B^{-1}(\mathcal{U} - u_{02})$ (пунктирной линией)

В качестве аппроксимируемого множества рассматриваются ориентированные многогранники $B^{-1}(\mathcal{U} - u_0)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{rot0} &= B^{-1}(\mathcal{U} - u_{00}) = \\ &= \begin{pmatrix} -2,22 & 1,41 & 6,44 & 9,48 & 8,07 & 3,04 & -0,82 \\ -0,24 & -4,79 & -5,61 & -0,34 & 4,45 & 5,26 & 3,51 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{rot1} &= B^{-1}(\mathcal{U} - u_{01}) = \\ &= \begin{pmatrix} -5,74 & -0,94 & 4,11 & 5,49 & 2,76 & -2,02 & -5,34 \\ -2,02 & -5,34 & 4,67 & 1,25 & 5,43 & 4,76 & 1,96 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{rot2} &= B^{-1}(\mathcal{U} - u_{02}) = \\ &= \begin{pmatrix} -5,79 & -0,97 & 4,08 & 5,42 & 2,66 & -2,39 & -5,56 \\ -2,00 & -5,29 & -4,58 & 1,36 & 5,52 & 4,81 & 1,99 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Рассматриваются следующие значения параметра r :

$$r \in \left\{ \frac{6}{5}, \frac{4}{3}, 2, 4, 6 \right\},$$

для которых при решении оптимизационных задач были получены оптимальные значения параметров суперэллипсоидальной аппроксимации согласно [7, 8]:

Множество без сдвига:

$$r = \frac{6}{5}; a_1^* = 2,13; a_2^* = 2,72.$$

Множество со сдвигом на центр масс:

$$r = 2; a_1^* = 5,08; a_2^* = 4,86.$$

Множество со сдвигом на Чебышевский центр:

$$r = 2; a_1^* = 4,99; a_2^* = 4,88.$$

Результаты аппроксимации можно увидеть на рис. 2.

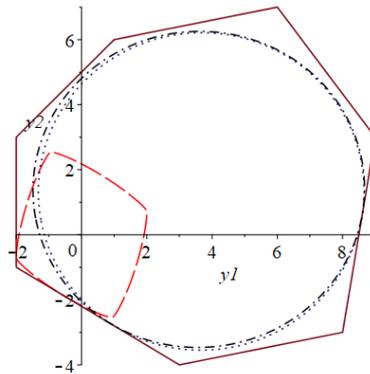


Рис. 2. Исходное множество \mathcal{U} (непрерывной линией), ориентированное $\mathbf{B}^{-1}(\mathcal{E}_6(\mathbf{a}) - \mathbf{u}_{00})$ (штриховой линией), ориентированное $\mathbf{B}^{-1}(\mathcal{E}_2(\mathbf{a}) - \mathbf{u}_{01})$ (штрихпунктирной линией), ориентированное $\mathbf{B}^{-1}(\mathcal{E}_2(\mathbf{a}) - \mathbf{u}_{02})$ (пунктирной линией)

По рисунку видно, что суперэллипсы со сдвигом в центр масс и Чебышевский центр имеют большую площадь по сравнению с суперэллипсом без сдвига.

В ходе решения системы алгебраических уравнений для вычисления $\psi(0), \alpha$, определенной согласно следствию 2, были получены следующие численные значения параметров:

Множество без сдвига:



$$\alpha = 0,97; \psi_{01} = 0,05; \psi_{02} = -0,99; N_{\min} = 9.$$

Множество со сдвигом на центр масс:

$$\alpha = 0,95; \psi_{01} = 0,16; \psi_{02} = -0,99; N_{\min} = 5.$$

Множество со сдвигом на Чебышевский центр:

$$\alpha = 0,96; \psi_{01} = 0,17; \psi_{02} = -0,99; N_{\min} = 5.$$

Оптимальные траектории, построенные в соответствии с теоремой 2, представлены в табл. 1–4.

Таблица 1

Оптимальная траектория и оптимальное управление для линейной дискретной системы при $N_{\min} = 9$ (множество без сдвига) ($k=0\dots6$)

k	0	1	2	3	4	5	6
$x^*(k)$	10	-40,007	21,210	13,454	-21,438	5,132	9,985
	30	-13,241	-10,795	16,102	-2,839	-7,398	5,288
$\theta(k)$	0,053	0,630	-0,648	-0,178	0,965	-0,672	-0,569
	-0,998	0,214	1,034	-1,221	-0,146	1,644	-1,338
$u^*(k)$	1,928	-0,921	0,887	1,893	-0,921	0,416	1,067
	0,722	2,459	-2,457	0,243	2,459	-2,301	-2,254

Таблица 2

Оптимальная траектория и оптимальное управление для линейной дискретной системы при $N_{\min} = 9$ (множество без сдвига) ($k=7\dots9$)

k	7	8	9
$x^*(k)$	-7,162	0,121	0
	-0,230	-1,298	0
$\theta(k)$	1,357	-0,551	-1,165
	-0,791	2,384	-1,228
$u^*(k)$	-0,921	-1,758	
	2,460	-0,906	



Таблица 3

Оптимальная траектория и оптимальное управление для линейной дискретной системы при $N_{\min} = 5$ (множество со сдвигом на центр масс)

k	0	1	2	3	4	5
$x^*(k)$	10	-34,590	17,336	11,963	-8,158	0
	30	-9,923	-7,621	11,097	1,378	0
$\theta(k)$	0,164	0,533	-0,695	-0,014	0,872	-0,788
	-0,986	0,400	0,847	-1,278	0,136	1,452
$u^*(k)$	7,345	0,282	3,331	8,195	1,049	
	4,040	4,826	-3,294	2,035	5,343	

Таблица 4

Оптимальная траектория и оптимальное управление для линейной дискретной системы при $N_{\min} = 5$ (множество со сдвигом на Чебышевский центр)

k	0	1	2	3	4	5
$x^*(k)$	10	-34,589	17,431	12,091	-8,070	0
	30	-9,884	-7,629	11,051	1,471	0
$\theta(k)$	0,166	0,530	-0,696	-0,010	0,870	-0,791
	-0,985	0,404	0,842	-1,279	0,142	1,447
$u^*(k)$	7,346	0,430	3,458	8,232	1,186	
	4,079	4,843	-3,397	2,028	5,355	

Поскольку множество управлений в случаях с центром масс и с Чебышевским центром шире по сравнению со множеством без сдвига, начала координат удается достигнуть быстрее.

Пример 2. Система имеет следующие исходные данные

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \mathcal{U} = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0,25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,25 \\ 3 \end{pmatrix} \right\},$$

$$x_0 = (-3,5)^T.$$

Вычислен центр суперэллипса – центр масс $u_{01} = (-0,245 \quad -0,245)^T$, Чебышевский центр в данном случае совпадает с началом координат $u_{00} = u_{02} = (0 \quad 0)^T$.

Тензоры инерции, для которых вычисляются матрицы ориентации суперэллипса, выглядят следующим образом:



$$J_{01} = \begin{pmatrix} 88,06 & 17,55 \\ 17,55 & 88,06 \end{pmatrix}, B_{01} = \begin{pmatrix} 0,71 & 0,71 \\ -0,71 & 0,71 \end{pmatrix};$$

$$J_{02} = \begin{pmatrix} 90,11 & 15,64 \\ 15,64 & 90,11 \end{pmatrix}, B_{02} = \begin{pmatrix} 0,71 & 0,71 \\ -0,71 & 0,71 \end{pmatrix}.$$

Процедура ориентации множества \mathcal{U} показана на рис. 3.

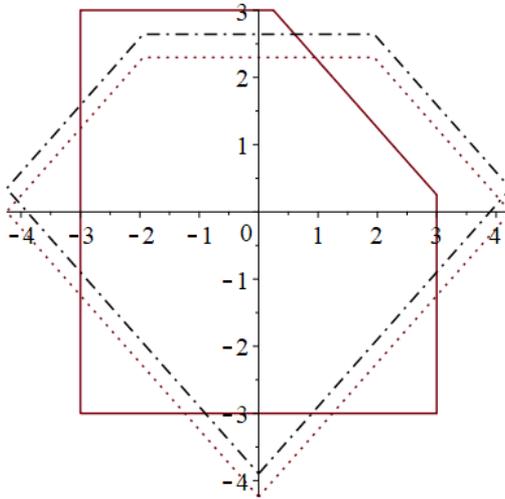


Рис. 3. Исходное множество \mathcal{U} (непрерывной линией), ориентированное $B^{-1}(\mathcal{U} - u_{01})$ (штрихпунктирной линией), ориентированное $B^{-1}(\mathcal{U} - u_{02})$ (пунктирной линией)

В качестве аппроксимируемого множества рассматриваются ориентированные многогранники $B^{-1}(\mathcal{U} - u_0)$:

$$\mathcal{U}_{rot1} = B^{-1}(\mathcal{U} - u_{01}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 4,24 & 1,95 & -1,95 & -4,24 \\ -3,90 & 0,35 & 2,64 & 2,64 & 0,35 \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{U}_{rot2} = B^{-1}(\mathcal{U} - u_{02}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 4,24 & 1,95 & -1,95 & -4,24 \\ -4,24 & 0 & 2,30 & 2,20 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассматриваются следующие значения параметра r :

$$r \in \left\{ \frac{6}{5}, \frac{4}{3}, 2, 4, 6 \right\},$$

для которых при решении оптимизационных задач были получены оптимальные значения параметров суперэллипсоидальной аппроксимации согласно [7, 8]:

Множество со сдвигом на центр масс:

$$r = \frac{4}{3}; a_1^* = 3,67; a_2^* = 2,64.$$

Множество со сдвигом на Чебышевский центр:

$$r = 2; a_1^* = 3,57; a_2^* = 2,30.$$

Результаты аппроксимации можно увидеть на рис. 4.

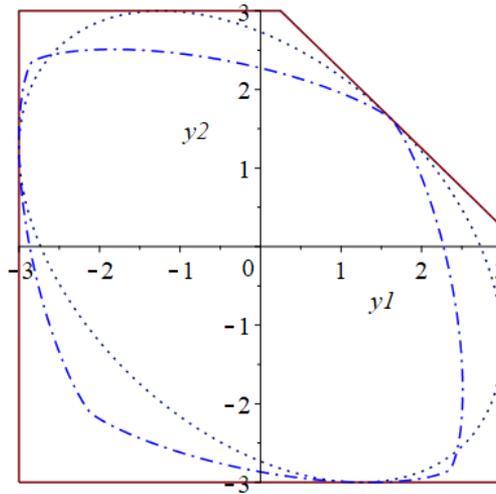


Рис. 4. Исходное множество u (непрерывной линией), ориентированное $\mathbf{B}^{-1}(\mathcal{E}_1(a) - u_{01})$ (штрихпунктирной линией), ориентированное $\mathbf{B}^{-1}(\mathcal{E}_2(a) - u_{02})$ (пунктирной линией)

В ходе решения системы алгебраических уравнений для вычисления $\psi(0), \alpha$, определенной согласно следствию 2, были получены следующие численные значения параметров:

Множество со сдвигом на центр масс:

$$\alpha = 0,98; \psi_{01} = -0,95; \psi_{02} = 0,31; N_{\min} = 6.$$

Множество со сдвигом на Чебышевский центр:

$$\alpha = 0,95; \psi_{01} = 0,99; \psi_{02} = 0,59; N_{\min} = 6.$$



Оптимальные траектории, построенные в соответствии с теоремой 2, представлены в таблицах 5–6.

Таблица 5

**Оптимальная траектория и оптимальное управление
для линейной дискретной системы при $N_{\min} = 6$
(множество со сдвигом на центр масс)**

k	0	1	2	3	4	5	6
$x^*(k)$	-3	0,696	-2,620	1,077	-1,209	0,173	0
	5	-6,483	4,764	-5,713	3,954	-2,675	0
$\theta(k)$	0,989	0,377	0,203	0,058	0,048	0,003	0,015
	0,144	0,233	-0,029	0,087	-0,039	0,042	-0,027
$u^*(k)$	1,696	2,469	1,554	2,348	-1,362	2,328	
	1,516	-2,415	1,672	-2,835	2,488	-2,848	

Таблица 6

**Оптимальная траектория и оптимальное
управление для линейной дискретной системы при $N_{\min} = 6$
(множество со сдвигом на Чебышевский центр)**

k	0	1	2	3	4	5	6
$x^*(k)$	-3	0,862	-2,349	0,988	-1,248	-0,239	0
	5	-6,809	5,824	-5,527	4,040	-2,446	0
$\theta(k)$	0,998	0,352	0,215	0,045	0,056	-0,003	0,020
	0,058	0,293	-0,078	0,123	-0,067	0,063	-0,043
$u^*(k)$	1,862	2,735	-0,137	2,302	-1,304	1,968	
	1,190	-1,846	2,646	-2,475	2,842	-2,685	

Особых отличий в траекториях нет, однако мера суперэллипса со сдвигом на центр масс больше меры суперэллипса со сдвигом на Чебышевский центр (в данном случае совпадает со множеством без сдвига).

Пример 3. В данном примере рассмотрим наибольший по мере суперэллипс и попробуем решить задачу быстродействия.

Система имеет следующие входные данные

$$A = \begin{pmatrix} -0,10 & -1,36 \\ 0,55 & -0,65 \end{pmatrix}, \mathcal{U} = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\},$$

$$x_0 = (10, 30)^T.$$

Вычислены центры суперэллипса: центр масс $u_{01} = (-4, 08 \quad -4, 37)^T$ и Чебышевский центр $u_{02} = (-3, 56 \quad -3, 56)^T$.

Для 3 случаев центра суперэллипса определены тензоры инерции и вычислены матрицы ориентации суперэллипса:

$$J_{01} = \begin{pmatrix} 1355,27 & -1173,08 \\ -1173,08 & 1267,05 \end{pmatrix}, B_{01} = \begin{pmatrix} 0,69 & -0,72 \\ 0,72 & 0,69 \end{pmatrix};$$

$$J_{01} = \begin{pmatrix} 288,10 & -178,37 \\ -178,37 & 339,88 \end{pmatrix}, B_{01} = \begin{pmatrix} 0,76 & -0,65 \\ 0,65 & 0,76 \end{pmatrix};$$

$$J_{02} = \begin{pmatrix} 325,50 & -202,23 \\ -202,23 & 355,08 \end{pmatrix}, B_{02} = \begin{pmatrix} 0,73 & -0,68 \\ 0,68 & 0,73 \end{pmatrix}.$$

Ориентация множества \mathcal{U} при разных центрах множества отражена на рис. 5.

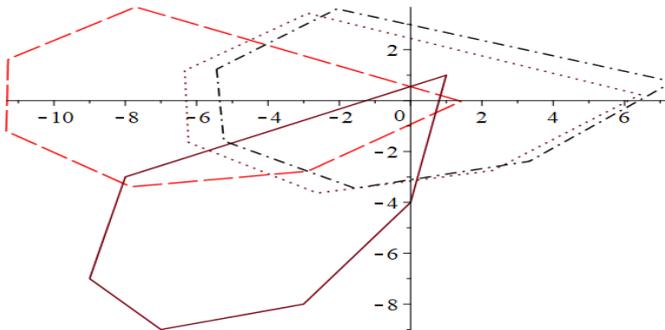


Рис. 5. Исходное множество \mathcal{U} (непрерывной линией), ориентированное $B^{-1}(\mathcal{U} - u_{00})$ (штриховой линией), ориентированное $B^{-1}(\mathcal{U} - u_{01})$ (штрихпунктирной линией), ориентированное $B^{-1}(\mathcal{U} - u_{02})$ (пунктирной линией)

В качестве аппроксимируемого множества рассматриваются ориентированные многогранники $B^{-1}(\mathcal{U} - u_0)$:

$$\mathcal{U}_{rot0} = B^{-1}(\mathcal{U} - u_{00}) =$$



$$= \begin{pmatrix} -11,28 & -11,38 & -7,84 & -2,88 & 1,41 & -7,71 \\ 1,62 & -1,20 & -3,38 & -2,77 & -0,02 & 3,68 \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{U}_{rot1} = B^{-1}(\mathcal{U} - u_{01}) =$$

$$= \begin{pmatrix} -5,44 & -5,23 & -1,55 & 3,32 & 7,35 & -2,06 \\ 1,23 & -1,58 & -3,44 & 2,38 & 0,74 & 3,60 \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{U}_{rot2} = B^{-1}(\mathcal{U} - u_{02}) =$$

$$= \begin{pmatrix} -6,33 & -6,22 & -2,61 & 2,30 & 6,43 & -2,87 \\ 1,18 & -1,64 & -3,63 & -2,74 & 0,23 & 3,43 \end{pmatrix}.$$

Рассматриваются следующие значения параметра r :

$$r \in \left\{ \frac{6}{5}, \frac{4}{3}, 2, 4, 6 \right\},$$

для которых при решении оптимизационных задач были получены оптимальные значения параметров суперэллипсоидальной аппроксимации согласно [7, 8]:

Множество без сдвига:

$$r = \frac{6}{5}; a_1^* = 1,20; a_2^* = 0,48.$$

Множество со сдвигом на центр масс:

$$r = 2; a_1^* = 5,34; a_2^* = 2,49.$$

Множество со сдвигом на Чебышевский центр:

$$r = \frac{6}{5}; a_1^* = 6,09; a_2^* = 2,25.$$

Результаты аппроксимации можно увидеть на рис. 6.

По рисунку видно, что суперэллипсы со сдвигом в центр масс и Чебышевский центр имеют большую площадь по сравнению с суперэллипсом без сдвига. Однако можно заметить, что суперэллипс со сдвигом на центр масс, имеющий наибольшую меру, не включает начало координат, соответственно нарушается условие $0 \in \text{int } \mathcal{U}$, решение задачи быстродействия не может быть вычислено.

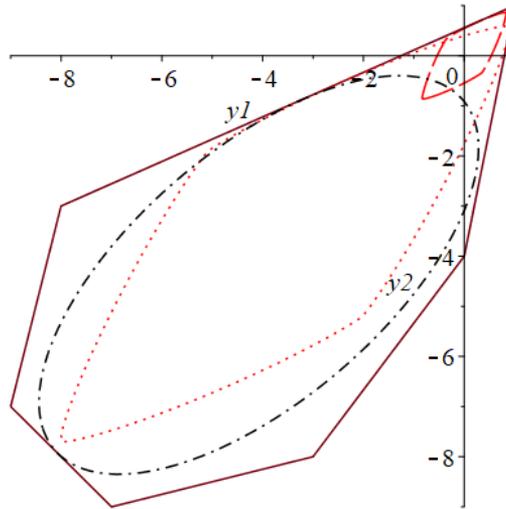


Рис. 6. Исходное множество U (непрерывной линией), ориентированное $B^{-1}(\mathcal{E}_5(a) - u_{00})$ (штриховой линией), ориентированное $B^{-1}(\mathcal{E}_2(a) - u_{01})$ (штрихпунктирной линией), ориентированное $B^{-1}(\mathcal{E}_2(a) - u_{02})$ (пунктирной линией)

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В разделе 2 введены обозначения для дальнейшей работы. В разделе 3 описана постановка задачи быстрогодействия и задачи аппроксимации. В разделе 4 рассматривается приведение сложноразрешаемых условий из принципа максимума к суперэллипсоидальной структуре ограничений, которую можно разрешить аналитически. В разделе 5 представлена внутренняя суперэллипсоидальная аппроксимация выпуклого тела, в частности рассмотрен случай несимметричным множеств, для которых требуется определить центр аппроксимирующего множества. В разделе 6 приведены примеры решения задачи быстрогодействия на основе доказанных утверждений для разных систем со сравнением результатов для различных центров суперэллипса.

Представленные в статье методы могут применяться для численного моделирования и симуляции динамики разнообразных естественных и технических систем. За счет простоты построения оптимальных процессов на основе принципа максимума и формирования программного управления, удастся не только решить задачу быстрогодействия для заданного начального состояния, но и собрать большой объем модельных данных и различных траекторий для дальнейшего анализа системы. В то же время, аппарат суперэллипсоидальных аппроксимаций гарантирует более высокую точность по сравнению с классическими эллипсоидальными методами аппроксимации.



Литература

1. Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н. О методе построения внешних оценок предельного множества управляемости для линейной дискретной системы с ограниченным управлением // *АиТ*. 2023. № 2. С. 3–34. DOI: 10.31857/S0005231023020010
2. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами // М.: Наука. 1973.
3. Гаркави А.Л. О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества // *Успехи матем. наук*. 1964. Т. 19. № 6. С. 139–145.
4. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики // М.: Издательство Физико-математической литературы. 2001.
5. Ибрагимов Д.Н., Новожилкин Н.М., Порцева Е.Ю. О достаточных условиях оптимальности гарантирующего управления в задаче быстродействия для линейной нестационарной дискретной системы с ограниченным управлением // *АиТ*. 2021. № 12. С. 48–72. DOI: 10.31857/S0005231021120047
6. Ибрагимов Д.Н. О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // *АиТ*. 2019. № 3. С. 3–25. DOI: 10.1134/S0005231019030012
7. Ибрагимов Д.Н., Подгорная В.М. Суперэллипсоидальные аппроксимации в задаче быстродействия для двумерной линейной дискретной системы с ограниченным управлением // *Моделирование и анализ данных*. 2023. Т. 13. № 2. С. 151–179. DOI: 10.17759/mda.2023130209
8. Ибрагимов Д.Н., Подгорная В.М. Формирование оптимального по быстродействию ограниченного управления для линейных дискретных систем на основе метода суперэллипсоидальной аппроксимации // *АиТ*. 2023. № 9. С. 51–81. DOI: 10.31857/S0005231023090039
9. Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н. О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем и ограниченным управлением // *АиТ*. 2017. № 10. С. 3–32. DOI: 10.1134/S0005117917100010
10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа // М.: Физматлит. 2012.
11. Проний А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов // М.: Наука. 1973.
12. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ // М.: Мир. 1973.
13. Страшинов С.В. Использование суперэллипсов в компьютерном моделировании строительных и машиностроительных объектов // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура»*. 2023. Т. 23. № 4. С. 67–76. DOI:10.14529/build230408
14. Abdelhak A., Rachik M. The Linear Quadratic Minimum-Time Problem for a Class of Discrete Systems // *Optimization*. 2010. Vol. 59(4). P. 575–87. DOI:10.1080/02331930801954672
15. A Superellipse with Deformation and Its Application in Describing the Cross-Sectional Shapes of a Square Bamboo // *Weíwei Huang et al. Symmetry*. 2020. № 12, 2073. DOI:10.3390/sym12122073
16. Bako L., Chen D., Lecoëuche S. A numerical solution to the minimum-time control problem for linear discrete-time systems // *CoRR*. 2011. DOI:10.48550/arXiv.1109.3772
17. Capturing spiral radial growth of conifers using the superellipse to model tree-ring geometric shape // *Shi Pei-Jian et al. Frontiers in Plant Science*. 2015. Vol. 6 DOI:10.3389/fpls.2015.00856
18. Discrete-Time System Optimal Dynamic Traffic Assignment (SO-DTA) with Partial Control for Physical Queuing Networks // *Samitha Samaranyake et al. Transportation Science*. 2018. Vol. 52. № 4. DOI:10.1287/trsc.2017.0800



On the Suboptimal Solution of the Speed-In-Action Problem for a Linear Discrete System in the Case of Asymmetric Control Constraints

Violetta M. Podgornaya*

Moscow Aviation Institute (national research university), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-9956-3002>

e-mail: vita1401@outlook.com

The paper considers a linear discrete system with bounded control. The speed-in-action problem is solved for the system, that is, it is required to construct a control process that transfers the system from the initial state to the origin in a minimum number of steps. If the set of acceptable control values has a superellipse structure, then the problem of calculating optimal control can be reduced to solving a system of algebraic equations. A superellipsoidal approximation method has been developed for sets of arbitrary structure, and the case of asymmetric sets has been considered. Examples are given.

Keywords: linear control system, speed problem, 0-controllability sets, maximum principle, superellipse.

For citation:

Podgornaya V.M. On the Suboptimal Solution of the Speed-In-Action Problem for a Linear Discrete System in the Case of Asymmetric Control Constraints. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 3, pp. 63–86. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140304> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Berendakova A.V., Ibragimov D.N. About the Method for Constructing External Estimates of the Limit Controllability Set for the Linear Discrete-Time System with Bounded Control. *Autom. Remote Control*. 2023. Vol. 84. no. 2. pp. 83–104. DOI:10.1134/S0005117923020030
2. Boltyanskij V.G. Optimal'noe upravlenie diskretnymi sistemami [Optimal control of discrete systems]. *Moskva: Nauka=Moscow: The science*. 1973. (In Russ.).
3. Garkavi A.L. O chebyshevskom tsentre i vypukloi obolochke mnozhestva [About the Chebyshev center and the convex hull of the set]. *Uspekhi matematicheskikh nauk=Achievements of mathematical sciences*. 1964. Vol. 19. no. 6. pp. 139–145. (In Russ.).
4. Zhuravlev V.F. Osnovy teoreticheskoi mekhaniki [Fundamentals of theoretical mechanics]. *Moskva: Izdatel'stvo Fiziko-matematicheskoi literatury=Moscow: Publishing House of Physical and Mathematical Literature*. 2001. (In Russ.).
5. Ibragimov D.N., Novozhilin N.M., Portseva E.Yu. On Sufficient Optimality Conditions for a Guaranteed Control in the Speed Problem for a Linear Time-Varying Discrete-Time System with

***Violetta M. Podgornaya**, Postgraduate Student, Assistant Professor, Department of Probability Theory and Computer Modeling, Moscow Aviation Institute (national research university), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-9956-3002>, e-mail: vita1401@outlook.com



- Bounded Control. *Autom. Remote Control*. 2021. Vol. 82. no. 12. pp. 2076–2096. DOI:10.1134/S000511792112002X
6. Ibragimov D.N. On the Optimal Speed Problem for the Class of Linear Autonomous Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control and Degenerate Operator. *Autom. Remote Control*. 2019. Vol. 80. no. 3. pp. 393–412. DOI:10.1134/S0005117919030019
 7. Ibragimov D.N., Podgornaya V.M. Superellipsoidal'nye approksimatsii v zadache bystrodeistviya dlya dvumernoi lineinoi diskretnoi sistemy s ogranichenym upravleniem [Superellipsoidal Approximations in the Speed-in-action Problem for a Two-dimensional Linear Discrete System with Bounded Control]. *Modelirovanie i analiz dannykh=Modelling and Data Analysis*. 2023. Vol. 13. no. 2. pp. 151–179. DOI: 10.17759/mda.2023130209 (In Russ.).
 8. Ibragimov D.N., Podgornaya V.M. Construction of the Time-Optimal Bounded Control for Linear Discrete-Time Systems Based on the Method of Superellipsoidal Approximation. *Autom. Remote Control*. 2023. Vol. 84. no. 9. pp. 924–946. DOI: 10.1134/S0005117923090035
 9. Ibragimov D.N., Sirotin A.N. On the Problem of Operation Speed for the Class of Linear Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control. *Autom. Remote Control*. 2017. Vol. 78. no. 10. pp. 1731–1756. DOI: 10.1134/S0005117917100010
 10. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsij i funkcional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. *Moskva: Fizmatlit=Moscow: Physical education*. 2012. (In Russ.).
 11. Propoj A.I. *Elementy teorii optimal'nykh diskretnykh processov* [Elements of the theory of optimal discrete processes]. *Moskva: Nauka=Moscow: The science*. 1973. (In Russ.).
 12. Rokafellar R. *Vypuklyj analiz* [Convex analysis]. *Moskva: Mir=Moscow: Mir*. 1973. (In Russ.).
 13. Strashnov S.V. Ispol'zovanie superellipsov v komp'yuternom modelirovanii stroitel'nykh i mashinostroitel'nykh ob'ektov [Utilizing superellipses in computer modeling of architectural and engineering structures]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Stroitel'stvo i arkhitektura=Bulletin of the South Ural State University. Series Construction Engineering and Architecture*. 2023. Vol. 23. no. 4. pp. 67–76. DOI:10.14529/build230408 (In Russ.).
 14. Abdelhak A., Rachik M. The Linear Quadratic Minimum-Time Problem for a Class of Discrete Systems. *Optimization*. 2010. Vol. 59(4). pp. 575–87. DOI:10.1080/02331930801954672
 15. A Superellipse with Deformation and Its Application in Describing the Cross-Sectional Shapes of a Square Bamboo. Weiwei Huang et al. *Symmetry*. 2020. № 12, 2073. DOI:10.3390/sym12122073
 16. Bako L., Chen D., Lecoeuche S. A numerical solution to the minimum-time control problem for linear discrete-time systems. *CoRR*. 2011. DOI:10.48550/arXiv.1109.3772
 17. Capturing spiral radial growth of conifers using the superellipse to model tree-ring geometric shape. Shi Pei-Jian et al. *Frontiers in Plant Science*. 2015. Vol. 6. DOI:10.3389/fpls.2015.00856
 18. Discrete-Time System Optimal Dynamic Traffic Assignment (SO-DTA) with Partial Control for Physical Queuing Networks. Samitha Samaranyake et al. *Transportation Science*. 2018. Vol. 52. no. 4. DOI:10.1287/trsc.2017.0800

Получена 16.06.2024

Принята в печать 17.07.2024

Received 16.06.2024

Accepted 17.07.2024

Оптимизация инвестиционного портфеля бинарным методом роя пчел

Пантелеев А.В.*

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>
e-mail: avpanteleev@inbox.ru

Милютина С.А.**

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-5267-2157>
e-mail: msofa02@mail.ru

Рассматривается задача формирования портфеля ценных бумаг, как задача бинарной оптимизации. Решение формируется с помощью разработанной модификации метода роя пчел, дополненного процедурой бинаризации с применением различных переходных функций. Исследована эффективность предложенного метода на модельных примерах и решена прикладная задача максимизации доходности портфеля с учетом ограничений на используемые средства и значение риска.

Ключевые слова: бинарная оптимизация, метаэвристические алгоритмы, метод роя пчел, переходные функции, портфель ценных бумаг.

Для цитаты:

Пантелеев А.В., Милютина С.А. Оптимизация инвестиционного портфеля бинарным методом роя пчел // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 3. С. 87–104.
DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140305>

***Пантелеев Андрей Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики института «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: avpanteleev@inbox.ru

****Милютина София Алексеевна**, выпускница бакалавриата, институт «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-5267-2157>, e-mail: msofa02@mail.ru



1. ВВЕДЕНИЕ

В условиях современной экономики вопрос о распределении собственных располагаемых средств является актуальным для владельцев капитала. Инвесторы стремятся принимать решения, которые максимизируют прибыльность их портфеля, одновременно минимизируя его риск в условиях ограниченных финансовых возможностей. Классические задачи Марковица, Блэка, Тобина–Шарпа–Линтнера могут быть решены средствами нелинейного программирования [1,2]. При введении ограничений на количество активов в портфеле или вклад каждого актива в портфель математическая модель становится задачей смешанного целочисленного нелинейного квадратичного программирования, для которой требуется разработка специальных алгоритмов. Применение метаэвристических алгоритмов оптимизации позволяет эффективно исследовать пространство поиска [3] и может быть успешно использовано для решения задач оптимизации инвестиционного портфеля. Если переменные модели принимают бинарные значения, например, «включено/выключено» или «выбрано/не выбрано», становится актуальным развитие и применение методов бинарной оптимизации. Одним из подходов в их решении являются двухэтапные схемы бинаризации [4–6]. Первый этап заключается в применении передаточной функции, которая отображает значения координат решений, сгенерированных непрерывным метаэвристическим методом, в непрерывный интервал между 0 и 1. Второй этап состоит из применения правила бинаризации, которое преобразует числа в пределах этого интервала в двоичные значения. Существуют несколько типов передаточных функций, но важно отметить, что ни одна из них не превосходит другие во всех случаях их использования, что соответствует теореме No Free Lunch (NFL) [7].

В результате применения различных идей в настоящее время разработаны следующие методы бинарной оптимизации [4]: Binary Bat Algorithm, Binary Sine Cosine Algorithm, Binary Salp Swarm Algorithm, Binary Grey Wolf Optimizer, Binary Dragonfly Algorithm, Binary Whale Optimization Algorithm, Binary Magnetic Optimization Algorithm, Binary Artificial Bee Colony, Binary Firefly algorithm, Binary Flower Pollination algorithm, Binary Particle Swarm Optimization, Binary Ant Colony Optimization, Binary Bat algorithm, Binary Cat Swarm Optimization, Binary Gravitational search algorithm, Binary Harmony Search Algorithm, Binary Biogeography-Based Optimization, Binary Ant-Lion Optimizer, Binary Spotted Hyena Optimizer, Binary Emperor Penguin Optimizer, Binary Harris Hawks Optimization, Binary Equilibrium Optimizer, Binary Atom Search Optimization, Binary Jaya Algorithm, Binary Coronavirus Herd Immunity Optimizer, Binary Butterfly Optimization Algorithm, Binary Black Widow Optimization, Binary Slime Mould Algorithm, Binary Golden Eagle Optimizer, Binary Grasshopper Optimization algorithm и др.

В статье на основе оригинального алгоритма роя пчел [3, 8] с применением различных переходных функций в процессе двухэтапной бинаризации сформирован бинарный метод роя пчел. Приведен пошаговый алгоритм, решены модельные примеры и прикладная задача оптимизации портфеля ценных бумаг. По сравнению с известными модификациями [9, 10] предложенный алгоритм не уступает в эффективности.



2. ЗАДАЧА ФОРМИРОВАНИЯ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ КАК ЗАДАЧА БИНАРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Введём необходимые определения.

Доходность ценной бумаги – это показатель, отражающий уровень прибыли или убытка от инвестиций в определенный актив за определенный период времени. На данный показатель влияют такие факторы, как темпы инфляции, размер выплачиваемых держателям акций дивидендов, величина налога с прибыли и т.д. Доходность рассчитывается как отношение приносимой одной акцией прибыли к ее рыночной стоимости. Доходность портфеля измеряется как средневзвешенная сумма доходностей входящих в него бумаг.

Риск ценной бумаги отражает факт, что фактическая доходность данного актива вероятно отклонится от ожидаемой доходности. Он может быть вызван различными факторами, например, изменениями в рыночных условиях, финансовым состоянием компании, экономическими и политическими событиями, стилем управления, операционной эффективностью и т.д. Риск отдельной бумаги оценивается как среднеквадратичное (стандартное) отклонение его доходности. Риск портфеля учитывает не только риски отдельных активов, входящих в портфель, но и взаимосвязи между ними, что выражается через ковариацию их доходностей. Он отражает степень возможных колебаний общей стоимости портфеля и вероятность отклонения фактической доходности от ожидаемой.

Рассматривается n инвестиционных проектов. Заданы: вектор $\bar{r} = (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n)^T$, в котором \bar{r}_i – средняя доходность i -го проекта; вектор $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$, где w_i – размер необходимых затрат на реализацию i -го проекта; ковариационная матрица доходностей σ , где σ_{ii} – дисперсия доходности i -го проекта, а σ_{ij} – ковариация доходностей i -го и j -го проектов.

Установлены ограничения на доступные средства и допустимый уровень риска, т.е. суммарный объём финансирования не должен превышать заданного значения C , а риск собранного инвестиционного портфеля ограничен значением A .

Задача формирования инвестиционного портфеля состоит в выборе оптимального набора проектов с учетом максимизации ожидаемой доходности P при соблюдении ограничений.

Математически задача может быть описана следующим образом: требуется найти вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, определённый на множестве $\{0, 1\}^n$, такой что:

$$P = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i x_i \rightarrow \max,$$
$$\sum_{i=1}^n w_i x_i \leq C, \quad \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j} \leq A,$$
$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $x_i = 1$, если i -й проект входит в выбранный набор, и $x_i = 0$, если – не входит.



Таким образом, задача формирования портфеля инвестиционных проектов сводится к задаче бинарной оптимизации с ограничениями типа равенств.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ БИНАРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Дана целевая функция $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определённая на множестве допустимых решений $D = \{0, 1\}^n$.

Требуется найти глобальный условный минимум функции $f(x)$ на множестве D , т.е. найти точку $x^* \in D$, что:

$$f(x^*) = \min_{x \in D} f(x), \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

Задача поиска максимума целевой функции $f(x)$ сводится к задаче поиска минимума путем замены знака перед функцией на противоположный:

$$f(x^*) = \max_{x \in D} f(x) = - \min_{x \in D} [-f(x)].$$

4. СТРАТЕГИЯ ПОИСКА РЕШЕНИЯ

Главная идея разработанного алгоритма решения задачи бинарной оптимизации заключается в комбинировании метаэвристического метода глобальной оптимизации с процессом бинаризации, что позволит применить его к задачам с бинарной целевой функцией.

Алгоритм основан на методе пчелиного роя, который представляет собой метаэвристический итеративный мультиагентный алгоритм [3]. Его главная идея заключается в имитации поведения пчел при поиске нектара. Для описания поведения пчёл в природе используются три следующих основных понятия.

Источник нектара характеризуется своей полезностью, которая определяется такими факторами, как удалённость от улья, концентрация нектара, удобство его добычи, а в задачах поиска глобального экстремума характеризуется значением целевой функции.

Занятые фуражиры – пчёлы, которые «связаны» с одним из источников нектара, т.е. добывают на нем нектар. Занятые фуражиры владеют следующей информацией о «своем» источнике нектара: направление от улья на источник и полезность источника.

Незанятые фуражиры – пчёлы-разведчики, которые осуществляют поиск источников нектара для их использования, а также пчёлы-наблюдатели, которые в данное время выполняют некоторые работы в улье.

Каждая незанятая пчела-фуражир может направиться к источнику нектара, следуя за пчелой-разведчиком, которая отыскала путь к этому источнику. Пчела-разведчик привлекает незанятых пчёл путем исполнения танца на специальной площадке улья, известной как «область танцев». Заинтересованные пчелы присоединяются к пчеле-разведчику и следуют за ней к месту с нектаром, становясь тем самым занятыми фуражирами.



Завершив добычу нектара, занятый фуражир возвращает его в улей и размещает там. Затем он выбирает одно из следующих действий: стать незанятым фуражиром, оставив источник нектара, продолжить сбор с текущего источника без вербовки других пчёл или выполнить вербовку. Решение о том, какое действие предпринять, принимается пчелой в соответствии с определенным вероятностным распределением.

Таким образом, на основе информации, полученной от других пчёл, пчела может:

- лететь к одному из источников нектара (двигаться к предполагаемой точке экстремума);
- оставить выбранный ранее источник и переключиться на исследование другого (выбраться из области притяжения локального экстремума);
- осуществлять новый поиск источников нектара (исследовать ранее не исследованные области).

Положение каждой пчелы задаётся вектором на множестве \bar{D} , причем $D \subset \bar{D}$: $x^{cont} = (x_1^{cont}, x_2^{cont}, \dots, x_n^{cont})^T$, $x_i^{cont} \in \bar{D} = [-10; 10], i = 1, 2, \dots, n$. Используя процесс бинаризации, вектор x^{cont} преобразуется в бинарный вектор $x^{bin} = (x_1^{bin}, x_2^{bin}, \dots, x_n^{bin})^T$, $x_i^{bin} \in \{0; 1\}, i = 1, 2, \dots, n$. Количество собранного нектара определяется значением целевой функции в точке, заданной бинарным вектором x^{bin} .

Используется двухэтапный метод бинаризации, который состоит из следующих шагов:

- передаточная функция T преобразует значения, генерируемые непрерывными методами оптимизации, в непрерывный интервал от 0 до 1;
- преобразование вещественного числа в бинарное значение по установленному правилу бинаризации.

Рассматриваются S-образные и V-образные функции, где каждая имеет по четыре варианта (рис. 1).

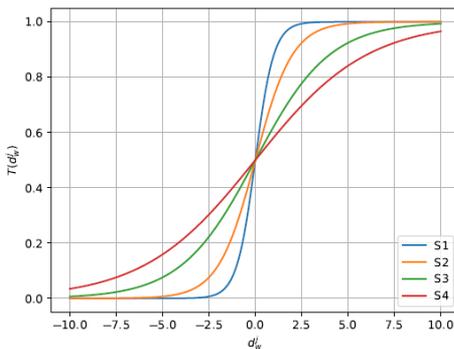


Рис. 1. а) Передаточная функция S-вида

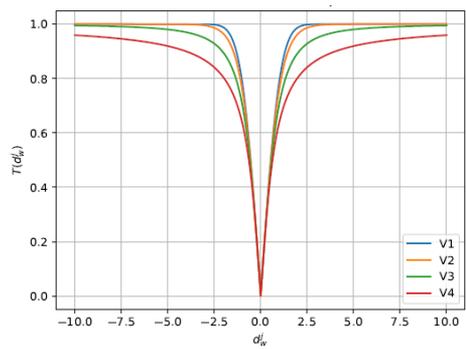


Рис. 1. б) Передаточная функция V-вида

Для того чтобы функции были временно-изменяемые, можно ввести параметр τ :

$$\tau = \left(1 - \frac{k}{K}\right) \cdot \tau_{\max} + \frac{k}{K} \cdot \tau_{\min},$$



где τ_{\max} – максимальное значение параметра τ , τ_{\min} – минимальное значение параметра τ , k – номер текущей итерации, K – максимальное число итераций. Коэффициенты τ_{\max} , τ_{\min} задаются в зависимости от передаточной функции. Параметр τ изменяется с каждой итерацией, порождая новую функцию преобразования. Виды передаточных функций с введённым параметром τ представлены в табл. 1.

Таблица 1

Передаточные функции S-вида и V-вида

S-вид		V-вид	
T_{S1}	$T(x_i, \tau) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{-2x_i}{\tau}}}$	T_{V1}	$T(x_i, \tau) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{1 + e^{-\frac{-2x_i}{\tau}}}, x_i \leq 0 \\ \frac{2}{1 + e^{-\frac{-2x_i}{\tau}}} - 1, x_i > 0 \end{cases}$
T_{S2}	$T(x_i, \tau) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{-x_i}{\tau}}}$	T_{V2}	$T(x_i, \tau) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{1 + e^{-\frac{-x_i}{\tau}}}, x_i \leq 0 \\ \frac{2}{1 + e^{-\frac{-x_i}{\tau}}} - 1, x_i > 0 \end{cases}$
T_{S3}	$T(x_i, \tau) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{-x_i}{2\tau}}}$	T_{V3}	$T(x_i, \tau) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{1 + e^{-\frac{-x_i}{2\tau}}}, x_i \leq 0 \\ \frac{2}{1 + e^{-\frac{-x_i}{2\tau}}} - 1, x_i > 0 \end{cases}$
T_{S4}	$T(x_i, \tau) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{-x_i}{3\tau}}}$	T_{V4}	$T(x_i, \tau) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{1 + e^{-\frac{-x_i}{3\tau}}}, x_i \leq 0 \\ \frac{2}{1 + e^{-\frac{-x_i}{3\tau}}} - 1, x_i > 0 \end{cases}$

Второй этап процесса бинаризации заключается в преобразовании непрерывных значений из промежутка $[0; 1]$ в бинарные значения. Существует несколько различных правил бинаризации, таких как стандартное, дополненное, статистическое и другие. Каждое из них может иметь преимущества в зависимости от условий конкретной задачи. В статье используется стандартное правило бинаризации:

$$x_i^{bin} = \begin{cases} 1, \text{rand}[0;1] \leq T(x_i^{cont}, \tau), & i = 1, \dots, n, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где n – количество переменных целевой функции.



Общая схема работы бинарного алгоритма роя пчел представлена на рис. 2. Он включает более подробное описание функций, выполняемых модулем 3.



Рис. 2. Общая схема бинарного алгоритма роя пчел

5. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Шаг 1. Инициализация алгоритма. Задать параметры:

s	число пчёл-разведчиков;
$threshold$	пороговое значение расстояния между пчёлами в начальный момент;
Δ	параметр области локального поиска;
B	число пчёл, посылаемых в «наилучшие области»;
P	число пчёл, посылаемых в «перспективные области»;
K	максимальное число итераций;
b	число отбираемых наилучших значений целевой функции;
$p \leq s - b$	число отбираемых перспективных значений целевой функции.
τ	параметр передаточной функции

Положить число итераций $k = 0$.



Шаг 2. Генерирование начального роя пчел. Сформировать начальные положения s пчёл-разведчиков при помощи равномерного распределения на множестве $\bar{D} = [-10, 10]^n$. В результате получить рой пчел $\{x^{1,cont}, \dots, x^{s,cont}\}$. Если расстояние (евклидово) между двумя пчёлами-разведчиками меньше порогового значения $threshold$, остаётся пчела с меньшим значением целевой функции. Недостающие пчёлы-разведчики генерируются заново.

Шаг 3. Подсчет значений целевой функции для всех пчёл-разведчиков. Координаты положения каждой j -й пчелы $x_i^{j,cont} \in \bar{D}_i, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, s$ преобразовать к бинарному значению $x_i^{j,bin}$ с помощью стандартного правила бинаризации:

$$x_i^{j,bin} = \begin{cases} 1, & rand[0; 1] \leq T(x_i^{j,cont}, \tau), i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, s, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2)$$

где $rand \in [0, 1]$ – число, генерируемое случайным образом, используя равномерный закон распределения, $T(x_i^{j,cont}, \tau)$ – выбранная передаточная функция с параметром τ .

Если полученное бинарное значение $x_i^{j,bin}$ не удовлетворяет хотя бы одному из заданных условий, оно отбрасывается. Вместо него генерируется новое положение пчелы $x_i^{j,cont}$, затем шаг 3 повторяется.

Для каждой j -й пчелы подсчитать значение целевой функции $f(x^{j,bin})$.

Упорядочить все положения пчел (решения) по возрастанию значения целевой функции: $f(x^{1,bin}) \leq f(x^{2,bin}) \leq \dots \leq f(x^{s,bin})$.

Шаг 4. Выбор наилучших и перспективных значений целевой функции. Среди значений $f(x^{1,bin}), f(x^{2,bin}), \dots, f(x^{s,bin})$ выбрать:

b наилучших значений;

p перспективных значений, наиболее близких к наилучшим.

Шаг 5. Нахождение «наилучших областей» и «перспективных областей». Выбранным на шаге 4 значениям ставятся в соответствие области локального поиска, каждая из которых представляет собой гиперкуб:

- центр области определяется координатами пчелы-разведчика в бинарной форме;
- длины сторон равны $2\Delta^k$, где $\Delta^k = \Delta \left(1 - \frac{k}{K}\right)$.

Результатом шага 5 является нахождение b «наилучших областей» и p «перспективных областей».

Шаг 6. Генерирование новых решений. В каждой из «наилучших областей» случайным образом (используя равномерное распределение) генерировать B новых решений, а в каждой из «перспективных областей» генерировать P новых решений (пчела-разведчик завербовала B и P пчёл соответственно, которые стали занятыми фуражирами).

Шаг 7. Обновление популяции. Координаты всех найденных $(bB + pP)$ точек (новых решений) преобразовать с помощью стандартного правила бинаризации (2).

Если какая-либо из найденных $(bB + pP)$ точек, не удовлетворяет заданным условиям, она генерируется заново.

В каждой из $(bB+pP)$ точек подсчитать значения целевой функции.

Упорядочить все точки по возрастанию значения целевой функции: $f(x^{1,bin}) \leq f(x^{2,bin}) \leq \dots \leq f(x^{bB+pP,bin})$ и выбрать s первых решений $\{x^{1,bin}, \dots, x^{s,bin}\}$.

Шаг 8. Проверить выполнение условия окончания:

- если $k < K - 1$, то положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 4;
- если $k = K - 1$, завершить процесс поиска и в качестве приближенного решения выбрать $x^* = x^{1,bin}$.

Замечания.

1. Важная особенность алгоритма состоит в том, что в процессе поиска новые решения остаются в пределах множества допустимых решений. Для обеспечения этого необходимо корректировать границы «наилучших» и «перспективных» областей, учитывая границы вспомогательного множества допустимых решений. Если на шаге 5 расстояние от положения пчелы-разведчика до границы вспомогательного множества превышает значение величины Δ , тогда граница «наилучшей» или «перспективной» области должна быть скорректирована в соответствии с соответствующей границей вспомогательного множества.
2. При выборе параметров алгоритма следует учитывать, что общее число пчел в рое $s \leq bB + pP$. Число наилучших областей $b \leq p$, так как фактически реализуется стратегия «элитизма». Кроме того, лучше задавать $B \geq P$, так как лучшие решения должны привлекать больше пчел.
3. Ни одна из передаточных функций не превосходит остальные во всех возможных случаях, поэтому алгоритм предусматривает выбор передаточной функции. Выбирается одна из восьми функций S и V-вида, представленных в табл. 1. Величина каждой передаточной функции зависит от параметра $\tau = (1 - \frac{k}{K}) \cdot \tau_{\max} + \frac{k}{K} \cdot \tau_{\min}$, изменяющегося с каждой новой итерацией. Для упрощения процедуры допускается использовать постоянное значение параметра $\tau = 1$.

6. МОДЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ

На основе изложенной модификации алгоритма пчелиного роя сформирован программный модуль, реализующий поиск глобального условного минимума целевой функции, который был протестирован на нескольких функциях с известным точным решением при $n = 5$ и $n = 30$.

Для оценки эффективности работы метода для каждой тестируемой функции проводятся серии из 100 решений одной и той же задачи с одними и теми же значениями параметров. Для полученной выборки x^* вычисляются:

среднее значение отклонения полученного решения от точного: $\overline{\Delta f} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \Delta f_i$
где $\Delta f_i = |f(x^*) - f^i|$, f^i – полученное значение целевой функции;

- среднеквадратическое отклонение $\overline{\sigma}_f = \sqrt{\overline{S}_{100}}$, где $\overline{S}_{100} = \frac{1}{99} \sum_{i=1}^{100} (\Delta f_i - \overline{\Delta f})^2$;
- наименьшее значение отклонения $\Delta f_{best} = \min_i \Delta f_i$;
- количество успехов $n_{усп}$ (совпадений найденного минимума с точным решением).



Пример 1. Рассматривается тестовая функция $f_1 = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Область определения функции $D = \{0, 1\}^n$, точное решение $f_{\min} = f(0, \dots, 0) = 0$.

Выполнен анализ влияния параметров метода роя пчел на результат работы алгоритма путем последовательного изменения их значений. Каждый набор значений применялся к функции f_1 при $n = 5$ с использованием одинаковой передаточной функции, выбранной произвольно. Задавалось множество $\bar{D} = [-30; 30]$. Результаты работы алгоритма при различных значениях параметров метода приведены в табл. 2. Параметры метода, при которых были достигнуты лучшие решения, выделены полужирным шрифтом.

Таблица 2

Подбор параметров метода для функции f_1 при $n = 5$

Параметры метода							$\overline{\Delta f}$	$\overline{\sigma_f}$	$n_{\text{усп}}$
s	$threshold$	Δ	B	P	b	K			
20	0,001	0,85	10	10	10	100	0,27	0,1991	73
20	0,001	0,85	10	10	10	300	0,28	0,2036	78
50	0,001	0,85	10	10	10	300	0,01	0,0099	99
50	0,001	0,85	10	10	20	300	0,03	0,0294	97
50	0,001	1,5	10	10	10	300	0	0	100

Для функции f_1 размерности $n = 5$ независимо от выбора передаточной функции T были получены одинаково хорошие результаты: все полученные решения совпали с точным. Результаты работы метода для тестируемой функции при $n = 30$ представлены в табл. 3. Лучшие достигнутые результаты выделены полужирным шрифтом.

Таблица 3

Результаты тестирования функции f_1 при $n = 30$

T	$\overline{\Delta f}$	$\overline{\sigma_f}$	Δf_{best}	$n_{\text{усп}}$
T_{S1}	0,23	0,21	0	79
T_{S2}	0	0	0	100
T_{S3}	0	0	0	100
T_{S4}	0,05	0,04797	0	95
T_{V1}	0	0	0	100
T_{V2}	0,94	1,127676	0	40
T_{V3}	0,97	0,99909	0	39
T_{V4}	0,96	1,008484	0	39



Пример 2. Рассматривается тестовая функция $f_2 = \sum_{i=1}^n \left[100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2 \right]$. Область определения функции $D = \{0, 1\}^n$. Точное решение: $f_{\min} = f(1, \dots, 1) = 0$.

Выполнен анализ влияния параметров бинарного метода роя пчел на результат работы алгоритма путем последовательного изменения их значений. Каждый набор значений применялся к функции f_2 при $n = 5$ с использованием одинаковой передаточной функции, выбранной произвольно. Задавалось множество $D = [-10; 10]$. Результаты работы алгоритма при различных значениях параметров метода приведены в табл. 4. Параметры метода, при которых были достигнуты лучшие решения, выделены полужирным шрифтом.

Таблица 4

Подбор параметров метода для функции f_2 при $n = 5$

Параметры метода							$\overline{\Delta f}$	$\overline{\sigma_f}$	$n_{\text{ген}}$
s	$threshold$	Δ	B	P	b	K			
20	0,001	0,85	10	10	10	100	0,27	0,1991	73
20	0,001	0,85	10	10	10	300	0,28	0,2036	78
50	0,001	0,85	10	10	10	300	0,01	0,0099	99
50	0,001	0,85	10	10	20	300	0,03	0,0294	97
50	0,001	1,5	10	10	10	300	0	0	100

Результаты работы метода в зависимости выбора передаточной функции T представлены в табл. 5 и 6. Лучшие достигнутые результаты выделены полужирным шрифтом.

Таблица 5

Результаты тестирования функции f_2 при $n = 5$

T	$\overline{\Delta f}$	$\overline{\sigma_f}$	Δf_{best}	$n_{\text{ген}}$
T_{S1}	1,41	2,5326	0	89
T_{S2}	0,32	1,1895	0	92
T_{S3}	0,12	0,4703	0	97
T_{S4}	0,2	0,7677	0	95
T_{V1}	0,28	1,0521	0	93
T_{V2}	0,28	1,0521	0	93
T_{V3}	0,36	1,3236	0	91
T_{V4}	0,68	2,9	0	83



Таблица 6

Результаты тестирования функции f_2 при $n = 30$

T	$\overline{\Delta f}$	$\overline{\sigma_f}$	Δf_{best}	$n_{усп}$
T_{S1}	27,42	4111,296	0	82
T_{S2}	0	0	0	100
T_{S3}	1	101,01	0	99
T_{S4}	20,19	2419,347	0	84
T_{V1}	13,35	1419,52	0	88
T_{V2}	350,78	22848,09	0	2
T_{V3}	371,74	24457,6	0	1
T_{V4}	362,88	26142,49	0	1

Пример 3. Тестовая функция $f_3 = \left\{ \left[\sum_{i=1}^n \sin^2 x_i \right] - \exp \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \right\} \cdot \exp \left(\sum_{i=1}^n \sin(\sqrt{|x_i|}) \right)$ с областью определения функции $D = \{0, 1\}^n$. Точное решение: $f_{\min} = f(0, \dots, 0) = -1$.

Выполнен анализ влияния параметров бинарного метода роя пчел на результат работы алгоритма путем последовательного изменения их значений. Каждый набор значений применялся к функции f_3 при $n = 5$ с использованием одинаковой передаточной функции, выбранной произвольно. Задавалось множество $\overline{D} = [-10; 10]$. Результаты работы алгоритма при различных значениях параметров метода приведены в табл. 7. Параметры метода, при которых были достигнуты лучшие решения, выделены полужирным шрифтом.

Таблица 7

Подбор параметров метода для функции f_3

Параметры метода							$\overline{\Delta f}$	$\overline{\sigma_f}$	$n_{усп}$
s	$threshold$	Δ	B	P	b	K			
20	0,001	0,85	10	10	10	100	0,27	0,1991	73
20	0,001	0,85	10	10	10	300	0,28	0,2036	78
50	0,001	0,85	10	10	10	300	0,01	0,0099	99
50	0,001	0,85	10	10	20	300	0,03	0,0294	97
50	0,001	1,5	10	10	10	300	0	0	100

Результаты работы метода в зависимости выбора передаточной функции T представлены в табл. 8 и 9. Лучшие достигнутые результаты выделены жирным шрифтом.



Таблица 8

Результаты тестирования функции f_3 при $n = 5$

T	$\overline{\Delta f}$	$\overline{\sigma_f}$	Δf_{best}	$n_{усп}$
T_{S1}	0,055124236	0,0583181267	0	95
T_{S2}	0,03307454	0,035727526	0	97
T_{S3}	0,044099388	0,0471456013	0	96
T_{S4}	0,044099388	0,0471456013	0	96
T_{V1}	0,055124235	0,0583181267	0	95
T_{V2}	0,110880428	0,111804209	0	90
T_{V3}	0,055124235	0,0583181267	0	95
T_{V4}	0,1212733	0,120196728	0	89

Таблица 9

Результаты тестирования функции f_3 при $n = 30$

T	$\overline{\Delta f}$	$\overline{\sigma_f}$	Δf_{best}	$n_{усп}$
T_{S1}	0,055124236	0,0583181267	0	95
T_{S2}	0,03307454	0,035727526	0	97
T_{S3}	0,044099388	0,0471456013	0	96
T_{S4}	0,044099388	0,0471456013	0	96
T_{V1}	0,055124235	0,0583181267	0	95
T_{V2}	0,110880428	0,111804209	0	90
T_{V3}	0,055124235	0,0583181267	0	95
T_{V4}	0,1212733	0,120196728	0	89

7. ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ

Имеется набор пакетов акций крупнейших российских компаний в сфере энергетики и нефтегазовой промышленности: Газпром (GAZP), ЛУКОЙЛ (LKOH), Роснефть (ROSN), НОВАТЭК (NVTK), Газпром нефть (SIBN), РуссНефть (RNFT), Сургутнефтегаз (SNGS), Славнефть-Мегионнефтегаз (MFGS), Татнефть (TATN),



Башнефть (BANE). Инвестор владеет капиталом размером $C = 10$ млн. руб., который он хочет вложить в покупку некоторых ценных бумаг из представленных.

Требуется выбрать несколько пакетов акций так, чтобы инвестор мог поместить свой капитал и добиться максимальной доходности. Риск собранного инвестиционного портфеля не должен превышать значения $A = 0,04$.

В табл. 10 представлен перечень компаний, ценные бумаги которых рассматриваются в задаче, и стоимость пакета акций каждой из них.

Таблица 10

Стоимость пакета акций компаний

i	Компания	w_i (млн. руб.)
1	Газпром (GAZP)	0,1351
2	ЛУКОЙЛ (LKOH)	7,7995
3	Роснефть (ROSN)	0,5928
4	НОВАТЭК (NVTK)	1,1614
5	Газпром нефть (SIBN)	0,7414
6	РуссНефть (RNFT)	0,2233
7	Татнефть (TATN)	0,7448
8	Башнефть (BANE)	3,0580
9	Сургутнефтегаз (SNGS)	0,0332
10	Славнефть-Мегионнефтегаз (MFGS)	0,4585

Для оценки ожидаемой доходности ценных бумаг необходимо вычислить их доходность за T одинаковых временных периодов. Рассматриваются $T = 6$ промежутков времени в один месяц в период с первого ноября 2023 г. по первое мая 2024 г. Доходность за один месяц определяется как рыночная (текущая) доходность и рассчитывается по формуле:

$$r_i^j = \frac{P_i^1 - P_i^0}{P_i^0},$$

где P_i^0 – стоимость акции i -й компании в начале периода j , P_i^1 – стоимость акции i -й компании в конце периода j .

Тогда средняя доходность ценной бумаги может быть вычислена следующим образом:

$$\bar{r}_i = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T r_i^j.$$

Нахождение элементов ковариационной матрицы доходностей осуществляется по формуле:

$$\sigma_{ij} = \text{cov}(r_i, r_j) = \frac{1}{T-1} \sum_{k=1}^T (r_i^k - \bar{r}_i)(r_j^k - \bar{r}_j).$$



После обработки имеющихся данных и проведения необходимых расчётов получена информация о планируемой доходности рассматриваемых акций, представленная в табл. 11, и о ковариационной матрице доходностей σ , представленная в табл. 12.

Таблица 11

Планируемая доходность акций

i	Компания	\bar{r}_i
1	Газпром (GAZP)	-0,017
2	ЛУКОЙЛ (LKOH)	0,0089
3	Роснефть (ROSN)	0,0015
4	НОВАТЭК (NVTK)	-0,025
5	Газпром нефть (SIBN)	-0,016
6	РуссНефть (RNFT)	0,0448
7	Татнефть (TATN)	0,0161
8	Башнефть (BANE)	0,027
9	Сургутнефтегаз (SNGS)	0,0074
10	Славнефть-Мегионнефтегаз (MFGS)	-0,0008

Таблица 12

Ковариационная матрица доходностей

	GAZP	LKOH	ROSN	NVTK	SIBN	RNFT	TATN	BANE	SNGS	MFGS
GAZP	0,00509	0,00205	-0,00047	0,00041	-0,00014	0,00030	-0,00050	0,00489	0,00417	0,00607
LKOH		0,00237	-0,00028	-0,00013	0,00017	0,00289	-0,00152	0,00452	0,00469	0,00500
ROSN			0,00046	-0,00029	0,00043	-0,00177	0,00068	-0,00151	-0,00024	-0,00102
NVTK				0,00030	-0,00032	0,00075	-0,00017	0,00040	-0,00028	0,00054
SIBN					0,00065	-0,00179	0,00053	-0,00086	0,00073	0,00069
RNFT						0,01514	-0,00524	0,00812	0,00547	0,00545
TATN							0,00206	-0,00392	-0,00265	-0,00278
BANE								0,01130	0,00781	0,00943
SNGS									0,01022	0,01110
MFGS										0,01716

Данные всех компаний и стоимости их ценных бумаг взяты с сервиса Investing (URL: <https://www.investing.com>).

В результате применения бинарного метода роя пчел получено решение задачи: $x = [0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0]^T$, при котором ожидаемая доходность составит $P = 0,0894$. Сформированный портфель потребует объём финансирования в размере 4,6189 млн. руб., а его риск составит 0,02532, что не превышает введённых ограничений $C = 10$ млн. руб., $A = 0,04$. Время работы программы, реализующей разработанный алгоритм, составило 16.74 сек. Опираясь на полученный результат, можно сделать вывод, что искомым поднабор пакетов ценных бумаг состоит из акций следующих компаний: Роснефть, РуссНефть, Татнефть, Башнефть. Заметим,



что в процессе поиска решалась задача максимизации значения целевой функции, что обсуждалось в разд. 3, а решения, не удовлетворяющие хотя бы одному ограничению задачи (на объем финансирования или предельную величину риска), в процессе поиска отбрасывались, и процедура генерирования новых решений продолжалась.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача оптимизации инвестиционного портфеля с заданными ограничениями на доступные средства, допустимый уровень риска и бинарность значений, которые могут принимать переменные. Для решения поставленной задачи предложен алгоритм, основанный на комбинации метаэвристического метода глобальной оптимизации с процессом бинаризации. В разработанном алгоритме используется метаэвристический метод пчелиного роя, передаточные функции вида S и V , а также стандартное правило бинаризации. Эффективность предложенного метода продемонстрирована на трех модельных примерах и прикладной задаче формирования портфеля ценных бумаг. Показано, что предложенный алгоритм способен находить решения хорошего качества при приемлемых вычислительных затратах.

Литература

1. Бадалова А.Г., Пантелеев А.В. Промышленный риск-менеджмент. М.: Доброе слово, 2018.
2. Бадалова А.Г., Пантелеев А.В. Управление рисками деятельности предприятия. М.: Вузовская книга, 2017.
3. Пантелеев А.В., Скавинская Д.В. Метаэвристические алгоритмы глобальной оптимизации. М.: Вузовская книга, 2019.
4. Macedo M. et al. Overview on binary optimization using swarm-inspired algorithms // IEEE Access. 2021. Vol. 9. P. 149814–149858.
5. Lemus-Romani J. et al. Binarization of Metaheuristics: Is the Transfer Function Really Important? // Biomimetics. 2023. Vol. 8. No. 5. 400.
6. Crawford B. et al. Q-learnheuristics: Towards data-driven balanced metaheuristics // Mathematics. 2021. Vol. 9. No. 16. 1839.
7. Wolpert D.H., Macready W.G. No free lunch theorems for optimization // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 1997. Vol. 1. No.1. P. 67–82.
8. Karaboga D., Basturk B. On the performance of artificial bee colony (ABC) algorithm // Applied soft computing. 2008. Vol. 8. No.1. P. 687–697.
9. Nouioua M., Li Z., Jiang S. New binary artificial bee colony for the 0–1 Knapsack problem // Advances in Swarm Intelligence: 9th International Conference, ICSI 2018, Shanghai, China, June 17–22, 2018, Proceedings, Part I 9. Springer International Publishing, 2018.
10. Pampará G., Engelbrecht A.P. Binary artificial bee colony optimization // 2011 IEEE Symposium on Swarm Intelligence. IEEE, 2011. P. 1–8.



Investment Portfolio Optimization by Binary Bee Swarm Method

Andrei V. Pantelev*

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>
e-mail: avpantelev@inbox.ru

Sofia A. Milyutina**

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-5267-2157>
e-mail: msofa02@mail.ru

The problem of forming a stock portfolio is considered as a binary optimization problem. The solution is formed using the developed modification of the bee swarm method, supplemented by a binarization procedure using various transition functions. The efficiency of the proposed method is studied using model examples and the applied problem of maximizing portfolio profitability is solved taking into account constraints on the funds used and the risk value.

Keywords: binary optimization, metaheuristic algorithms, bee swarm method, transition functions, stock portfolio.

For citation:

Pantelev A.V., Milyutina S.A. Investment Portfolio Optimization by Binary Bee Swarm Method. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 3, pp. 87–104. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140305> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Badalova A.G., Pantelev A.V. Promyshlennyj risk-menedzhment. M.: Dobroe slovo, 2018. (In Russ.).
2. Badalova A.G., Pantelev A.V. Upravlenie riskami deyatel'nosti predpriyatiya. M.: Vuzovskaya kniga, 2017. (In Russ.).
3. Pantelev A.V., Skavinskaya D.V. Metaevristicheskie algoritmy global'noj optimizacii. M.: Vuzovskaya kniga, 2019. (In Russ.).

***Andrei V. Pantelev**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Mathematics and Cybernetics, Institute “Computer Science and Applied Mathematics”, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: avpantelev@inbox.ru

****Sofia A. Milyutina**, Bachelor’s Degree Graduate of the Institute “Computer Science and Applied Mathematics”, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-5267-2157>, e-mail: msofa02@mail.ru



4. Macedo M. et al. Overview on binary optimization using swarm-inspired algorithms // IEEE Access. 2021. Vol. 9. P. 149814–149858.
5. Lemus-Romani J. et al. Binarization of Metaheuristics: Is the Transfer Function Really Important? // Biomimetics. 2023. Vol. 8. No. 5. 400.
6. Crawford B. et al. Q-learnheuristics: Towards data-driven balanced metaheuristics // Mathematics. 2021. Vol. 9. No. 16. 1839.
7. Wolpert D.H., Macready W.G. No free lunch theorems for optimization // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 1997. Vol. 1. No.1. P. 67–82.
8. Karaboga D., Basturk B. On the performance of artificial bee colony (ABC) algorithm // Applied soft computing. 2008. Vol. 8. No.1. P. 687–697.
9. Nouioua M., Li Z., Jiang S. New binary artificial bee colony for the 0–1 Knapsack problem // Advances in Swarm Intelligence: 9th International Conference, ICSI 2018, Shanghai, China, June 17–22, 2018, Proceedings, Part I 9. Springer International Publishing, 2018.
10. Pampará G., Engelbrecht A.P. Binary artificial bee colony optimization // 2011 IEEE Symposium on Swarm Intelligence. IEEE, 2011. P. 1–8.

Получена 13.08.2024

Принята в печать 02.09.2024

Received 13.08.2024

Accepted 02.09.2024

◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇ **ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ** ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

УДК 519.63

Алгоритм для численного решения диффузионно-реакционно-дрейфового уравнения с дробной производной по времени и координате

Мороз Л.И.*

Амурский государственный университет (ФГБОУ ВО АмГУ)
г. Благовещенск, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4450-3200>
e-mail: lubovep@mail.ru

Работа посвящена построению и программной реализации вычислительного алгоритма для моделирования процесса диффузионно-дрейфовой природы на основе дробно-дифференциального подхода. Математическая модель сформулирована в виде начально-краевой задачи для дробного по времени и пространству диффузионно-дрейфового уравнения с реакционным слагаемым в ограниченной области. Нецелые производные по времени и пространству рассмотрены в смысле Капуто и Римана – Лиувилля соответственно. Построена модифицированная неявная конечно-разностная схема. В концепции рассмотренной математической задачи приведен пример детерминированной модели процесса зарядки диэлектрических материалов. Разработана прикладная программа, реализующая сконструированный численный алгоритм. На примере решения тестовой задачи проведена верификация полученных результатов.

Ключевые слова: аномальная диффузионно-дрейфовая модель, дробная производная Римана – Лиувилля, дробная производная Капуто, неявная конечно-разностная схема, вычислительный эксперимент.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект № 122082400001-8.

Для цитаты:

Мороз Л.И. Алгоритм для численного решения диффузионно-реакционно-дрейфового уравнения с дробной производной по времени и координате // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 3. С. 105–117. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140306>

***Мороз Любовь Игоревна**, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории математического моделирования сложных физических и биологических



систем, Амурский государственный университет (ФГБОУ ВО АмГУ), г Благовещенск, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4450-3200>, e-mail: luboverp@mail.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время математическое моделирование является неотъемлемой частью современной науки и техники. Во многих случаях математическое моделирование основывается на использовании дифференциальных уравнений, позволяющих описать изменение системы с течением времени или определить реакцию на различные воздействия. Особое место среди них занимает уравнение диффузии и ее вариации: реакция-диффузия, адвекция-диффузия и др. Чаще всего уравнения диффузионного типа применяют для определения распространения различных веществ и перераспределения некоторых физических величин, например, таких как температура или плотность. В ряде случаев модели на основе классической диффузии недостаточно хорошо описывают экспериментальные данные. Например, когда средний квадрат смещения частиц не растет пропорционально времени, что характерно для классической диффузии. В таком случае говорят о процессе аномальной диффузии. Аномальная диффузия может возникать из-за множества физических механизмов: вязкоупругости среды или ее сложной пространственной структуры и многофазного состава, наличия ловушек (так, в кристаллических структурах в роли ловушек выступают включения инородных фаз, дислокации, границы зерен и т.д.). Кроме того, неклассическая диффузия возникает во фрактальных или самоподобных объектах. Процессы, происходящие в таких средах, могут сопровождаться значительными градиентными изменениями или очень длительным временем ожидания эффектов последствия [1]. Одним из подходов построения модели неклассической (аномальной) диффузии является применение аппарата дробно-дифференциального исчисления [1, 2, 3]. Использование в дифференциальных уравнениях дробной производной по времени позволяет учесть эффекты памяти, а дробная производная по координате находит применение при описании процессов в объектах со сложной и самоподобной структурой [4]. В отличие от обычных производных, которые являются локальными операторами, дробные производные являются нелокальными. Это означает, что значение дробной производной в точке зависит от значений функции в некоторой окрестности этой точки.

В концепции данной работы рассмотрим обобщенную на случай нецелых порядков дифференцирования модель нестационарного диффузионно-дрейфового процесса:

$$\frac{\partial^\alpha c(x,t)}{\partial t^\alpha} = d(x) \frac{\partial^\beta c(x,t)}{\partial x^\beta} - v(x) \frac{\partial c(x,t)}{\partial x} + q(x,t), \quad (1)$$

где $c(x,t)$ – функция, характеризующая состояние вещества, $d(x)$ – коэффициент диффузии, $q(x,t)$ – функция источника или стока, $0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq \beta \leq 2$ – порядки дробных производных, $v(x)$ – скорость процесса. В зависимости от физической

природы описываемого процесса слагаемое $\frac{\partial c(x,t)}{\partial x}$ в уравнении (1) может также называться адвекцией или конвекцией.

Заметим, что при варьировании порядков дробных производных в уравнении аномальной диффузии можно получить уравнения, определяющие режимы различной природы. Например, при фиксированном порядке $\beta = 2$ и $0 < \alpha < 1$ наблюдается процесс субдиффузии (замедленное блуждание), $\alpha = 1$ – классическая диффузия, $1 < \alpha < 2$ – супердиффузия (ускоренное блуждание), при $\alpha = 2$ получаем классическое волновое уравнение. Если $\alpha = \beta = 1$, то уравнение (1) является уравнением переноса [5].

На сегодняшний день дробная производная не имеет единого определения, и существует несколько подходов к её формулировке. Основные определения включают производные Римана – Лиувилля, Капуто, Грюнвальда – Летникова, Вейса, Рисса, каждое из которых имеет свои особенности и области применения [4]. Наиболее часто используемыми являются интегро-дифференциальные операторы Римана – Лиувилля и Капуто. Кроме различий в формулах производных, имеются отличия и в их свойствах. Так, в дробной производной Римана – Лиувилля дифференцируемая функция не обязательно должна быть непрерывной в нуле, но при этом производная Римана – Лиувилля от константы не равна нулю. В свою очередь, дробная производная Капуто, в отличие от производной Римана – Лиувилля, позволяет включить традиционные начальные и граничные условия в формулировку задачи [5]. Более того, если начальное условие неоднородное, то для дробной производной Римана – Лиувилля требуется добавление поправочного члена [6].

Наравне с поиском аналитических решений дробно-дифференциальных уравнений большое внимание уделяется получению приближенных решений. Широкое распространение при решении практических задач получил метод конечных разностей. Например, в [7] для одномерного уравнения адвекции-дисперсии с дробной производной по координате в смысле Римана – Лиувилля была предложена сдвинутая на один шаг вправо формула Грюнвальда – Летникова. Объединяя полученную формулу с методом Кранка – Николсон, авторы вывели безусловно устойчивую вычислительную схему. Явная и неявная схемы Эйлера первого порядка точности по времени и координате построены для аномального уравнения диффузии [8]. В работе [9] разработана конечно-разностная схема для решения уравнения аномальной диффузии с граничными условиями Дирихле. Дробные производные по времени и пространству рассматриваются в смысле Капуто и Римана – Лиувилля соответственно. Доказаны устойчивость и сходимость предлагаемой численной схемы при $\beta \in [0.5(\sqrt{17}-1); 2)$. Для уравнения аномальной диффузии с дробной адвекцией получены явная и неявная разностные схемы [10]. Доказано, что в отличие от условно устойчивой явной конечно-разностной схемы, неявная схема является безусловно устойчивой. Порядок сходимости двух методов не превышает единицы, как по времени, так и по пространству. В [11] предложена вычислительная схема высокого порядка точности, построенная на основе аппроксимаций производной Капуто. К недостатку данной схемы можно отнести то, что предварительно требуется знать значение второй производной искомой функции в начале отрезка.



К уравнениям диффузионного типа приводят модели зарядки диэлектрических материалов, описывающие процессы накопления и распределения заряда [12, 13]. Как правило, подобные модели строятся на основе уравнения непрерывности – дифференциального представления сохранения заряда, которое в одномерном случае представимо в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \lambda_n E_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + G, \quad (2)$$

где $\rho = \rho(x, t)$ – объемная плотность заряда, Кл/м³; L – геометрический размер объекта, м; E_x – напряженность поля, В/м; $G = G(x, t)$ – функция источника, Кл/(м³·с); D – коэффициент диффузии электронов, м²/с; λ_n – дрейфовая подвижность электронов, м²/(В·с).

Моделирование эффектов полевого воздействия электронного облучения на полярные диэлектрики представлено в работе [14]. Особый интерес среди полярных диэлектриков представляют сегнетоэлектрики, обладающих спонтанной поляризацией, которая может быть переориентирована под действием внешнего поля. Кроме того, сегнетоэлектрические материалы обладают свойствами самоподобия процессов зародышеобразования доменов, демонстрируют сложный скейлинг доменных конфигураций и эффекты памяти в процессе переключения поляризации [15].

На сегодняшний день исследователями разработано несколько направлений применения дробно-дифференциального аппарата к моделированию динамических откликов сегнетоэлектриков. Так, в работе [16] предложена модификация модели Колмогорова – Аврамы для расчета поляризационного тока. Диэлектрический отклик полидоменного сегнетоэлектрика вычислен на основе дробно-дифференциальной модификации уравнения колебаний [17]. Авторами работы [18] предложена квазистатическая модель диэлектрического гистерезиса. С использованием производной нецелого порядка выведена зависимость поляризации от приложенного электрического поля. Анализ солитонных решений нелинейных дробно-дифференциальных уравнений, возникающих в результате поляризации сегнетоэлектрических наночастиц, представлен в [19]. Показано, что модели с дробной производной лучше описывают экспериментальные данные.

Настоящая работа направлена на построение и программную реализацию вычислительного алгоритма, предназначенного для компьютерного моделирования аномальных диффузионно-дрейфовых процессов с последующим применением результатов при исследовании процессов зарядки сегнетоэлектриков для различных значений порядков дробного дифференцирования.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СХЕМА

Рассмотрим одномерную дробно-дифференциальную модификацию уравнения диффузионно-дрейфового типа:

$$\frac{\partial^\alpha c(x, \theta)}{\partial t^\alpha} = d \frac{\partial^\beta c(x, t)}{\partial x^\beta} - v \frac{\partial c(x, t)}{\partial x} + q(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (3)$$

где $\frac{\partial^\alpha c}{\partial t^\alpha}$ обозначает дробную производную в смысле Капуто, $0 < \alpha < 1$; $\frac{\partial^\beta c}{\partial x^\beta}$ – дробная производная Римана – Лиувилля, $1 < \beta < 2$; d, v – положительные параметры модели.

Дополним уравнение (3) начальным и граничными условиями:

$$c(x, 0) = c_0(x), \quad \text{при } 0 < x < L, \quad (4)$$

$$-d \left. \frac{\partial c(x, t)}{\partial x} \right|_{\Gamma} = \eta (c(x, t)|_{\Gamma} - c_b), \quad t > 0, \quad (5)$$

где η, c_b – положительные константы.

Отметим, что при решении практических задач в модели (3)–(5) требуется переход к нормированным переменным, так как в противном случае появляются величины с дробными размерностями, что затрудняет их физическую интерпретацию [11]. Разрешимость стационарной модели электронно-индуцированной зарядки неоднородного полярного диэлектрика исследовалась в [20].

При построении вычислительной схемы для аппроксимации производной Римана – Лиувилля воспользуемся формулой Грюнвальда – Летникова [4, 5]. Все свойства, характерные для производной Римана – Лиувилля, действительны и для формулы Грюнвальда – Летникова.

Согласно [4] под дробной производной Римана – Лиувилля функции $f(t)$, заданной на отрезке $[a, b]$, понимают выражение вида

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}, \quad (6)$$

где $n = [\alpha] + 1$, $\alpha > 0$, $[\alpha]$ – целая часть α , $\Gamma(\cdot)$ – Гамма-функция Эйлера.

Производную Капуто для функции $f(t)$ определим как [4]

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}. \quad (7)$$

Формулы (6) и (7) называются левосторонними дробными производными Римана – Лиувилля и Капуто соответственно.

Дробная производная Грюнвальда – Летникова произвольного порядка α определяется формулой [5]

$$\overset{GL}{d^\alpha f(t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k! \Gamma(\alpha-k+1)} f(t-k\Delta t), \quad (8)$$

где Δt – бесконечно малое приращение переменной t .



Пусть $\Omega_{\Delta t}^{\Delta x} = \{x_i = i(\Delta x), i = \overline{0, M}, t^j = j(\Delta t), j = \overline{0, N}\}$ – пространственно-временная сетка, покрывающая расчетную область, где Δx – шаг по координате, Δt – шаг по времени. Для построения модифицированной неявной конечно-разностной схемы воспользуемся $L1$ аппроксимацией дробной производной Капуто [9]

$$\frac{\partial^\alpha c(x_i, t^{j+1})}{\partial t^\alpha} = \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^j \mu_k^\alpha (c_i^{j+1-k} - c_i^{j-k}) + O(\Delta t^{2-\alpha}), \quad (9)$$

где $\mu_k^\alpha = (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}$, $k = \overline{0, M}$.

Для дискретизации производной по координате применим следующий конечно-разностный оператор:

$$\frac{\partial^\beta c(x_i, t^j)}{\partial x^\beta} = \frac{1}{(\Delta x)^\beta} \sum_{m=0}^{i+1} w_m c_{i-m+1}^{j+1} + O(\Delta x),$$

где $w_m = \frac{\Gamma(m-\beta)}{\Gamma(-\beta)\Gamma(m+1)}$ – нормированные веса Грюнвальда – Летникова.

В качестве приближения дрейфового слагаемого используем формулу дифференцирования назад – левую разность.

Поставим в соответствие непрерывной задаче (3)–(5) ее конечно-разностный аналог:

$$\frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^j \mu_k^\alpha (c_i^{j+1-k} - c_i^{j-k}) = \frac{d}{(\Delta x)^\beta} \sum_{m=0}^{i+1} w_m c_{i-m+1}^{j+1} - \nu \frac{c_{i+1}^{j+1} - c_i^{j+1}}{\Delta x} + q_i^{j+1}, \quad (10)$$

для $i = \overline{1, M-1}$, $j = \overline{0, N-1}$.

Заметим, что для аппроксимации первой производной по координате, в случае, когда требуется более высокий порядок точности вычислительной схемы, используют центральную конечно-разностную схему. Однако такая схема будет монотонна только при достаточно малых шагах сетки [21]. Чтобы избежать подобного рода ограничений для аппроксимации дрейфового слагаемого имеет смысл применить формулу Роберта – Вейсса.

Для дискретизации граничных условий воспользуемся левыми и правыми разностями, соответственно. Получившаяся конструкция неявной схемы, в отличие от ее целочисленного аналога, приводит к системе линейных алгебраических уравнений, в которой основная матрицы не обладает трехдиагональной структурой. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений на каждом временном слое проводилось методом Гаусса.

3. ТЕСТ-ПРИМЕР

Результат программной реализации алгоритма продемонстрируем на примере численного решения следующей тест-задачи. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения аномальной диффузии с дрейфовым и реакционным слагаемыми:

$$\frac{\partial^{0.5} u(x, t)}{\partial t^{0.5}} = \frac{\partial^{1.5} u(x, t)}{\partial x^{1.5}} - \frac{\partial u}{\partial x} + 2x^{0.5} \left(\frac{t^{1.5} x^{1.5}}{\Gamma(2.5)} - \frac{t^2 + 1}{\Gamma(1.5)} + x^{0.5} (t^2 + 1) \right), \quad (11)$$

$$0 < x < 1, \quad 0 < t < 1.$$

Математическую постановку задачи дополним начальным

$$u(x, 0) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (12)$$

и граничными условиями второго рода

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=1} = 2(t^2 + 1), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (14)$$

Точным решением задачи (8) является функция $u_{ex}(x, t) = x^2 (t^2 + 1)$.

В этом можно убедиться, если использовать формулу для вычисления производной нецелого порядка от степенной функции: $\frac{d^\alpha (t^p)}{dt^\alpha} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha}$.

Для решения класса задач в математической постановке (11)–(14) в ППП Matlab разработано программное приложение. Входными параметрами являются шаг по координате Δx и времени Δt ; концы отрезков x, t ; значения порядков производных α, β ; коэффициент диффузии d ; функция источника $f(x, t)$; начальное и граничные условия.

Сравнение приближенного решения, полученного на основе программной реализации конечно-разностной схемы (10) в последний момент времени $t = 1$ при $\Delta \delta = \Delta t = 0.04$, с аналитическим решением u_{ex} представлено на рис. 1а.

Значения относительной погрешности полученных результатов $\delta = \frac{\|u_{ex} - u\|}{\|u_{ex}\|}$ при варьировании количества узлов разбиений M, N , где u – численное решение задачи (11) – (14), показано на рис. 1б.

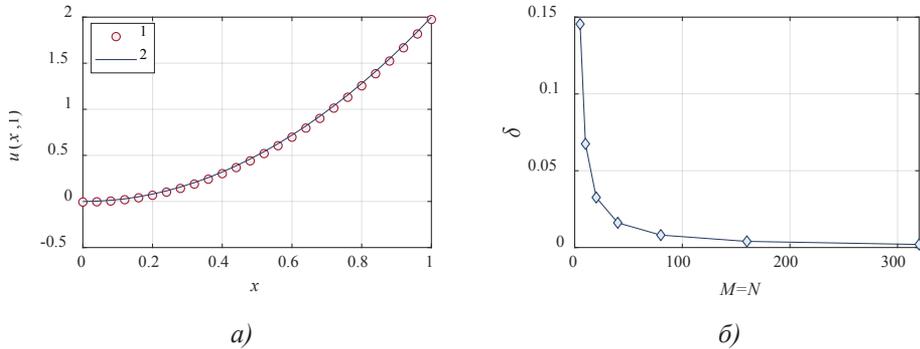


Рис. 1. Визуализация точного – 1 и приближенного – 2 решений тестовой задачи при $\Delta x = \Delta t = 0.04$ – а); относительная погрешность численного решения δ в зависимости от количества узлов M и N – б)

Кроме того, приведем результаты решения тестовой задачи при фиксировании значений одного порядка нецелой производной и варьировании другого, рис. 2а и рис. 2б.

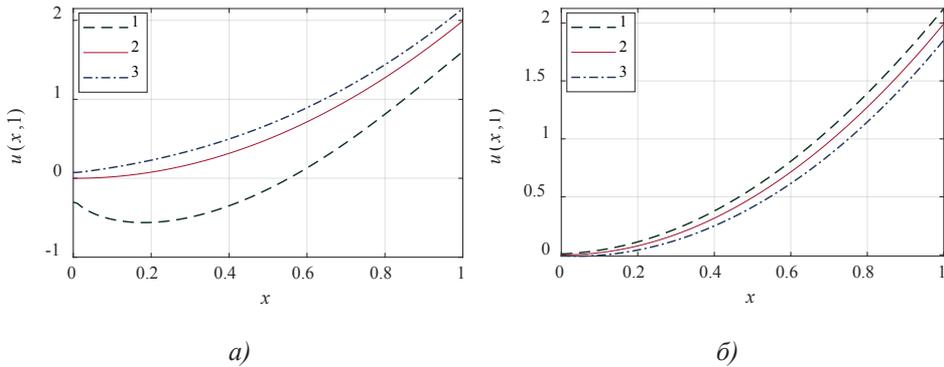


Рис. 2. Значение функции $u(x, t=1)$ для $\alpha = 0.5$ и $\beta = 1.1$ –1, $\beta = 1.5$ 2, $\beta = 1.9$ –3 – а); значение функции $u(x, t=1)$ для $\beta = 1.5$ и $\alpha = 0.1$ –1, $\alpha = 0.5$ –2, $\alpha = 0.9$ –3 – б)

Полученные данные свидетельствуют о существенном влиянии порядка нецелой производной на поведение функции. В данном примере уменьшение порядка дробной производной по координате β приводит к смещению графика и уменьшению значений искомой функции. Обратный процесс наблюдается для порядка дробной производной по времени α .

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе определений дробной производной Грюнвальда – Летникова и аппроксимации производной Капуто сконструирована неявная конечно-разностная схема для уравнения аномальной диффузии с дрейфовым и реакционным слагаемыми. Анализ полученных результатов свидетельствует о том, что выполненная схема соответствует порядку точности не ниже первого как по времени, так и по координате. Преимуществом представленной схемы является относительная простота реализации, и возможность применения на случай неоднородного начального условия. Также, было проведено исследование влияния порядков дробно-дифференциальных операторов на результаты моделирования, что может быть использовано в настройке модели в соответствии с закономерностями, наблюдаемыми в экспериментах. Полученные результаты могут быть применены в области математического моделирования диффузионных процессов, в частности, для прогнозирования уровня зарядки сегнетоэлектриков при электронном облучении средних энергий. Дальнейшие исследования будут направлены на развитие этого подхода и повышение точности вычислительной схемы.

Литература

1. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. Ульяновск: Изд-во «Артишок». 2008. 512 с.
2. *Deng W., Hou R., Wang W., Xu P.* Modeling Anomalous Diffusion. From Statistics to Mathematics. Singapore: World Scientific. 2020. 268 p.
3. *Evangelista L.R., Lenzi E.K.* Fractional diffusion equations and anomalous diffusion. Cambridge: Cambridge University Press. 2018. 345 p.
4. *Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.* Fractional integrals and derivatives: theory and applications. New York: Gordon and Breach. 1993. 1016 p.
5. *Васильев В.В., Симак Л.А.* Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. Киев: НАН Украины. 2008. 256 с.
6. *Scherer R., Kallab S.L., Tangc Y., Huang J.* The Grünwald – Letnikov method for fractional differential equations // *Computers & Mathematics with Applications*. 2011. Vol. 62. P. 902–917. DOI: 10.1016/j.camwa.2011.03.054
7. *Tadjeeran C., Meerschaert M.M.* A second-order accurate numerical method for the two-dimensional fractional diffusion equation // *Journal of Computational Physics*. 2007. Vol. 220. P. 813–823. DOI: 10.1016/j.jcp.2006.05.030
8. *Meerschaert M.M., Tadjeeran C.* Finite difference approximations for fractional advection–dispersion flow equations // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2004. Vol. 172. № 1. P. 65–77. DOI: 10.1016/j.cam.2004.01.033
9. *Cao J., Li C.* Finite difference scheme for the time-space fractional diffusion equations // *Open Physics*. 2013. Vol. 11. P. 1440–1456. DOI: 10.2478/s11534-013-0261-x
10. *Zhang F., Gao X., Xie Z.* Difference numerical solutions for time-space fractional advection diffusion equation // *Bound Value Probl.* 2019. Vol. 14. P. 1–11. DOI:10.1186/s13661-019-1120-5
11. *Мороз Л.И., Масловская А.Г.* Численное моделирование процесса аномальной диффузии на основе схемы повышенного порядка точности // *Математическое моделирование*. 2020. Т. 32. № 10. С. 62–76. DOI: 10.20948/mm-2020-10-05
12. *Рау Э.И., Евстафьева Е.Н., Андрианов М.В.* Механизмы зарядки диэлектриков при их облучении электронными пучками средних энергий // *Физика твердого тела*. 2007. Т. 50. Вып. 4. С. 599–607.



13. *Chezganov D.S., Kuznetsov D.K., Shur V.Ya.* Simulation of spatial distribution of electric field after electron beam irradiation of MgO-doped LiNbO₃ covered by resist layer. // *Ferroelectrics*. 2016. Vol. 496. P. 70–78. DOI: 10.1080/00150193.2016.1157436
14. *Maslovskaya A.G., Pavelchuk A.V.* Simulation of delay reaction-drift-diffusion system applied to charging effects in electron-irradiated dielectrics // *Proc. of IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*. 2019. P. 012009 (6). DOI: 10.1088/1742-6596/1163/1/012009
15. *Moroz L.I., Maslovskaya A.G.* Hybrid stochastic fractal-based approach to modeling the switching kinetics of ferroelectrics in the injection mode // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2020. Vol. 12. P. 348–356. DOI:10.1134/S0234087919090077
16. *Мейланов Р.П., Садыков С.А.* Фрактальная модель кинетики переключения поляризации в сегнетоэлектриках // *Журнал технической физики*. 1999. Т. 69. С. 128–129.
17. *Galiyarova N.M.* Fractal dielectric response of multidomain ferroelectrics from the irreversible thermodynamics standpoint // *Ferroelectrics*. 1999. Vol. 222. P. 381–387. DOI:10.1080/00150199908014841
18. *Ducharne B., Sebald G., Guyomar D.* Time fractional derivative for frequency effect in ferroelectrics // 18th IEEE International Symposium on the Applications of Ferroelectrics. 2009. P. 1–4. DOI: 10.1109/ISAF.2009.5307619
19. *Asghari Y., Eslami M., Rezazadeh H.* Soliton solutions for the time-fractional nonlinear differential-difference equation with conformable derivatives in the ferroelectric materials // *Optical and Quantum Electronics*. 2023. Vol. 55: P. 289–230. DOI: 10.1007/s11082-022-04497-8
20. *Бризицкий Р.В., Максимова Н.Н., Масловская А.Г.* Теоретический анализ и численная реализация стационарной диффузионно-дрейфовой модели зарядки полярных диэлектриков // *Математическая физика*. 2022. Т. 62. С. 1696–1706. DOI:10.31857/S0044466922100039
21. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения задач конвекциидиффузии. М: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». 2015. 248 с.



An Algorithm for the Numerical Solutions of the Time-Space Fractional Reaction-Diffusion-Drift Equation

Lubov I. Moroz*

Amur State University (ASU), Blagoveshchensk, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4450-3200>

e-mail: lubovep@mail.ru

The paper is devoted to the construction and program implementation of the computational algorithm for modeling a process of diffusion-drift nature based on the fractional diffusion approach. The mathematical model is formulated as an initial-boundary value problem for the time-space fractional diffusion-drift equation in a limited domain. Time and space fractional derivatives are considered in the sense of Caputo and Riemann – Liouville, respectively. A modified implicit finite-difference scheme is constructed. The concept of the considered mathematical problem provides an example of a deterministic model of the charging process of dielectric materials. An application program has been developed that implements the constructed numerical algorithm. The results were verified using the example of solving a test problem.

Keywords: anomalous drift diffusion model, Riemann – Liouville fractional derivative, Caputo fractional derivative, implicit finite difference scheme, computational experiment.

Funding. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. 122082400001–8).

For citation:

Moroz L.I. An Algorithm for the Numerical Solutions of the Time-Space Fractional Reaction-Diffusion-Drift Equation. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 3, pp. 105–117. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140306> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Uchajkin V.V. *Metod drobnnykh proizvodnykh. Ul'yanovsk: Izd-vo «Artishok», 2008. 512 p. (In Russ.)*.
2. Deng W., Hou R., Wang W., Xu P. *Modeling Anomalous Diffusion. From Statistics to Mathematics*. Singapore: World Scientific, 2020. 268 p.

***Lubov I. Moroz**, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Leading Researcher, Laboratory for Modeling Complex Physical and Biological Systems, Amur State University (ASU), Blagoveshchensk, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4450-3200>, e-mail: lubovep@mail.ru



3. Evangelista L.R., Lenzi E.K. Fractional diffusion equations and anomalous diffusion. Cambridge: Cambridge University Press, 2018. 345 p.
4. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*. New York: Gordon and Breach, 1993. 1016 p.
5. Vasilyev V.V., Simak L.O. *Drobnoe ischislenie i approksimatsionnye metody v modeli-rovanii dinamicheskikh sistem*. Kiev: NAN Ukraine, 2008, 256 p. (In Russ.).
6. Scherera R., Kallab S.L., Tancg Y., Huang J. The Grünwald – Letnikov method for fractional differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*. 2011. Vol. 62. pp. 902–917. DOI: 10.1016/j.camwa.2011.03.054
7. Tadjeran C., Meerschaert M.M. A second-order accurate numerical method for the two-dimensional fractional diffusion equation. *Journal of Computational Physics*. 2007. Vol. 220. pp. 813–823. DOI: 10.1016/j.jcp.2006.05.030
8. Meerschaert M.M., Tadjeran C. Finite difference approximations for fractional advection–dispersion flow equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2004. Vol. 172, no. 1, pp. 65–77. DOI: 10.1016/j.cam.2004.01.033
9. Cao J., Li C. Finite difference scheme for the time-space fractional diffusion equations. *Open Physics*. 2013. Vol. 11. pp. 1440–1456. DOI: 10.2478/s11534-013-0261-x
10. Zhang F., Gao X., Xie Z. Difference numerical solutions for time-space fractional advection diffusion equation. *Bound Value Probl*. 2019. Vol. 14. pp. 1–11. DOI:10.1186/s13661-019-1120-5
11. Moroz L.I., Maslovskaya A.G. CHislennoe modelirovanie processa anomal'noj diffuzii na osnove skhemy povyshennogo poryadka tochnosti. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2020. Vol. 32, no. 10, pp. 62–76. DOI: 10.20948/mm-2020-10-05. (In Russ.).
12. Rau E.I., Evstafyeva E.N., Andrianov M.V. Mekhanizmy zaryadki dielektrikov pri ikh obluchenii elektronnyimi puchkami srednikh energiy. *Fizika tverdogo tela*. 2007. Vol. 50. no. 4. pp. 599–607. (In Russ.).
13. Chezganov D.S., Kuznetsov D.K., Shur V.Ya. Simulation of spatial distribution of electric field after electron beam irradiation of MgO-doped LiNbO₃ covered by resist layer. *Ferroelectrics*, 2016. Vol. 496, pp.70–78. DOI: 10.1080/00150193.2016.1157436
14. Maslovskaya A.G., Pavelchuk A.V. Simulation of delay reaction-drift-diffusion system applied to charging effects in electron-irradiated dielectrics. *Proc. of IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*, 2019, pp. 012009 (6). DOI: 10.1088/1742-6596/1163/1/012009
15. Moroz L.I., Maslovskaya A.G. Hybrid stochastic fractal-based approach to modeling the switching kinetics of ferroelectrics in the injection mode. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2020. Vol. 12, pp.348–356. DOI:10.1134/S0234087919090077
16. Mejlanov R.P., Sadykov S.A. Fraktal'naya model' kinetiki pereklyucheniya polyarizacii v segnetoelektrikah. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, 1999. Vol. 69, pp. 128–129. (In Russ.).
17. Galiyarova N.M. Fractal dielectric response of multidomain ferroelectrics from the irreversible thermodynamics standpoint. *Ferroelectrics*, 1999. Vol. 222, pp. 381–387. DOI: 10.1080/00150199908014841
18. Ducharme B., Sebald G., Guyomar D. Time fractional derivative for frequency effect in ferroelectrics. *18th IEEE International Symposium on the Applications of Ferroelectrics*, 2009, pp. 1–4. DOI: 10.1109/ISAF.2009.5307619
19. Asghari Y., Eslami M., Rezazadeh H. Soliton solutions for the time-fractional nonlinear differential-difference equation with conformable derivatives in the ferroelectric materials. *Optical and Quantum Electronics*. 2023. Vol. 55. pp. 289–230. DOI: 10.1007/s11082-022-04497-8



20. Brizickij R.V., Maksimova N.N., Maslovskaya A.G. Teoreticheskij analiz i chislennaya realizaciya stacionarnoj diffuzionno-drejfovoj modeli zaryadki polyarnyh dielektrikov. *Matematicheskaya fizika*, 2022 Vol. 62, pp. 1696–1706. DOI:10.31857/S0044466922100039(In Russ.).
21. Samarskij A.A., Vabishchevich P.N. *Chislennye metody resheniya zadach konvekcii i diffuzii*. M: Knizhnyj dom «LIBROKOM», 2015. 248 p. (In Russ.).

Получена 19.07.2024

Принята в печать 20.08.2024

Received 19.07.2024

Accepted 20.08.2024

◆◆◆◆◆ КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ ◆◆◆◆◆

УДК 004.42

Количественная оценка степени сформированности навыков командной деятельности

Михайловский М.А.*

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7399-2800>
e-mail: muxa172002@yandex.ru

Ермаков С.С.**

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4330-2618>
e-mail: ermakovss@mgppu.ru

Юрьева Н.Е.***

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1419-876X>
e-mail: yurieva.ne@gmail.com

В статье представлена методология количественной оценки сформированности навыков командной деятельности с использованием схемы треугольника и математических моделей на основе матриц вероятностей переходов. Исследование фокусируется на анализе индивидуальной и совместной согласованной деятельности участников в экспериментальных условиях, заключающихся в работе на тренажере по совместному управлению воздушным судном. В анализе результатов применяются цепи Маркова, что позволяет детализировать динамику выполнения задач, выявляя ключевые аспекты взаимодействия участников. Результаты подтверждают эффективность предложенного подхода для анализа и улучшения координации действий в команде.

Ключевые слова: психологическая диагностика, навыки командной работы, совместная деятельность, компьютерный тренажер.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства просвещения Российской Федерации, государственное задание № 073-



00037-24-02 от 09.04.2024 г. «Разработка программно-аппаратного реабилитационного комплекса для формирования навыков командной работы на основе современных методов математической психологии».

Для цитаты:

Михайловский М.А., Ермаков С.С., Юрьева Н.Е. Количественная оценка степени сформированности навыков командной деятельности // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 3. С. 118–134. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140307>

***Михайловский Михаил Александрович**, лаборант-исследователь, молодежная лаборатория «Информационные технологии для психологической диагностики», Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Россия, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7399-2800>, e-mail: muxa172002@yandex.ru

****Ермаков Сергей Сергеевич**, кандидат психологических наук, старший научный сотрудник лаборатории «Информационные технологии для психологической диагностики», доцент кафедры «Возрастная психология имени профессора Л.Ф. Обухова» факультета «Психология образования», доцент кафедры «Прикладная математика» факультета «Информационные технологии», Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), Москва, Россия, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4330-2618>, e-mail: ermakovss@mgppu.ru

*****Юрьева Наталья Евгеньевна**, кандидат технических наук, заведующая лабораторией, молодежная лаборатория «Информационные технологии для психологической диагностики», Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Россия, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1419-876X>, e-mail: yurieva.ne@gmail.com

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение процесса формирования и объективной количественной оценки навыков командной деятельности приобретает все большее значение в современных исследованиях. Особенно актуально это для подготовки операторов сложных технических систем, включая экипажи воздушных судов.

Традиционные подходы к оценке навыков командной работы, несмотря на сохраняющуюся актуальность, часто оказываются недостаточными для объективной количественной оценки, требующейся в условиях высокоавтоматизированных и динамических систем. В этом контексте становится необходимым разработка методологий, которые могут интегрировать формальные методы анализа и современные математические модели для более точного и всестороннего анализа командного взаимодействия.

Одним из перспективных подходов в этой области является использование «схемы треугольника», предложенной в работе [1], которая позволяет оценивать навыки командной деятельности на основе анализа взаимодействия участников как в индивидуальном, так и в командном контексте. Применяемый аппарат анализа опирается на сравнения матриц вероятностей переходов между типами элементарных операций, что позволяет анализировать динамику деятельности.



2. МЕТОДОЛОГИЯ ОЦЕНКИ НАВЫКОВ КОМАНДНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

При оценке навыков командной деятельности по «схеме треугольника» [1] пара испытуемых реализует вместе и индивидуально согласованную деятельность, например, совместное пилотирование воздушного судна. Работа направлена на достижение конкретной цели, понятной испытуемым. В процессе деятельности применяется специализированный программно-аппаратный комплекс для регистрации протоколов деятельности и формирования матриц вероятностей переходов между типами операций [9].

Валидность оценки степени сформированности навыков командной работы определяется структурой сравнений по «схеме треугольника» (рисунок 1).

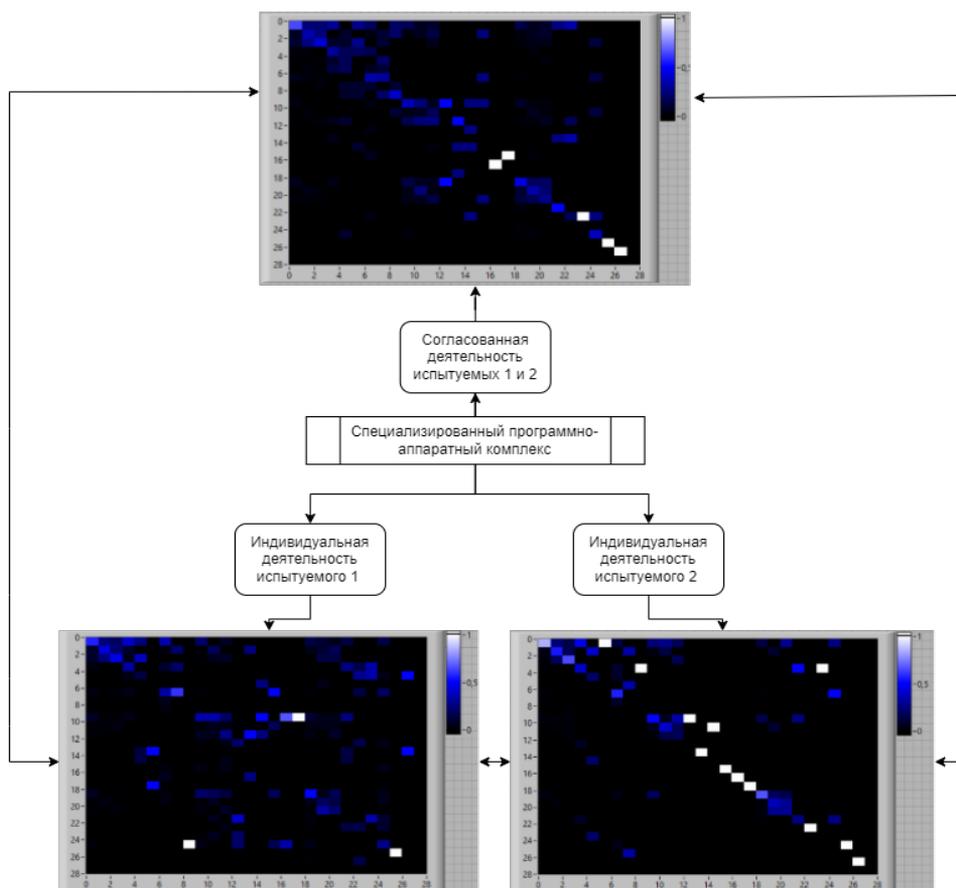


Рис. 1. Оценка навыков командной деятельности по «схеме треугольника», предполагающей сопоставление согласованных действий испытуемых, выполненных в паре и индивидуально



Согласно этой схеме, согласованная деятельность испытуемых сопоставляется с их индивидуальной деятельностью, которая служит эталоном согласованных командных действий. Использование матриц вероятностей переходов между типами элементарных операций в сочетании с построением сопутствующих квантовых представлений и их сравнениями в спектральной метрике [8; 11–14] позволяет проводить количественные сопоставления различных вариантов действий испытуемых и учитывать особенности конкретной выполняемой работы.

Применение «схемы треугольника» включает три основных этапа:

1. индивидуальная деятельность первого участника;
2. индивидуальная деятельность второго участника;
3. согласованная деятельность обоих участников.

Анализ полученных результатов позволяет выявить особенности индивидуальной деятельности и оценить степень согласованности в совместной работе.

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СОГЛАСОВАННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ИСПЫТУЕМЫХ

Следуя работам [2; 13; 14], согласованная деятельность испытуемых формализуется посредством матриц вероятностей переходов между выполняемыми ими элементарными операциями. Рассматриваемая модель, названная математической моделью сопутствующей деятельности, представляет вероятностную динамику выполнения рассматриваемых типов элементарных операций как марковский процесс с дискретными состояниями и дискретным временем (цепь Маркова):

$$p(t+1) = M_l p(t),$$

где t – дискретное время; $0 \leq t \leq T; t, T \in N$; T – конечный момент времени; N – множество натуральных чисел; n – число типов элементарных операций (совпадает с числом состояний цепи Маркова); вектор $p(t) = (p_0(t), \dots, p_{n-1}(t))^T$ – представляет вероятности пребывания в состояниях цепи Маркова (т. е. выполнения различных типов элементарных операций) в момент времени t ; $M_l = \|m_{ij,l}\|$ – марковский оператор, представленный стохастической матрицей вероятностей переходов между состояниями цепи Маркова порядка n , в которой $m_{ij,l}$ – вероятность перехода из состояния j в состояние i для исследуемого фрагмента деятельности l . Диапазон значений индекса l определяется прикладной задачей, его использование обусловлено необходимостью различать образцы деятельности операторов.

Эффективность решения прикладных задач регулируется степенью детализации учитываемых элементарных операций, представляющих и конкретизирующих адаптацию модели к предметной области [10].

Данные о деятельности участников представляются в виде матриц вероятностей переходов (рисунок 2) между типами выполняемых элементарных операций. Сравнение этих матриц позволяет выявить особенности индивидуальной и совместной



деятельности, оценить уровень согласованности действий и определить ключевые аспекты взаимодействия [6].

Матрица вероятностей переходов представляет собой квадратную матрицу, где каждая строка и каждый столбец соответствуют различным типам допустимых элементарных операций, выполняемых участниками. Элементами матрицы являются вероятности переходов от одного типа операций к другому в последующий момент времени [7].

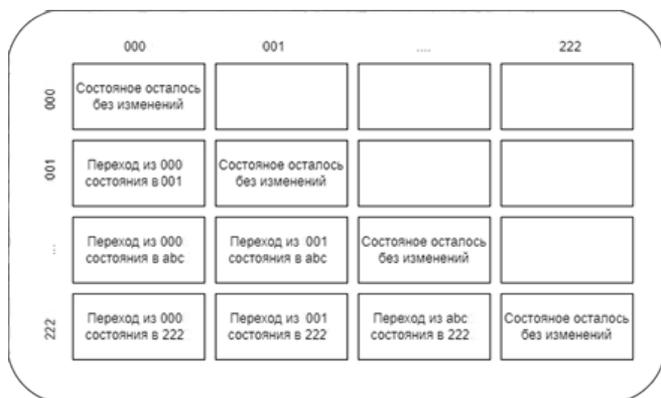


Рис. 2. Структура матрицы вероятностей переходов между 33 типами выполняемых элементарных операций

Каждой из таких матриц может быть поставлен в соответствие полносвязный граф, позволяющий анализировать взаимодействия между типами элементарных операций (рисунок 3).

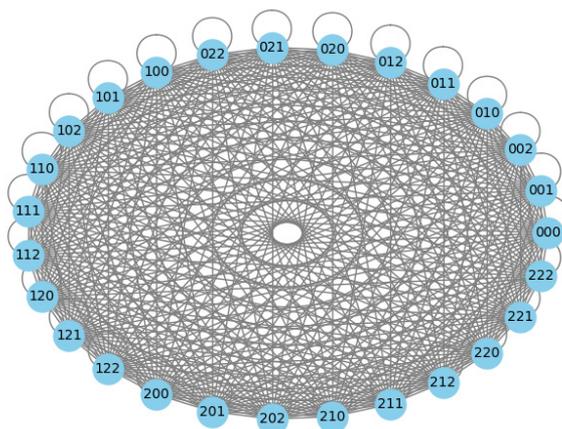


Рис. 3. Полносвязный граф



Такой граф наглядно демонстрирует все возможные переходы и связи, что полезно для моделирования и оптимизации сложных процессов.

4. АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Для исследования возможностей рассматриваемого подхода были проведены эксперименты в двух различных образовательных учреждениях: в каждом учреждении проводилось три эксперимента на паре лиц с расстройствами аутистического спектра, результаты которых показаны в таблицах 1 и 2. Следуя работам [11–12], полученные количественные оценки выражаются через Λ -статистики Уилкса.

Таблица 1

Значения обратной статистики Уилкса ($1-\lambda$) в первом эксперименте

Эксперимент	Первый участник	Второй участник	Совместная деятельность
Первый	0,121	0,340	0,130
Второй	0,056	0,066	0,077
Третий	0,161	0,082	0,154

Таблица 2

Значения обратной статистики Уилкса ($1-\Lambda$) экспериментов во втором эксперименте

Эксперимент	Первый участник	Второй участник	Совместная деятельность
Первый	0,054	0,477	0,251
Второй	0,053	0,298	0,333
Третий	0,046	0,266	0,237

В первом эксперименте участвовали ученики 9-го класса, все участники были мужского пола. Во втором эксперименте в исследовании приняли участие студенты 3-го и 4-го курсов, также мужского пола.

Тестирование проводилось на летном тренажере, представляющем собой программно-аппаратный комплекс, имитирующий для работающих на нем испытуемых полет воздушного судна [1; 3–5]. Он управляется экипажем с разделением между пилотами каналов управления, которые в реальном полете контролирует один человек. Экипаж в составе двух находящихся рядом пилотов должен обеспечить корректное управление воздушным судном путем согласованных действий, получая в реальном времени в удобной, понятной и доступной форме информацию о результатах своей деятельности, включая отображение положения воздушного судна относительно земной поверхности [10–11].

Эксперимент прошел в штатном режиме. Однако во время первого полета у некоторых участников возникли сложности в управлении, что является типичным для



начальных этапов освоения нового материала. Несмотря на это, к третьему эксперименту все участники успешно разобрались с задачами и продемонстрировали заметное улучшение в управлении и координации действий, как в индивидуальной, так и в командной работе.

После нормализации данных с целью сравнительной оценки результатов первого и второго участника и их совместной деятельности были получены следующие результаты (см. таблицы 3, 4).

Таблица 3

Результаты первого эксперимента

Эксперимент	Первый участник	Второй участник	Совместная деятельность
Первый	1	2,81	1,07
Второй	1	1,17	1,38
Третий	1	0,5	0,9

Таблица 4

Результаты второго эксперимента

Эксперимент	Первый участник	Второй участник	Совместная деятельность
Первый	1	8,83	4,64
Второй	1	5,62	6,28
Третий	1	5,78	5,15

Для анализа данных были построены графы, представляющие матрицы вероятностей переходов между типами операций. Визуализация этих графов позволяет наглядно представить и сравнить действия участников, выявить ключевые особенности их индивидуальной и совместной деятельности (рисунки 4–7).

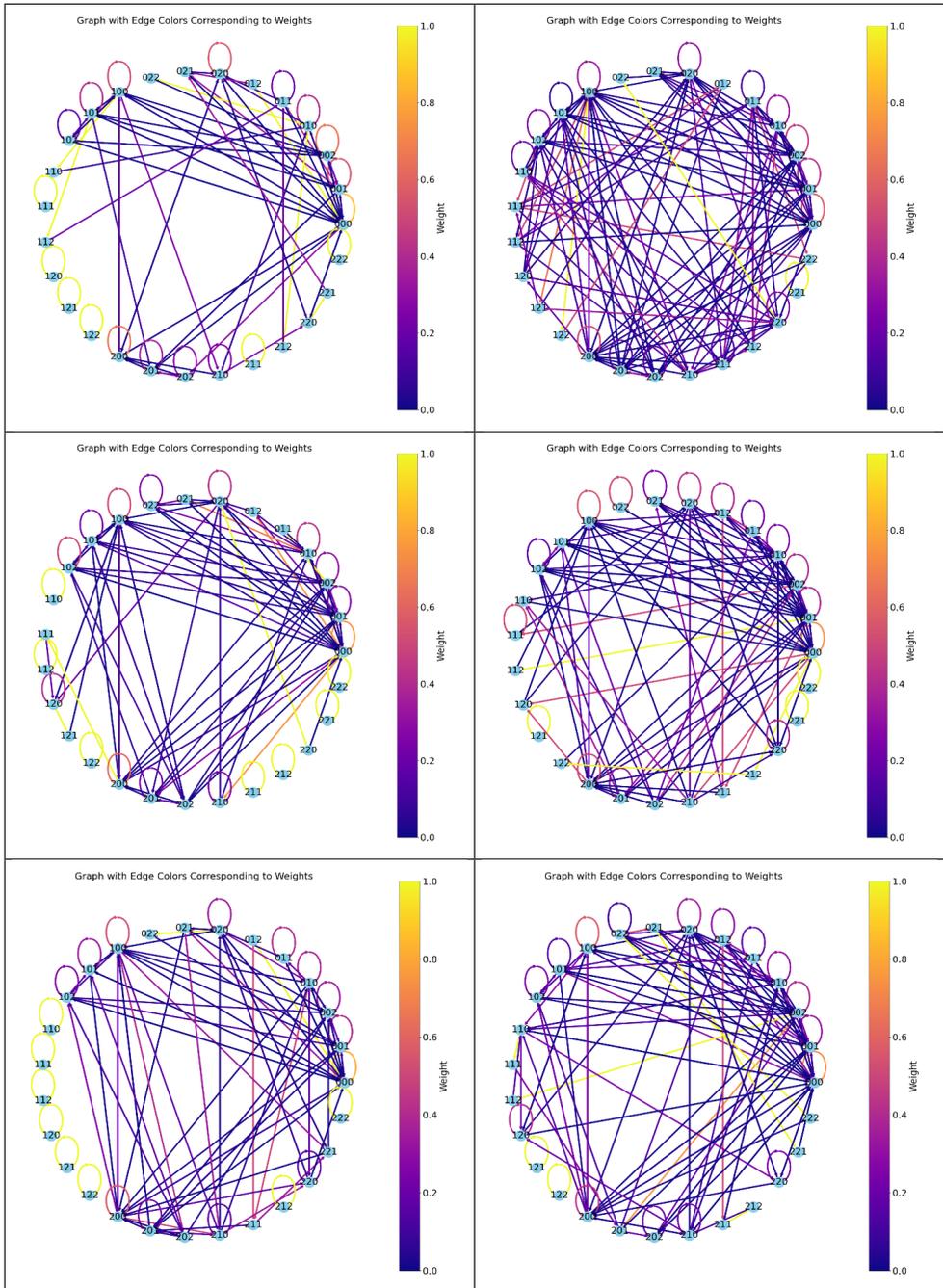


Рис. 4. Графы, построенные на основе матриц вероятностного перехода первого и второго участников первого эксперимента

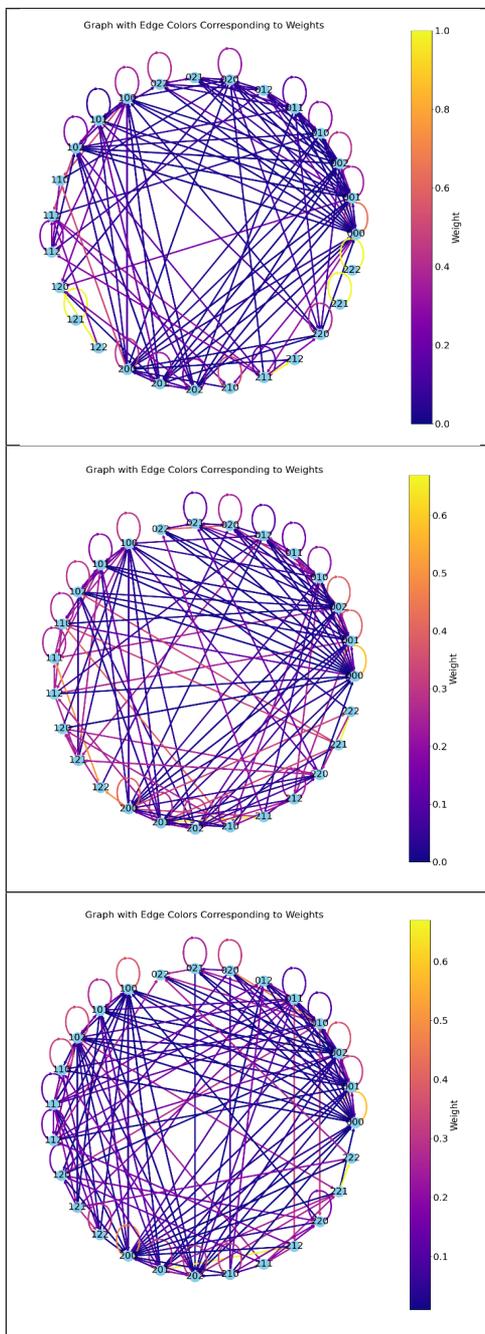


Рис. 5. Графы, построенные на основе матриц вероятностей переходов для представления совместной деятельности первого эксперимента

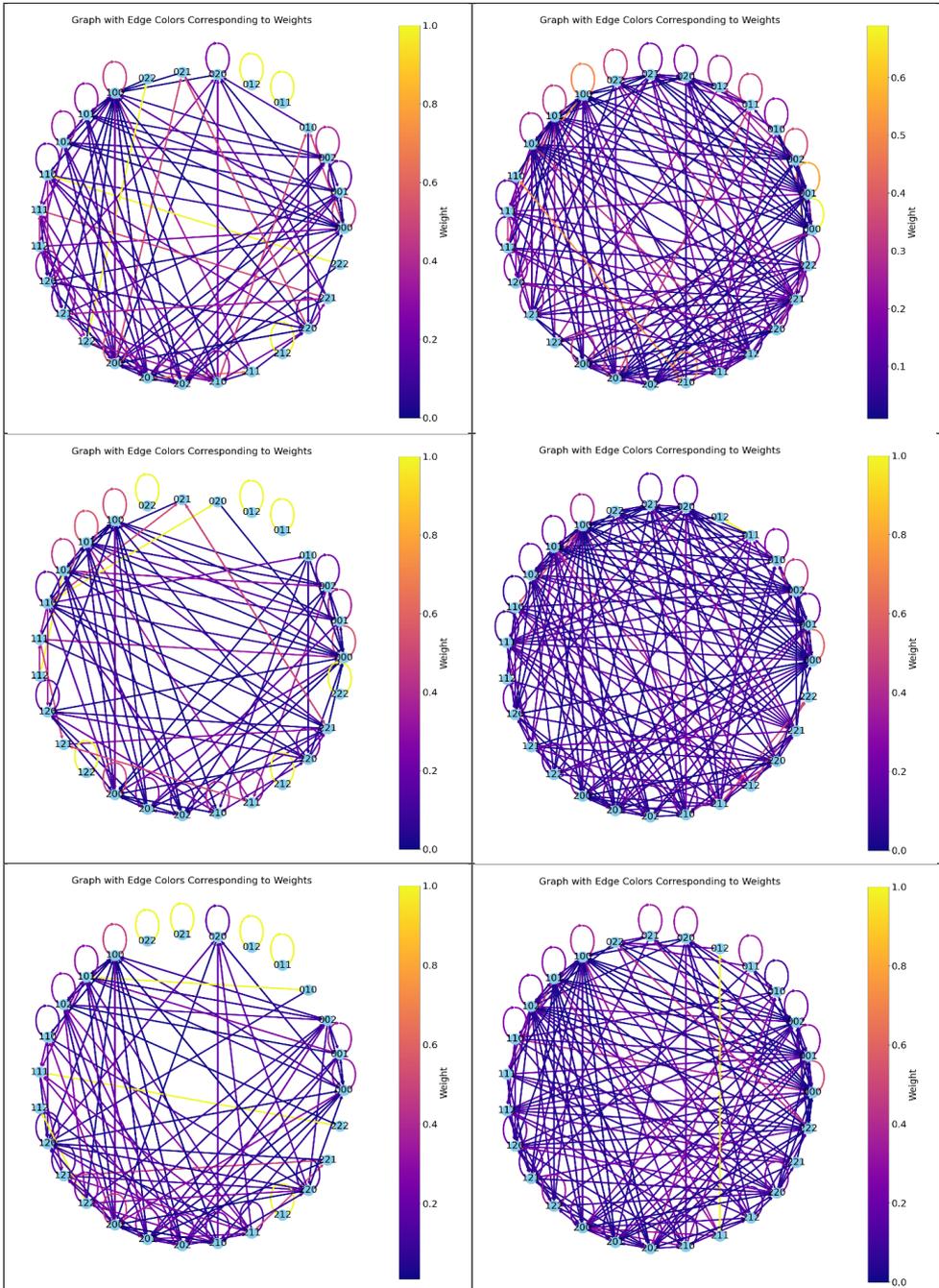


Рис. 6. Графы, построенные на основе матриц вероятностей переходов для первого и второго участников второго эксперимента

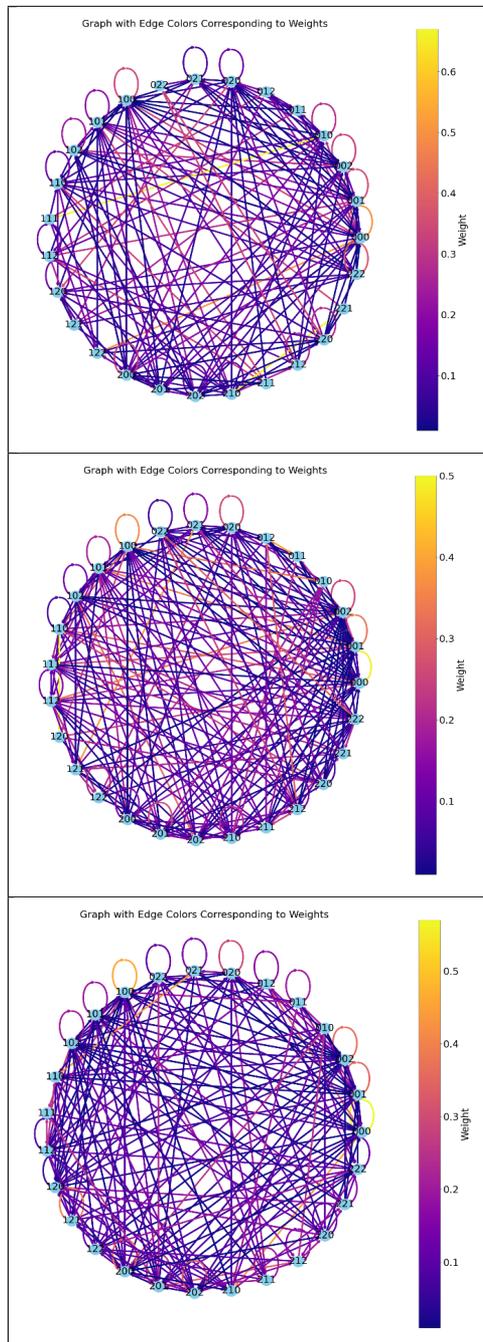


Рис. 7. Графы, построенные на основе матриц вероятностей переходов для совместной деятельности в рамках второго эксперимента



Анализ результатов первого эксперимента демонстрирует, что второй участник показал прогресс на 82,2% в навыках индивидуальной деятельности, что свидетельствует о значительном улучшении его навыков и повышении эффективности работы. Значения статистики Уилкса показывают, что первый пилот превосходит второго по качеству пилотирования, что подтверждает его более высокий уровень навыков.

Совместная деятельность также продемонстрировала улучшение: показатели снизились с 1,07 в первом эксперименте до 0,9 в третьем, что говорит о повышении координации и эффективности в командной работе. Это позволяет предположить, что существует положительная корреляция между прогрессом второго пилота и улучшением их совместной деятельности, что подчеркивает важность индивидуального роста для успешной командной работы.

Результаты второго эксперимента, демонстрируют, что первый участник показал стабильные показатели.

Второй участник продемонстрировал значительное улучшение: его результаты снизились с 8,83 в первом эксперименте до 5,78 в третьем, что указывает на успешную адаптацию к задачам и повышение эффективности выполнения работы.

Совместная деятельность в основном соответствует показателям второго пилота и изменяется по мере его развития. В начале первый пилот положительно влияет на взаимодействие, однако к третьему эксперименту, вероятно из-за усталости первого пилота, происходит перераспределение ролей, и второй пилот начинает доминировать, что отражается на результатах.

5. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Проведённое исследование подтвердило высокую эффективность представленного подхода к анализу взаимодействий как на индивидуальном, так и на командном уровнях. Использование схемы оценки, основанной на сравнении индивидуальных и согласованных действий, позволило выявить важные аспекты взаимодействия и уровня координации между участниками экспериментов.

Экспериментальные данные подтвердили, что «схема треугольника» не только помогает выявить особенности индивидуального выполнения заданий, но и позволяет оценивать степень согласованности в командной деятельности. Применение матриц вероятностей переходов между типами элементарных операций, обеспечило подробный количественный анализ взаимодействий, способствуя более глубокому пониманию динамики изменений в навыках участников и их влияния на общую эффективность команды.

Результаты экспериментов показали значительное улучшение координации действий и качества выполнения задач по мере накопления опыта и адаптации участников. Эффективность совместной деятельности увеличивалась по мере развития индивидуальных навыков, что подчеркивает значимость как индивидуального, так и командного обучения для достижения оптимальных результатов. Особое внимание следует уделить динамическому распределению ролей и взаимной поддержке внутри команды, что также отражается на изменениях показателей совместной деятельности.



Таким образом, «схема треугольника», применяемая в данном исследовании, доказала свою ценность как инструмент для глубокого анализа и объективной количественной оценки навыков командной работы. Обнаруженные улучшения и значимые аспекты взаимодействия подчеркивают необходимость продолжения исследований в этом направлении с целью дальнейшего совершенствования методик оценки и развития навыков командной деятельности в сложных технических системах.

Литература

1. Куравский Л.С., Юрьев Г.А., Михайловский М.А., Несимова А.О., Юрьева Н.Е., Поляков Б.Ю. Формирование навыков командной деятельности и их объективная количественная оценка на основе квантовых представлений // Экспериментальная психология. 2024. Том 17. № 2. С. 154–177. DOI: 10.17759/exppsy.2024170210
2. Куравский Л.С., Козырев А.Д., Грешников И.И. Математическая модель сопутствующей деятельности пилотов и ее применение для объективной оценки его состояния и профессиональной подготовки // Экспериментальная психология. Том 17. № 1. С. 161–180. DOI:10.17759/exppsy.2024170111
3. Ермаков С.С., Савенков. Е.А., Катыхшев Д.А. Влияние современных симуляционных тренажеров на развитие навыков командной работы: согласованных действий и коммуникации // Экспериментальная психология. 2024. Том 13. № 2. С. 131–141.
4. Ермаков С.С., Быстрова Ю.А. Анализ исследований роли компьютерных тренажеров в формировании, измерении и совершенствовании навыков командной работы // Экспериментальная психология. 2024. Том 17. № 2. С. 113–127.
5. Грешников И.И., Куравский Л.С., Юрьев Г.А. Принципы построения программно-аппаратного комплекса для интеллектуальной поддержки экипажа и оценки уровня его подготовки // Моделирование и анализ данных. 2021. Том 11. № 2. С. 5–30. DOI: 10.17759/mda.2021110201
6. A. Kabi, M. Dhar, P. Arora, B.B. Bhardwaj, N. Chowdhury, S. Rao Effectiveness of a Simulation-Based Training Program in Improving the Preparedness of Health Care Workers Involved in the Airway Management of COVID-19 Patients // Cureus. 2021. Vol. 13(8). Article ID e17323. 8 p. DOI: 10.7759/CUREUS.17323
7. Rasch G. Probabilistic models for some intelligence and attainment tests. (Copenhagen, Danish Institute for Educational Research), expanded edition with foreword and afterword by B.D. Wright. Chicago: The University of Chicago Press, 1980.
8. Nielsen Michael A. & Chuang Isaac L. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press, 2010. 702
9. Kuravsky L.S., Yuryev G.A., Zlatomrezhev V.I. New approaches for assessing the activities of operators of complex technical systems // Experimental psychology (Russia). 2019. Vol. 12. № 4. 27–49. DOI:10.17759/exppsy.2019120403
10. Kuravsky L.S., Yuryev G.A. A novel approach for recognizing abnormal activities of operators of complex technical systems: three non-standard metrics for comparing performance patterns [Электронный ресурс] // International Journal of Advanced Research in Engineering and Technology (IJARET). 2020. Vol. 11(4). P. 119–136. URL: <http://www.iaeme.com/IJARET/issues.asp?JType=IJARET&VType=11&IType=4> (дата обращения: 06.07.2024).]
11. Kuravsky L.S., Greshnikov I.I., Yuryev G.A., Zlatomrezhev V.I. Synthesis of Civil Aircraft Control Using Empirical Data and Quantum Filtering // Lobachevskii J. Math. 2023. 44(6). P. 2079–2100.
12. Kuravsky L.S., Greshnikov I.I., Kozыrev A.D., Kosachevsky S.G., Frolova L.I., Zakharcheva A.A. A mathematical model for representing the related operator professional activities and its relevant



- diagnostic assessment based on the quantum representations // Lobachevskii J. Math. 2024. 45(6), pp. 2549–2566. DOI: 10.1134/S1995080224602819
13. *Kuravsky L.S.* Simplification of Solving Diagnostics Problems by Convolution of Applied Markovian Models into the Quantum Representations // Lobachevskii J. Math. 2022. 43(7). P. 1669–1682.
 14. *Kuravsky L.S.* Modeling Dynamical Behavior of Stochastic Systems: Spectral Analysis of Qubit Representations vs the Mutual Markovian Model Likelihood Estimations // Lobachevskii J. Math. 2021. Vol. 42(10). P. 2364–2376.



Quantitative Assessment of Degree Formation of Teamwork Skills

Michael A. Mikhailovsky*

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7399-2800>

e-mail: muxa172002@yandex.ru

Sergey S. Ermakov**

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4330-2618>

e-mail: ermakovss@mgppu.ru

Nataliya E. Yuryeva***

Moscow State University of Psychology and Education, Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1419-876X>

e-mail: yurieva.ne@gmail.com

The article presents a method for quantifying teamwork skills formation using a triangular scheme and mathematical models based on transition probability matrices. The study focuses on analyzing individual and jointly coordinated activities of participants under experimental conditions, involving working on a simulator for jointly controlling an aircraft. Markov chains are used to analyze the results, allowing for detailed analysis of task completion dynamics and identification of key aspects of participant interaction. The findings confirm the effectiveness of the proposed approach to analyzing and improving team coordination.

Keywords: psychological diagnostics, teamwork skills, collaborative activities, computer simulator.

Funding. The study was carried out with the financial support of the Ministry of Education of the Russian Federation, state assignment No. 073–00037–24–02 dated 04.09.2024 “Development of a software and hardware rehabilitation complex for the formation of teamwork skills based on modern methods of mathematical psychology”.

For citation:

Mikhailovsky M.A., Ermakov S.S., Yuryeva N.E. Quantitative Assessment of Degree Formation of Teamwork Skills. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 3, pp. 118–134. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.202414030> (In Russ., abstr. in Engl.).

***Michael A. Mikhailovsky**, Research Assistant, Youth Laboratory Information Technologies for Psychological Diagnostics, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, muxa172002@yandex.ru

****Sergey S. Ermakov**, PhD in Psychology, Senior Researcher of the Laboratory “Information Technologies for Psychological Diagnostics”, Associate Professor of the Department of “Applied



Mathematics” of the Faculty of “Information Technology”, Moscow State University of Psychology and Education, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4330-2618>, e-mail: ermakovss@mgppu.ru

*****Nataliya E. Yuryeva**, PhD in Engineering, Head of Laboratory, Youth Laboratory Information Technologies for Psychological Diagnostics, Moscow State University of Psychology and Education, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1419-876X>, e-mail: yurieva.ne@gmail.com

References

1. A. Kabi, M. Dhar, P. Arora, B.B. Bhardwaj, N. Chowdhury, S. Rao Effectiveness of a Simulation-Based Training Program in Improving the Preparedness of Health Care Workers Involved in the Airway Management of COVID-19 Patients // *Cureus*. 2021. Vol. 13(8). Article ID e17323. 8 p. DOI: 10.7759/CUREUS.17323
2. Kuravsky L.S., Yuryev G.A., Mikhailovsky M.A., Nesimova A.O., Yuryeva N.E., Polyakov B.Y. Formation of Teamwork Skills and Their Objective Quantitative Assessment Based on Quantum Representations. *Ekspierimental'naâ psihologiâ = Experimental Psychology (Russia)*, 2024. Vol. 17, no. 2, pp. 154–177. DOI: 10.17759/exppsy.2024170210. (In Russ., abstr. in Engl.)
3. Kuravsky L.S., Kozyrev A.D., Greshnikov I.I. Mathematical Model of the Pilot Associated Activities and Its Application for Objective Professional Training and Condition Assessment. *Ekspierimental'naâ psihologiâ = Experimental Psychology (Russia)*, 2024. Vol. 17, no. 1, pp. 161–180. DOI: 10.17759/exppsy.2024170111. (In Russ., abstr. in Engl.)
4. Ermakov S.S., Savenkov E.A., Katyshev D.A. Impact of modern simulators on the development of teamwork skills: coordinated action and communication [Elektronnyi resurs]. *Sovremennaiâ zarubezhnaia psikhologiâ = Journal of Modern Foreign Psychology*, 2024. Vol. 13, no. 2, pp. 131–141. DOI: 10.17759/jmfp.2024130212. (In Russ., abstr. in Engl.)
5. Ermakov S.S., Bystrova Yu.A. Analyzing Research on the Role of Computer-Based Training Devices in Shaping, Measuring and Improving Teamwork Skills. *Ekspierimental'naâ psihologiâ = Experimental Psychology (Russia)*, 2024. Vol. 17, no. 2, pp. 113–127. DOI: 10.17759/exppsy.2024170207. (In Russ., abstr. in Engl.)
6. Greshnikov I.I., Kuravsky L.S., Yuryev G.A. Principles of Developing a Software and Hardware Complex for Crew Intelligent Support and Training Level Assessment. *Modelirovanie i analiz dannikh = Modelling and Data Analysis*, 2021. Vol. 11, no. 2, pp. 5–30. DOI: 10.17759/mda.2021110201. (In Russ., abstr. in Engl.)
7. Rasch G. Probabilistic models for some intelligence and attainment tests. (Copenhagen, Danish Institute for Educational Research), expanded edition with foreword and afterword by B.D. Wright. Chicago: The University of Chicago Press, 1980.
8. Nielsen Michael A. & Chuang Isaac L. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press, 2010. 702
9. Kuravsky L.S., Yuryev G.A., Zlatomrezhev V.I. New approaches for assessing the activities of operators of complex technical systems // *Experimental psychology (Russia)*. 2019. Vol. 12. № 4. 27–49. DOI:10.17759/exppsy.2019120403
10. Kuravsky L.S., Yuryev G.A. A novel approach for recognizing abnormal activities of operators of complex technical systems: three non-standard metrics for comparing performance patterns [Электронный ресурс] // *International Journal of Advanced Research in Engineering and Technology (IJARET)*. 2020. Vol. 11(4). P. 119–136. URL: <http://www.iaeme.com/IJARET/issues.asp?JType=IJARET&VType=11&IType=4> (Accessed: 06.07.2024).]
11. Kuravsky L.S., Greshnikov I.I., Yuryev G.A., Zlatomrezhev V.I. Synthesis of Civil Aircraft Control Using Empirical Data and Quantum Filtering // *Lobachevskii J. Math.* 2023. 44(6). P. 2079–2100.



12. Kuravsky L.S., Greshnikov I.I., Kozyrev A.D., Kosachevsky S.G., Frolova L.I., Zakharcheva A.A. A mathematical model for representing the related operator professional activities and its relevant diagnostic assessment based on the quantum representations // Lobachevskii J. Math. 2024. 45(6), pp. 2549–2566. DOI: 10.1134/S1995080224602819
13. Kuravsky L.S. Simplification of Solving Diagnostics Problems by Convolution of Applied Markovian Models into the Quantum Representations // Lobachevskii J. Math. 2022. 43(7). P. 1669–1682.
14. Kuravsky L.S. Modeling Dynamical Behavior of Stochastic Systems: Spectral Analysis of Qubit Representations vs the Mutual Markovian Model Likelihood Estimations // Lobachevskii J. Math. 2021. Vol. 42(10). P. 2364–2376.

Получена 10.08.2024

Received 10.08.2024

Принята в печать 29.08.2024

Accepted 29.08.2024

Разработка и внедрение многопоточного сервиса распознавания речи с помощью связки C#, C++ и Python

*Левонич Н.И.**

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8580-0490>
e-mail: levonikitech@yandex.ru

В статье рассматриваются особенности реализации многопоточных промышленных систем, реализующих научные вычисления с помощью средств, доступных в языке программирования Python. Статья содержит описание теоретических аспектов, таких как работа механизма глобальной блокировки интерпретатора (GIL), архитектура управления зависимостями, библиотека параллелизма, основанного на процессах. В практическая часть статьи посвящена реализации многопоточного сервиса распознавания речи, который использует взаимодействие процессов через разделяемую память, на базе библиотеки «boost.interprocess». В результате внедрения описанной в статье архитектуры в конкретном случае удалось существенно снизить нагрузку на процессор.

Ключевые слова: программная инженерия, Python, C++, C#, boost, многопоточные приложения, распознавание речи.

Благодарности. Автор благодарит за помощь в сборе данных о внутреннем устройстве интерпретатора Python специалиста по отношениям с разработчиками Евгения Григория Петрова.

Для цитаты:

Левонич Н.И. Разработка и внедрение многопоточного сервиса распознавания речи с помощью связки C#, C++ и Python // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 3. С. 135–148. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140308>

**Левонич Никита Ильич*, студент магистратуры, младший научный сотрудник, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8580-0490>, e-mail: levonikitech@yandex.ru



1. ВВЕДЕНИЕ

В современном мире очень востребовано программное обеспечение, способное проводить научные расчеты. Для реализации подобного программного обеспечения часто используется язык программирования Python, так как он содержит множество библиотек позволяющих реализовать научные вычисления. Также Python позволяет быстро и интерактивно пробовать различные методы решения одной и той же задачи. Однако после выбора окончательного решения исследователь или сотрудничающие с ним инженеры неизбежно сталкиваются с необходимостью разработки промышленного решения. При разработке решений промышленного уровня необходимо иметь в виду некоторые особенности языка Python.

2. ОСОБЕННОСТИ ЯЗЫКА PYTHON

Язык Python имеет особенности, которые могут осложнить внедрение разработанного программного кода в промышленные системы:

- интерпретируемость;
- недостатки архитектуры работы с зависимостями;
- механизм глобальной блокировки интерпретатора (далее GIL).

Рассмотрим подробнее данные особенности. Для того чтобы запустить приложение, реализованное на языке Python, на целевой машине необходимо иметь интерпретатор и пакеты, от которых зависит приложение¹. Специально для управления пакетами вместе с интерпретатором Python устанавливается система управления программными пакетами, написанными на Python – pip, и средство управления виртуальным окружением Python – virtualenv[1].

Virtualenv [2] – средство для создание изолированного окружения Python. Основная проблема, которую решает данное средство, связана с зависимостями и версиями, а также, косвенно, с разрешениями. Предположим, что нужно установить приложение, которому требуется версия LibFoo 1, и приложение, которому требуется версия 2. Если устанавливать все на системный python (например, python3.12), то можно столкнуться со следующими проблемами: отсутствует возможность при импорте указать версию библиотеки, отсутствует возможность установить несколько версий одной библиотеки. Вторая проблема, которую решает данное средство – зависимость приложения от изменения системного Python. Например, у распространяемого приложения может не быть разрешений на установку зависимостей системного Python или их установка может привести к нарушению функционирования иных приложений. Для решения данных проблем используются изолированные окружения. Изолированное окружение содержит интерпретатор и все необходимые зависимости для запуска Python приложения на конкретном типе систем (Windows/macOs/Linux) и их разрядности.

¹ Такой подход является «классическим», но не единственным существуют средства для упаковки интерпретатора вместе с приложением, например PyInstaller [3].

GIL [4] – механизм, присутствующий в эталонной реализации Python – CPython. Он обеспечивает безопасную работу с потоками, путем установления ограничения – в конкретный момент времени выполнять байт-код Python может лишь один поток операционной системы (в рамках одного процесса).

При запуске приложения Python первым делом стартует главный поток (поток ОС), который инициализирует интерпретатор, затем компилирует Python-код в байт-код и входит в цикл выполнения байт-кода. Для того, чтобы появился Python-поток, с потоком операционной системы связывается структура, которая содержит состояние Python-потока.

Цикл выполнения байт-кода – бесконечный цикл, содержащий больших размеров оператор switch, который обрабатывает всевозможные инструкции байт-кода, для входа в этот цикл поток должен удерживать GIL (что делает главный поток с момента своей инициализации). В начале каждой итерации цикла выполнения байт-кода поток проверяет, есть ли причины освободить GIL. Если в коде Python создан новый Python-поток, он попытается захватить GIL. Если это невозможно (GIL занят), то поток будет ожидать в течение фиксированного временного интервала, называемого интервалом переключения. Если GIL по-прежнему занят, то он пошлет запрос на принудительное освобождение GIL. Если в начале очередной итерации цикла поток, владеющий GIL, увидит запрос на принудительное освобождение GIL, то он освободит GIL, и другой поток захватит GIL. В связи с этим распределение активности потоков при выполнении многопоточного приложения на Python, является таковым, что в один момент времени активен только 1 поток (рисунок 1).

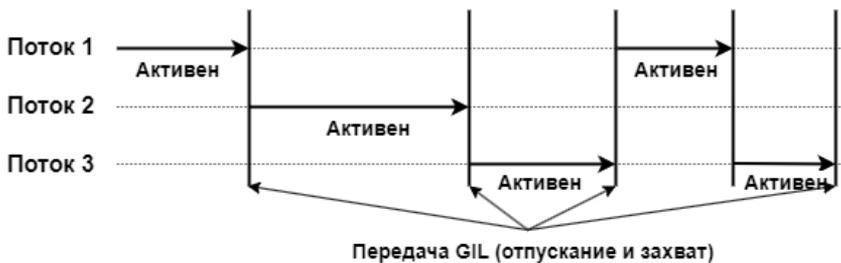


Рис. 1. Распределение активности потоков при выполнении многопоточного приложения на Python

Данный подход эффективно решает проблему одновременного доступа к памяти, среди потоков Python процесса, жертвуя возможностью действительно параллельного выполнения кода. Необходимость GIL обусловлена тем, что потоки операционной системы могут засыпать и просыпаться в самый неожиданный момент, реализовать простой и быстрый сборщик мусора и простой и быстрый доступ разных потоков к общим изменяемым данным (контейнерам, объектам и т.п). Несмотря на это



некоторые библиотеки для научных расчетов умеют отдельно работать с GIL отпуская его при выполнении расчетов, однако установление этого факта требует детального анализа отдельных операций.

3. МНОГОПОТОЧНОСТЬ И ПАРАЛЛЕЛИЗМ, ОСНОВАННЫЙ НА ПРОЦЕССАХ

Одним из решений проблемы параллельного программирования на Python является модуль `multiprocessing` [5]. Данный модуль позволяет запускать несколько процессов интерпретатора Python (каждый из которых имеет свой GIL), в удобном для программиста режиме, предоставляя примитивы синхронизации, каналы коммуникации и межпроцессные коллекции. Примитивы синхронизации: `Lock`, `Recursive Lock`, `Condition`, `Semaphore`, `Event`, `Timer`, `Barrier` – являются стандартным набором примитивов синхронизации потоков. Для коммуникации между процессами используются каналы (`Pipe`) и очереди (`Queue`). Канал представляет область памяти доступную связанным процессам, родительскому и дочернему. Данные в канале организованы по принципу FIFO, как только данные прочитаны из канала, они удаляются из него. Межпроцессные очереди, основаны на каналах, они предоставляют интерфейс очереди, для передачи объектов через каналы (добавляя примитивы синхронизации). При передаче объектов в межпроцессной очереди, используется `pickle` [6] – бинарный формат упаковки Python объектов.

Таким образом в рамках Python приложения можно успешно управлять потоками и процессами. В документации есть примеры использования данного функционала, в качестве работы более подробно рассматривающий данный модуль можно привести книгу «High Performance Python: Practical Performant Programming for Humans» [7].

4. КОММУНИКАЦИЯ PYTHON С ДРУГИМИ ПРИЛОЖЕНИЯМИ

После разработки вычислительных приложений на языке Python, может возникнуть необходимость их интеграции в промышленные системы, реализованные на других языках. Здесь есть два принципиальных подхода: Python приложение, как отдельный сервис с сетевым доступом; встраивание Python через CPython.

Первый способ применим в ситуациях, когда взаимодействие между приложениями можно свести к парадигме запрос-ответ, причем запросы не являются регулярными или имеют слабую плотность.

Примером такого сервиса может служить удаленный вызов функции решения некоторого уравнения. Программа высылает запрос и ждет ответа причем события не сильно зависят от времени.

В противоположность первой архитектуре, встраивание Python позволяет использовать функционал Python более гибко, можно вызывать функции Python прямо



из кода C/C++, который может быть использован другими языками в качестве библиотеки. Однако при использовании данного подхода, следует помнить про наличие GIL. В связи с наличием GIL в рамках одного процесса может быть запущен только один интерпретатор, даже если он встроенный.

5. ОСОБЕННОСТИ СЕРВИСА РАСПОЗНАВАНИЯ РЕЧИ

Сервис распознавания речи должен получать данные с микрофона, нарезать их на порции, делать над ними вычисления (подавление шума, вычисление спектрограммы, сравнение спектрограммы с образцами с помощью вероятностной сети) и отправлять далее в приложение на C#. Управление (запуск, остановка) должны реализовываться средствами C#.

Реализовать данный процесс с помощью сервиса с сетевым доступом, затруднительно, так как данные, результат обработки которых должно получить C# приложение, изначально порождаются в Python приложении. Так инициализировать взаимодействие, могут обе стороны C# (при отправке управляющих команд) и Python (при отправке распознанных данных с микрофона) обе стороны должны постоянно опрашивать друг друга, что является ресурсозатратным процессом. Дополнительным ограничением является частота обновления данных, и соответственно обращений к сервису, в рабочей системе обновление результатов достигает 50мс.

В начале процесса внедрения, была предпринята попытка реализовать коммуникацию C# и Python приложения через архитектуру сервиса с сетевым доступом. В процессе опытной эксплуатации данной архитектуры, поступили жалобы на излишнее потребление ресурсов процессора приложениями. В процессе профилирования было установлено, что 85 % процентов процессорного времени, используемого C# приложением, уходит на сетевое взаимодействие, в связи с чем был совершен переход на использование встраивания Python.

В связи с необходимостью одновременной работы нескольких потоков распознавания речи, встраивание должно производиться в отдельные приложения, которые могут быть запущены C# приложением и обмениваться с ним данными.

Для взаимодействия.NET приложений и C++ приложений, через разделяемую память корпорацией Microsoft разработана библиотека с открытым исходным кодом IPC [8], которая внутри себя использует boost interprocess [9].

6. РАЗРАБОТКА C++ ПРИЛОЖЕНИЙ

Для разработки C++ приложений, которые выполняют Python код, необходимо максимально инкапсулировать функциональность приложения в классы, примером такой использования инкапсуляции может служить листинг 1.



Процесс записи с микрофона

```
1 def sender(wav_queue, settings, lock, stop_event):
2     microphone_controller = MicrophoneController(settings)
3     while not stop_event.is_set():
4         if lock.acquire(False):
5             microphone_controller.init_stream()
6             lock.release()
7         while lock.acquire(False) and not stop_event.is_set():
8             start_time = time.time()
9             microphone_controller.process_stream(start_time)
10            chunks = microphone_controller.get_chunks()
11            for chunk in chunks:
12                wav_queue.put(chunk, block=False)
13            lock.release()
14            microphone_controller.close_stream()
```

После создания обертки можно использовать класс в приложении C++, в той области видимости, в которой создан интерпретатор. В описываемых приложениях для работы с интерпретатором создается отдельный поток. Функция которую выполняет данный поток (листинг 3), запускает интерпретатор, загружает модули python, и реализует логику, аналогичную логике работы кода представленного в листинге 1.

Обертка класса MicrophoneController

```
1 #include "MicrophoneController.h"
2
3 namespace PythonAudioController {
4     MicrophoneController::MicrophoneController(
5         py::module_ mainModule,
6         std::shared_ptr<Config> config,
7     ) {
8         _module = mainModule;
9         _class = mainModule.attr("MicrophoneController");
10        _config = config;
11        _object = _class("settings"_a = _config->getRawObject());
12    }
13    py::object MicrophoneController::getRawObject() {
14        return _object;
15    }
16
17    void MicrophoneController::initStream() {
18        _object.attr("init_stream")();
19    }
20
21    void MicrophoneController::processStream(time_t startTime) {
22        _object.attr("process_stream")(startTime);
23    }
24 }
```



```
24
25 void MicrophoneController:: getChunks(
26     std:: vector<PythonCPPCommon:: WaveChunkRaw>& waveChunks
27 ) {
28     py:: object chunksObject = _object.attr("get_chunks")();
29     py:: list chunksList = chunksObject.cast<py:: list>();
30     for (auto chunk: chunksList) {
31         py:: tuple chunkTuple = chunk.cast<py:: tuple>();
32         PythonCPPCommon:: WaveChunkRaw waveChunk;
33         waveChunk.number = chunkTuple[0].cast<long>();
34         waveChunk.buffer = chunkTuple[1].cast<std:: string>();
35         waveChunk.time = chunkTuple[2].cast<float>();
36         waveChunks.push_back(waveChunk);
37     }
38 }
39 void MicrophoneController:: getMicrophones(std:: string& microphones){
40     py:: object microphonePy = _object.attr("get_microphones")();
41     microphones = microphonePy.cast<std:: string>();
42 }
43 }
```

В случае, если бы в программе было бы необходимо запустить один поток, взаимодействующий с Python, он мог бы быть упакован в динамически загружаемую библиотеку, однако в случае стоящей задачи, необходимо запустить несколько потоков, следовательно каждый поток должен быть упакован в свой процесс.

Листинг 3

Поток для работы с Python

```
1 void pythonThread(
2     std:: condition_variable& pythonCond,
3     std:: mutex& recordingMutex,
4     std:: reference_wrapper<volatile bool> recording,
5     ThreadsafeQueue<PythonCPPCommon:: WaveChunkRaw>& tsWavechunkQueue
6 ) {
7     py:: scoped_interpreter guard{}; // start the interpreter
8     py:: object python_audio_controller = py:: module_:: import(
9         "python_audio_controller"
10    );
11     py:: object python_config = py:: module_:: import("python_config");
12     std:: vector<PythonCPPCommon:: WaveChunkRaw> waveChunks;
13     std:: shared_ptr<Config> config(new Config(python_config, "setting.cfg"));
14     std:: shared_ptr<MicrophoneController> microphoneController(
15         new MicrophoneController(python_audio_controller, config)
16    );
17     bool isStreamInit = false;
18     config->readConfig();
19     while (true)
20     {
21         if (recording) {
```



```
22 if (isStreamInit == false) {
23     try {
24         microphoneController->initStream();
25         isStreamInit = true;
26     } catch (py:: error_already_set& e) {
27         recording.get() = false;
28         continue;
29     }
30 }
31 std:: time_t time = std:: time(nullptr);
32 microphoneController->processStream(time);
33 microphoneController->getChunks(waveChunks);
34 for (PythonCPPCommon:: WaveChunkRaw waveChunk: waveChunks) {
35     tsWavechunkQueue.push(waveChunk);
36 }
37 waveChunks.clear();
38 } else {
39     std:: unique_lock<std:: mutex> lck{recordingMutex};
40     pythonCond.wait(lck, [recording] {return recording;});
41 }
42 }
43 }
```

7. КОММУНИКАЦИЯ МЕЖДУ ПРОЦЕССАМИ

Для коммуникации между C# и C++ процессами один из процессов (C++) создает сервер удаленных вызовов, который реализует сервис, к которому C# имеет асинхронный доступ.

Функция обработки асинхронного запроса приведена в листинге 4. Пример выполнения асинхронного запроса приведен в листинге 5.

Листинг 4

Сервис сервера удаленных вызовов

```
1     template <typename Callback>
2     void Service:: operator()(
3     const RequestAudio& request,
4     Callback&& callback
5     ) {
6         ResponseAudio response;
7         std:: ostringstream text;
8         if (request.Op == Operation:: Start) {
9             recording.get() = true;
10            pythonCond.notify_one();
11            text << "OK";
12        } else if (request.Op == Operation:: Get) {
13            response.WaveChunks = WaveChunkRawVector(
14            memory->GetAllocator<WaveChunkRawShared>()
15            );
16            if (tsWavechunkQueue.empty()) {
```



```
17 WaveChunkRaw wavechunk;
18 WaveChunkRawShared wavechunkShared;
19 tsWavechunkQueue.wait_and_pop(wavechunk);
20 wavechunkShared.number = wavechunk.number;
21 wavechunkShared.time = wavechunk.time;
22 wavechunkShared.buffer = SharedUInt8Vector(
23 wavechunk.buffer.begin(),
24 wavechunk.buffer.end(),
25 memory->GetAllocator<uint8_t>()
26 );
27 response.WaveChunks->push_back(wavechunkShared);
28 }
29 while (!tsWavechunkQueue.empty()) {
30 WaveChunkRaw wavechunk;
31 WaveChunkRawShared wavechunkShared;
32 tsWavechunkQueue.try_pop(wavechunk);
33 wavechunkShared.number = wavechunk.number;
34 wavechunkShared.time = wavechunk.time;
35 wavechunkShared.buffer = SharedUInt8Vector(
36 wavechunk.buffer.begin(),
37 wavechunk.buffer.end(),
38 memory->GetAllocator<uint8_t>()
39 );
40 response.WaveChunks->push_back(wavechunkShared);
41 }
42 text << "OK";
43 } else if (request.Op == Operation:: Pause) {
44 std:: lock_guard<std:: mutex> lock(recordingMutex);
45 recording.get() = false;
46 pythonCond.notify_one();
47 text << "OK";
48 }
49 response.Text.emplace(
50 text.str().c_str(),
51 memory->GetAllocator<char>()
52 );
53 try {
54 callback(std:: move(response));
55 } catch (const std:: exception& e) {
56 std:: cout << "Failed to send response:" << e.what() << std:: endl;
57 }
58 }
```

Листинг 5

Обращение к сервису

```
1 if (command == IPCMicrophoneClientCommand.StartRecord) {
2 var request = new RequestAudio {Op = Operation.Start};
3 ResponseAudio response;
4 try {
5 response = client.InvokeAsync(request).Result;
6 } catch (System.Exception e) {
```



```

7 Console.WriteLine($"Failed to send request: {e.Message}");
8 client = null;
9 continue;
10 }
11 }

```

Сервис удаленных вызовов позволяет управлять процессом записи сигнала с микрофона с помощью логической переменной и двух примитивов синхронизации, условной переменной и связанных с ней мьютексов.

При запросе запуска или остановки записи сервис изменяет логическую переменную и уведомляет поток Python с помощью условной переменной. При запросе на получение данных, сервис возвращает данные из очереди и опустошает ее. Аналогичный сервис используется для распознавания отрезков. C# реализует связь с данным сервисом через асинхронные вызовы.

Всего в приложении участвуют 10 типов потоков и 3 типа процесса, описание которых дано в таблице 1. Данное распределение деятельности позволяет эффективно по времени и потребляемым ресурсам осуществлять распознавание речи.

Таблица 1

Описание потоков

Процесс	Поток	Назначение и особенности работы
C# приложение	Основой	Управление настройками, управление процессом распознавания (запуск, остановка), отображение результатов распознавания.
C# приложение	Контроллер распознавания речи	Координирование работы, запрашивание аудио данных от контроллера процесса записи, передача записанных фрагментов для распознавания контроллеру процесса распознавания, передача распознанных данных основному потоку. Для синхронизации с контроллерами процесса записи, контроллером процесса распознавания используются события. Для приема данных от контроллера процесса записи используется неблокирующее чтение и событие. Для отправки данных контроллеру процесса распознавания используется неблокирующая запись. Для приема данных от контроллера процесса распознавания используется неблокирующее чтение и событие. Блокировка потока происходит в момент ожидания событий.
	Контроллер процесса записи	Управление коммуникацией с процессом записи. Прием команд о начале записи, паузе в записи, получении записанного и их выполнение. После выполнения команды отправляет событие и блокируется до следующей команды. В процессе выполнения команд поток блокируется в ожидании результатов.
	Контроллер процесса распознавания	Управление коммуникацией с процессом записи. Выполняет блокирующее чтение очереди фрагментов, направленных на распознавание. Отправка прочитанных фрагментов на распознавание Python приложению. При ожидании результатов распознавания поток блокируется.



Процесс	Поток	Назначение и особенности работы
	Основной	Запуск потока Python интерпретатора, создание сервера, который при подключении к нему создает потоки сервиса, которые обрабатывают запросы от C# приложения.
Python приложение записи	Поток Python интерпретатора	При начале своей работы инициализирует микрофон для записи. В случае активной записи читает новые фрагменты с микрофона и с помощью неблокирующей записи помещает в очередь. В случае неактивной записи блокируется по условной переменной, которая отслеживает условие изменения активности записи.
Python приложение записи	Поток сервиса	Запускается при приеме нового запроса от C# приложения. Осуществляет активацию и деактивацию записи, путем изменения значения логической переменной и уведомления условной переменной. Так же позволяет считать записанные фрагменты из очереди.
	Основной	Запуск потока Python интерпретатора, создание сервера, который при подключении к нему создает потоки сервиса, которые обрабатывают запросы от C# приложения.
Python приложение распознавания	Поток Python интерпретатора	Инициализация распознавателя речи. Блокирующее чтение отрезков аудио из очереди входящих данных, запись распознанных отрезков в очередь исходящих данных.
	Поток сервиса	Прием запроса и данных для распознавания, размещение данных в очереди входящих данных, блокирующее чтение из очереди исходящих данных, отправка распознанных данных в ответ.
	Основной	Запуск потока Python интерпретатора, создание сервера, который при подключении к нему создает потоки сервиса, которые обрабатывают запросы от C# приложения.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе изложен один из способов организации сервиса, использующего возможности языка Python для осуществления научных вычислений, позволяющий обойти особенности многопоточной работы интерпретатора Python. Данный способ позволяет связать с Python любой язык, который поддерживает C++ библиотеки. В рамках статьи опущены темы упаковки приложений и тонкости транслирования некоторых типов, однако приведенная в списке литературы документация покрывает данные, в большей мере технические подробности.

В результате внедрения описанной в статье архитектуры в конкретном случае удалось существенно снизить нагрузку на процессор (на 75 % по сравнению с использованием очереди сообщений ZeroMQ и multiprocessing).

В начале 2023 сообщество разработчиков Python был предложен PEP (Python Enhancement Proposal) 703, который дает возможность отключить GIL. В Python 3.13, выпуск которого назначен на 1 октября 2024 года, будет такая возможность. Поэтому в течении двух-трех лет сообщество может увидеть новые подходы в реализации многопоточных систем на Python.



Литература

1. Tool recommendations [Электронный ресурс] // Python Packaging User Guide URL: <https://packaging.python.org/en/latest/guides/tool-recommendations/> (дата обращения: 05.06.2024)
2. virtualenv [Электронный ресурс] // virtualenv URL: <https://virtualenv.pypa.io/en/latest/index.html> (дата обращения: 05.06.2024)
3. PyInstaller Manual [Электронный ресурс] // PyInstaller 6.8.0 documentation URL: <https://pyinstaller.org/en/stable/> (дата обращения: 25.06.2024)
4. Глобальная блокировка интерпретатора (GIL) и её воздействие на многопоточность в Python [Электронный ресурс] // Хабр URL: <https://habr.com/ru/companies/wunderfund/articles/586360/> (дата обращения: 07.06.2024)
5. multiprocessing – Process-based parallelism [Электронный ресурс] // Python 3.12.4 documentation URL: <https://docs.python.org/3/library/multiprocessing.html> (дата обращения: 07.06.2024)
6. pickle – Python object serialization [Электронный ресурс] // Python 3.12.4 documentation URL: <https://docs.python.org/3/library/pickle.html> (дата обращения: 08.06.2024)
7. *Gorelick, Micha, and Ian Ozsvald. High Performance Python: Practical Performant Programming for Humans. O'Reilly Media, 2020.*
8. microsoft/IPC: IPC is a C++ library that provides inter-process communication using shared memory on Windows. A.NET wrapper is available which allows interaction with C++ as well. [Электронный ресурс] // GitHub URL: <https://github.com/microsoft/IPC> (дата обращения: 09.06.2024)
9. Chapter 16. Boost.Interprocess – 1.85.0 [Электронный ресурс] // The Boost C++ Libraries URL: https://www.boost.org/doc/libs/1_85_0/doc/html/interprocess.html (дата обращения: 09.06.2024)
10. pybind11 – Seamless operability between C++11 and Python [Электронный ресурс] // pybind11 documentation URL: <https://pybind11.readthedocs.io/en/stable/> (дата обращения: 09.06.2024)



Multithread Speech Recognition Service Development and Integration Using C#, C++ and Python

Nikita I. Levonovich*

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8580-0490>

e-mail: levonikitech@yandex.ru

This article discusses specificity of multithread industrial systems implementation using Python and its computation libraries. Article contains description of theory, including working principle of the Python's Global Interpreter Locker (GIL), dependency management, multiprocessing library. The practical part of the article devoted to speech recognition service implementation. The implementation uses interprocess communication through shared memory based on "boost.interprocess" library. The result of integration architecture described by the article is reducing of CPU loading, in that case.

Keywords: software engineering, Python, C++, C#, boost, multithread applications, speech recognition.

Acknowledgements. The author is grateful for assistance in data about Python interpreter internals collection DevRel Evrone Grigory Petrov.

For citation:

Levonovich N.I. Multithread Speech Recognition Service Development and Integration Using C#, C++ and Python. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 3, pp. 135–148. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140308> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Tool recommendations [Elektronnyi resurs] // Python Packaging User Guide URL: <https://packaging.python.org/en/latest/guides/tool-recommendations/> (Accessed 05.06.2024)
2. virtualenv [Elektronnyi resurs] // virtualenv URL: <https://virtualenv.pypa.io/en/latest/index.html> (Accessed 05.06.2024)
3. PyInstaller Manual [Elektronnyi resurs] // PyInstaller 6.8.0 documentation URL: <https://pyinstaller.org/en/stable/> (Accessed 25.06.2024)
4. Global'naja blokirovka interpretatora (GIL) i ejo vozdejstvie na mnogopotchnost' v Python [Elektronnyi resurs] // Хабр URL: <https://habr.com/ru/companies/wunderfund/articles/586360/> (Accessed 07.06.2024) (In Russ.).

***Nikita I. Levonovich**, Master's Degree Student, Junior Research Associate, Youth Laboratory Information Technologies for Psychological Diagnostics, Moscow State University of Psychology & Education, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8580-0490>, e-mail: levonikitech@yandex.ru



5. multiprocessing – Process-based parallelism [Elektronnyi resurs] // Python 3.12.4 documentation URL: <https://docs.python.org/3/library/multiprocessing.html> (Accessed 07.06.2024)
6. pickle – Python object serialization [Elektronnyi resurs] // Python 3.12.4 documentation URL: <https://docs.python.org/3/library/pickle.html> (Accessed 08.06.2024)
7. *Gorelick, Micha, and Ian Ozsvald.* High Performance Python: Practical Performant Programming for Humans. O'Reilly Media, 2020.
8. microsoft/IPC: IPC is a C++ library that provides inter-process communication using shared memory on Windows. A.NET wrapper is available which allows interaction with C++ as well. [Elektronnyi resurs] // GitHub URL: <https://github.com/microsoft/IPC> (Accessed 09.06.2024)
9. Chapter 16. Boost.Interprocess – 1.85.0 [Elektronnyi resurs] // The Boost C++ Libraries URL: https://www.boost.org/doc/libs/1_85_0/doc/html/interprocess.html (Accessed 09.06.2024)
10. pybind11 – Seamless operability between C++11 and Python [Elektronnyi resurs] // pybind11 documentation URL: <https://pybind11.readthedocs.io/en/stable/> (Accessed 09.06.2024)

Получена 05.08.2024

Received 05.08.2024

Принята в печать 29.08.2024

Accepted 29.08.2024

Компьютерная реализация системы самопознания

Савенков Е.А.*

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-8510-0468>
e-mail: mr.absolute.official@hotmail.com

Катышев Д.А.**

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-7900-6431>
e-mail: katyshevda@mgppu.ru

Нуркаева И.М.***

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1949-6734>
e-mail: nurkaevaim@yandex.ru

В работе рассматриваются вопросы разработки информационной системы для тренинга самопознания. Определены средства разработки, требования к ним, разработаны основные компоненты системы, получены тестовые результаты.

Ключевые слова: симуляция, обучение, информационная система, тестирование личности, самопознание, профориентация.

Для цитаты:

Савенков Е.А., Нуркаева И.М. Катышев Д.А. Компьютерная реализация системы самопознания // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 3. С. 149–173.
DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140309>

*Савенков Егор Андреевич, младший научный сотрудник, лаборатория «Информационные технологии для психологической диагностики», Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-8510-0468>, e-mail: mr.absolute.official@hotmail.com

**Нуркаева Ирина Михайловна, кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной информатики и мультимедийных технологий, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1949-6734>, e-mail: nurkaevaim@yandex.ru.



*****Катышев Дмитрий Алексеевич**, младший научный сотрудник, лаборатория «Информационные технологии для психологической диагностики», Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-7900-6431> e-mail: katyshveda@mgppu.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Современная наука и практика существуют в условиях информатизации общества. Согласно Постановлению Правительства Российской Федерации от 13.05.2021 № 729 «О мерах по реализации программы стратегического академического лидерства “Приоритет-2030”», актуальна для университетов реализация мероприятий из перечня, среди которых – «П.5. д) реализация образовательных программ высшего образования в сетевой форме, реализация творческих и социально-гуманитарных проектов с участием университетов, научных и других организаций реального сектора экономики и социальной сферы» [1]. Данное положение подталкивает науку к созданию комплексных образовательных систем, позволяющих в сети Интернет взаимодействовать с реально работающими организациями. Подобные системы могли бы поддерживать прямую связь между профориентацией, профессиональном обучении, первичным профессиональным отбором и работодателями.

Работа и траектория развития каждого конкретного индивида уникальна, однако, возрастает число возможных профессий, видов и способов ведения деятельности и труда, полное информирование о которых напрямую не входит в задачи учителей-предметников. Правильное назначение кадров – один из центральных критериев надёжности структуры любого предприятия. Однако, сотрудник и участник предприятия должен не только подходить для работы по способностям, которые требуют развития, не только по информированности о структуре деятельности, но и быть правильно мотивированным. Достижение данных трёх параметров можно ожидать от комплексных образовательных практик-ориентированных сетевых информационных систем.

Отношение к деятельности является основой для развития способностей, однако, отношению предшествуют понимание предмета и сути. деятельности, что достигается в процессе информирования. Таким образом, комплексные системы предполагают общее информирование, мотивационную работу, развитие способностей и перенаправление к работодателю.

Отдельно стоит вопрос формы подачи материала. Среди новых подходов к обучению в иностранных разработках можно отметить регулярное появление симуляции для изучения запрограммированной репрезентативной предметной среды. В то время как в хорошо изученных областях знаний, – широко применяются симуляции, как для обучения [10], [12], [15], так и для изучения предметной области [7], [8], [13], в качестве предметной среды для изучения личностно-ориентированных данных, может выступать графическое отображение лексики, сопутствующей тем или иным профориентационным стимулам. Эти, или иные стимулы могут быть помещены в виде картинок в симуляцию, и использоваться для самовыражения личности через встроенную форму, чтобы получить материал для изучения индивидуально выраженных предпочтений через её репрезентацию в свободной форме взаимодействия с симуляцией. Полученный материал обрабатывается оператором приложения при помощи



статистического пакета данных, что впоследствии создаёт возможность для интерпретации высказанных личностью смыслов и их соотношения с смыслами, высказываемыми другими людьми.

Возвращаясь к вопросу об обеспечении сетевых информационных систем для образования, коммуникации и трудоустройства, – прежде всего стоит вопрос профориентации, которая происходит в ходе самопознания.

2. ОБСУЖДЕНИЕ САМОПОЗНАНИЯ

Самопознание – познание субъектом самого себя, субъекта в отношении с миром субъективных и объективных, репрезентированных в сознание и единое восприятие, объектов.

Самопознание включает в себя раскрытие собственного потенциала, раскрытие личности, достижение гармонии с собой. Оно является ключевым элементом личностного развития и позволяет понимать себя и свое место в мире. Самопознание играет ключевую роль в различных аспектах деятельности человека.

Оптимизация психологического состояния общества объясняет актуальность разработки и совершенствования видов психологической практики [2]. Особенно востребованы современные цифровые системы обучения, интегрирующие специальное образование и карьерные перспективы.

Рассмотрим рисунок с диалектическими подходами к самопознанию (рис. 1).

Диалектической противоположностью самопознания является отсутствие любых элементов и процессов самопознания, что можно интерпретировать как забытие или небытие.

Правило рассмотрения схемы таково, что слева направо репрезентуется во внешнюю информационную систему для изучения познающий субъект, эквивалентный сознанию по смыслу. В целом вся схема отражает понятия, которые присутствуют в различных диалектических подходах при осмыслении темы самопознания. Сверху вниз более всеобъемлющие понятия разлагаются на отдельные смыслы и определения.

Следует понимать, что при каждой репрезентации неизбежно данные теряют идентичность оригинала и степень соответствия, что можно подтвердить словами Выготского и Витгенштейна.

*Как совершенно правильно формулировал Гумбольдт:
всякое понимание есть непонимание, то есть процессы мысли,
пробуждаемые в нас чуждой речью, никогда вполне не совпадают
с теми процессами, которые происходят у говорящего. Всякий из нас,
слушая чужую речь и понимая ее, по-своему апперципирует слова и их значение,
и смысл речи будет всякий раз для каждого субъективным не в большей
мере и не меньше, чем смысл художественного произведения.*

Л.С. Выготский «Психология искусства»

На рисунке репрезентация данных из одного подхода в другой, а также внутри подхода, при информационном процессе передачи данных, имеет место в пустых треугольниках.



Самопознание может быть разложено лексически как познание себя. Замена местоимения «себя» на существительное может быть произведена как «субъект познания». Посредством познания, субъектом может быть установлена воспроизводимая возобновляемая связь с объектом и предметом. Субъект принадлежит сознанию, объект – отражаемой реальности. Сознание и внешняя реальность репрезентуются друг в друга через познание в широком смысле. В случае репрезентации реальности в сознание, происходит установление связи реальных законов и их воспроизводимости в условиях воображения, что соответствует интериоризации наблюдаемых в реальности алгоритмов, их разложения и установления связей при обработке внешних данных во внутреннем мире сознания. В случае обратного процесса репрезентации сознания в реальность, происходит установление связи действий в воображении и их реальным результатом, чему соответствует осуществление данных алгоритмов в реальной среде. В последнем случае установления связи между информационными носителями сознания и реальности, получается, что реальность познаёт субъекта, но для субъекта тот же процесс выступал бы как творчество. Диалектика познания, и творчества, таким образом, сходна с диалектикой любых процессов установления связи данных у носителей при взаимодействии информационных систем. Таким образом, отвечая на вопрос творит ли реальность человека или человек творит реальность – предлагается учитывать разноплановость процесса, а также идентичность и субъективность в определении творчества и познания. Эти процессы взаимно обратно определяются при смене локуса субъекта и объекта местами как для реальности, так и для субъекта. Таким образом, самопознание неразрывно связано с творчеством и взаимодействием с реальностью (как внешней, так и внутренней бессознательной).

Для познания необходимы факты, феномены, алгоритмы установления соответствия. В случае самопознания феномены субъективны, в случае реальности – объективны. Субъективные – принципиально скрыты от наблюдений, принадлежат познающему субъекту, и особенностям познания как способности сознания, что устанавливается бессознательным генетическим процессом, влияющим на реагирование в биопсихосоциальном подходе к определению сознания. Объективные продукты деятельности – принципиально доступны для наблюдения и принадлежат к реальности.

При установлении различия переходной среды в процессе репрезентации между информационными носителями изучаемого факта, феномена, алгоритма следует различать источник происходящих процессов. Мотивирующий толчок к познанию происходит на инстинктивном уровне при нормативном развитии, и не угасает при благоприятных психосоциальных условиях. Толчок запускает активность познающего субъекта, или сознания, провоцирует и репрезентуется в виде действий в воображении. Далее, из этого внутреннего мира, действия могут быть перенесены в реальность. Действия в симулированной среде, игре, и экспериментальной ситуации – не являются однозначно относящимися к реальности ввиду того, что не несут реальных последствий для участников. Эти репрезентативные действия связываются с возможным поведением в виде действий в реальности. Реальные же действия могут быть проинтерпретированы внешним агентом из реальности, репрезентованы им в искусственный образ и ещё более отдалиться от источника познания при изучении.



Помимо художественного искусственного образа человека, крайней дальней репрезентации самой живой активной сущности личности, эта сущность репрезентуется в каждой среде из вышеперечисленных: в бессознательном личности, в бессознательном воображении, в активном воображении, в субъективных мыслях, в высказанных мыслях, в наблюдаемом поведении, а также в глазах внешних наблюдателей и их интерпретации, максимально не соответствующим при репрезентации в себя другой личности.

Приложение для самопознания затрагивает выделенные коричневым треугольниками, треугольники зелёного цвета – предмет дальнейшего развития системы. Можно составлять выборки при обработке данных самовыражения в симуляции, также можно находить репрезентативные выборки и предлагать им пройти алгоритм самопознания для профориентации, строить дальнейшие выводы о типичном поведении в симуляции у разных групп, исследовать лексику на уровень абстрактности или конкретности, как это производится в подобных исследованиях.

Найти своё место в реальном мире и соотнести результаты деятельности своей и других – дело самопознания каждого и не может быть произведено за пользователя приложением.

Приложение в случае заинтересованности пользователя в самовыражении, рефлексии и анализе наблюдаемых, вносимых реальными пользователями, данных, предлагает также, при существующей настройке симуляции на профориентацию, информирование о рынке труда и существующих видах профессиональной деятельности. Приложение имеет функционал, который позволяет при возникновении вопроса неопределённости карьерных и личностных перспектив, изучить соответствующие данному выбору материалы, и внести тем самым дополнительное понимание на основе наблюдаемых, наглядно организованных данных.

Для познания себя часто применимо искусство. Также самопознание может быть произведено по объективным продуктам деятельности в репертуарном тесте Келли. В его компьютерной версии создаётся решётка конструкторов, которая подлежит интерпретации. По Байери, предлагается делать выводы о когнитивной сложности, где, *люди с высокой когнитивной сложностью* и широкими сетями получаемых конструкторов отражают понимание тонких различий, учитывают взгляд со стороны, а *люди с низкой когнитивной сложностью*, с менее широкими сетями, упрощают межличностное общение и избегают альтернативных мнений [20].

Может быть измерен уровень рефлексии в ходе взаимодействия с искусством, что может быть применено и при взаимодействии с симуляцией. Например, в соответствии с методиками, направленными на диагностику понимания искусства А.А. Мелик-Пашаева, Г.Н. Кудиной «Беседа о стихотворении» и «Беседа о картине». Методики имеют чёткие критерии оценки и создавались, чтобы анализировать уровень эстетического развития респондентов, на основе их рефлексии по поводу стихотворения и картины. На основе подобной рефлексии можно понять, происходит ли у респондента диалог с автором, или же решения принимаются в игровом мире непосредственно [19].

В целом, можно говорить о нескольких уровнях глубины рефлексии произведения.

Уровень первый. Пафос картины не улавливается, описывается житейская ситуация без дальнейших выводов. Воспринимается только одна из противоположностей. Мыслей об авторе не возникает.

Уровень второй. Пафос картины описывается как несовершенный, недостаточно ярко выражающих изображающих житейскую ситуацию, что говорит о понимании одной из противоположностей, изображенных на рисунке, в отсутствии понимания другой. Картина воспринимается как не целостная в связи с чувствованием элементов, которые противоречат осознаваемой стороне произведения. Элементы, относящиеся к неосознаваемой стороне, списываются на неумелость автора.

Уровень третий. Воспринимается неоднозначность воздействия произведения, как важное его свойство, созданное намеренно, а не вследствие неудачи автора. Однако, содержание этой неоднозначности, истинный пафос картины не улавливается.

Уровень четвертый. Зритель точно понимает и ясно описывает сложность идейно-эмоционального содержания картины, средства, используемые автором для произведения именно этого определенного воздействия. Внутренний мир картины отражается вполне полно, однако, размышления об авторе не выражаются, диалог не происходит.

Уровень пятый. Схож с четвертым, но помимо прочего можно отметить глубокое осмысление картины как творения автора, понимание его намерений и высокая оценка самого произведения искусства даже при отрицательном отношении к созданной «модели мира».

Анализируются следующие показатели:

1) Понимание наличия субъективных переживаний.

Непонимание наличия субъекта переживания, например, автора или героя произведения, – говорит о низком уровне понимания.

В случае, когда все герои рассматриваются как главные, в большинстве случаев, в зависимости от выбора произведения, – уровень понимания развит на среднем уровне.

Понимание наличия субъекта переживания – говорит о высоком уровне развития эстетического восприятия.

2) Понимание мыслей.

Отсутствие попытки объединить элементы произведения в целостную систему отношений, имеющую смысл – низкий уровень развития.

Понимание связи между элементами стихотворения прослеживается, однако, не выходящее на уровень связи с автором – средний.

О высоком уровне понимания говорит осознание связи мыслей стихотворения и позиции автора.

3) Понимание настроений.

Считывается только одно чувство, которое статично и не меняется – низкий уровень развития.

Осознание наличия нескольких настроений, присутствующих в произведении говорит о среднем уровне.



Высокий уровень развития эстетического восприятия проявляется в описании сочетания чувств и итога их синтеза, результата объединяющего их катарсиса.

Теоретически, подобная оценка может производиться в отношении озвученной рефлексии по поводу любых иных действий, подобные группы похожей лексики могут быть обнаружены в рефлексии на любую тему.

В исследовании психопедагогики в правоохранительных органах существует яркий пример психологической техники самопознания у сотрудников ГИБДД, используемой в тренинговой и консультативной работе с использованием слайдов с искусством и инструментальной музыки [4]. Без изменения алгоритма можно заменить материалы для самопознания, которыми выступают слайды с искусством, например – на интерактивные веб-страницы, содержащие материалы профорientации в виде отдельных фотографий фона и вырезанных изображений репрезентирующих внешнюю сторону предмета.

Методология Д. Юма, которой в современной трактовке свойственен «последовательный эмпиризм в трактовке познания и сознания; стремление выяснить возможности их каузального объяснения; первичность человеческой природы перед теоретическими рассуждениями; приоритет онтологического реализма перед эпистемологическим скептицизмом; возможность окончательного решения философских проблем» – открывает возможность для опоры при проектировании информационной системы для самопознания [3]. Может быть реализовано прочтение эмпиризма в ключе, что любое самопознание может выводиться субъектом напрямую из наблюдаемого непосредственно данного опыта проживания, вне зависимости от наличия тех или иных теоретических воззрений на природу, сущность и место самопознания в структуре самосознания. Такой подход позволяет задуматься, что самопознание на основе диагностического тестирования отсылает к внешней от субъекта самопознания реальности. Это размышление позволяет сменить фокус внимания пользователя от внешних диагностических систем к его внутреннему опыту, однако, в соотношении с аналогичным опытом других. В клиент-центрированном подходе в психологическом консультировании зачастую исключаются интервенции, также они избегаются при психоанализе. Соответственно, при компьютеризации алгоритма тренинга самопознания в симуляцию, разработка предполагает исключение интервенций в виде готовых диагностических решений, и самопознание осуществляется на основе продуктов деятельности: своих собственных, других пользователей, и графику статистической непредвзятой обработки. В опросах, применяемых ранее для исследования ответов на вопросы, направленные на изучение идентичности и ценностей, методом многомерного шкалирования, были получены согласующиеся при интерпретации данные о различимости групп ответов по уровню абстрактности/конкретности. Все указанные продукты деятельности также подлежат и научному исследованию, и могут быть классифицированы для диагностики принадлежности к группам, и назначения соответствующего обеспечения образования. Однако, стремление к повторению алгоритма из тренинга, то есть из активной



работы с личностью, выразилось при разработке в том, что алгоритм направляет субъекта не к внешней, а к его внутренней действительности, и соответствующей ей внутренней действительности других участников процесса.

Образование подразумевает передачу знаний, алгоритмов, правильных связей, учащемуся. Однако, человек может научиться и сам, что происходит при научном открытии в ходе изучения. В ходе тренинга человек раскрывает и открывает себя другим, изучает впервые отношение себя и данных конкретных других членов группы. Таким образом, знания, алгоритмы, правильные связи устанавливаются самостоятельно в индивидуальном порядке.

Подобные тренинги проводятся при обучении психологии, а также психологами при профориентации или при другом запросе на самопознание.

При разработке информационной системы для проведения в симулированной среде алгоритма из тренинга для самопознания были изучены соответствующие разработки и теоретические подходы, а также были созданы основные элементы реализации в виде веб-приложения, что и составило материал данной работы.

Использование открытой симуляции в обучении обосновано в связи с представлениями об эффективности SBT, и Learning Through Discovery, которые вместе с успехом интегрируются в обучение [16, 17], а также в связи ожиданием лучшей достоверности в соответствии с теорией двойного кодирования (гипотеза А. Пайвио [21]).

Аналогично применение для исследования личности, компьютеризированного РЕП теста Келли, в котором все ответы даны в свободной форме, как и в тесте “Кто Я”. При групповом применении подобные данные можно использовать для анализа сплочённости выборок по индивидуально выраженным продуктам деятельности, теоретически сопоставимым с действиями в воображении. Функционал для самовыражения личности в свободной форме – заложен в разрабатываемой системе и внедрён в симуляцию.

Стимулы при исследовании личности могут различаться, в том числе применимы чернильные пятна, наборы метафорических карт, произведения искусства. В связи с стремлением производить информирование, необходимо создание оригинального стимульного материала на основе фотографий для симуляции варианта среды профориентации.

Таким образом, в статье рассмотрены образовательные системы с использованием симуляции, и решается проблема изучения личности, мотивирующих факторов сознания, что является предметом профориентации и самопознания, и может быть изучено извне лишь косвенно по продуктам деятельности.

С точки зрения развития психологической теории, разрабатываемое приложение применимо для изучения выбора лексики, что может быть эффективно для выявления и классификации групп по уровню абстракции, как это представлено в исследовании идентичности и ценностей. Также может быть изучен выбор предпочтительных у отдельных групп пользователей стимулов в симуляции для изучения, на основе чего можно делать выводы о возможностях симуляции для диагностики личности. Для науки подобная система может быть значима, как способ сбора личностно-ориентированных данных, выявления и классификации ответов и лексического содержания пользователей, что может привести к подтверждению выводов



других исследований свободных ответов испытуемых, о различии ответов по группам в соответствии с показателем абстрактности-конкретности, а также социальности-индивидуальности. Подобные данные могут быть ассоциированы с демографическими показателями, указанными пользователями, такими как, например, основной вид деятельности, или уровень образования. В дальнейшем на основе такого анализа может производиться обратная диагностика подходящего места работы по результатам лексики и действий в симуляции.

На основе вышесказанного, можем заявить о том, что существует запрос на комплексные информационные сетевые образовательные практик-ориентированные системы. Подобных систем, с использованием инновационных педагогических подходов обучения в симуляции и изучения путём открытий – не создавалось. В частности, предлагаемая разработка создаёт возможности для получения пользователями сети Интернет:

- а) выражения индивидуальности в симуляции;
- б) получения информирования о профессиональных возможностях современности;
- в) применения способностей в симуляции;
- г) получения контактов других пользователей и работодателей.

Цель статьи – предложить основания для разработки образовательной среды на основе симуляции, показать, как комплексная система с использованием симуляции, и статистической обработки данных, может быть снабжена тренинговым алгоритмом самопознания и материалами информирования при профориентации. Вашему вниманию предлагается также и *цель разработки* – компьютеризировать работу практического психолога (выполняющего в образовании роль тренера при тренинге самопознания и роль просветителя при профориентации). Отдельно обозначим, что уровень достижения цели разработки может быть измерен в дальнейшем по субъективным реакциям в ходе опроса, ситуациях образования реальных отношений вне приложения между его пользователями, реальном наблюдаемом создании общности интересов по результатам проводимых впоследствии связанных наблюдений и опросов.

Итоговое описание программы

Симулированная свобода выбора с материалами профориентации, где каждый момент может длиться потенциально вечно, что позволяет пользователю в индивидуальном темпе осмыслить, и, затем, – выразить себя как личность в выборе и рефлексии, и изучить свою связь с другими пользователями, побывавшими в идентичной симуляции. В дальнейшем могут быть добавлены материалы ОБЖ, другие предметы и ситуации, для изучения мира вне профессиональной деятельности. Качество самопознания может быть исследовано на основе специфики диалога пользователя с автором произведения, по полнотекстовым сообщениям. Классификация лексики может производиться по произвольным вопросам или группам вопросов из единого набора.

Возвращаясь к рисунку, характеризующего диалектические ассоциации, возникающие при обсуждении самопознания (рис. 1), можем обозначить толстой стрелкой процесс обмена информацией между сознанием и внешней ему реальностью. Данный процесс взаимно обратен, однако каждый шаг процесса порождает искажение



информации при переходе между данными носителями. Данный процесс, изображённый толстой стрелкой, можно изобразить в различных преломлениях при выборе того или иного диалектического подхода к обсуждению самопознания. Ассоциации, имеющие место между подходами обозначены пунктиром, образуют нисходящее разложение категории, расположенной выше. Два светлых треугольника – предмет исследования, производимого данной системой в совокупности с активностью субъекта – пользователя, компоненты которого обозначены остальными закрашенными треугольниками. Неокрашенные треугольники обозначают уже внешнюю к субъекту взаимодействия с системой реальность, при переходе в которую данные об изначальном источнике наблюдаемой активности наиболее сильно отдаляются от оригинала и требуют присутствия как минимум двух субъектов – производящего и интерпретирующего. Данные прозрачные треугольники в самопознании пользователя не являются существенными ввиду статистической объективной непредвзятой обработки данных, которая присутствует в системе и на схеме в качестве треугольника «Объективные репрезентированные продукты деятельности», что означает, что феномены данного круга произведены при репрезентации субъекта в совокупной выборке, однако же возможность непосредственной интерпретации ситуаций в симуляции и пользовательских ответов одних пользователей другими – также возможна при использовании встроенного функционала приложения – такого как публикация сообщений и возможность общения на их основе в общем чате.

Система самопознания заключается в трёх этапах активности:

- 1) Просмотр (цифрового) искусства;
- 2) Рефлексия в группе;
- 3) Обратная связь.

Компьютеризация просмотра искусства стала первой задачей при реализации системы. В связи с широкими возможностями современных браузеров была создана симуляция городка из фотографий-кнопок, при переходе по которым меняется контекст происходящего на экране, осуществляется переход в различные локации и ситуации в виде фотографий с уже новыми фотографиями-кнопками. Произведения искусства расположены в здании художественной галереи и могут быть открыты и просмотрены пользователями, что соответствует первому, ознакомительному этапу работы по алгоритму в компьютерной версии.

Далее следует групповая рефлексия, которая осуществлена встроенной кнопкой для открытия специального интерфейса, позволяющего выразить свою рефлексию с привязкой к контексту. Таким образом, можно выразить рефлексию и по всей выставке в целом, и по конечным изображениям произведений искусства, а также других фотографий-кнопок в рамках симуляции городка. Пользователь площадки может внести в интерфейс сообщение, отправив его в открытый доступ другим, создавая основания для финального этапа.

Для получения обратной связи задействован глобальный live-чат, в котором можно увидеть сообщения, произведённые в ходе индивидуальной рефлексии, и поддержать обсуждение в группе, запросить обратную связь. Также могут быть локальные чаты, если они созданы администратором в индивидуальном порядке для указанных пользователей.



Для повышения объективности самопознания также внедрена запись всех действий и сообщений, на основе данных которой, создаётся таблица близости стимулов – как пользователей, так и объектов симуляции. Использование статистических пакетов для обработки этих данных применимо для поиска близких людей и похожих ситуаций симуляции.

Соответствующие действия предлагаются пользователям через интерфейс платформы, содержащий переход к симуляции, переход к личному кабинету с личной и локальной рефлексией, а также переход к инструкции. Глобальная рефлексия доступна в любой момент, через параллельное отображение слоя веб-сайта, содержащего обновляющийся в реальном времени чат, и формы для ввода данных. В этом же слое отображается сводка действий пользователя, преподнесённая как его история в рамках онлайн-взаимодействия, что также подталкивает индивидуальной рефлексии, занимая часть интерфейса.

По итогу работы системы пользователь может найти имена и ссылки на электронную почту и другие данные похожих по поведению и лексике пользователей. Среди таких данных можно найти демографические данные, такие как профессиональная сфера занятости, и обнаружить сходство в продуктах деятельности представителей разных профессий.

Для получения контактов работодателей предполагается внедрение ссылок на внешние ресурсы трудоустройства по результатам выполнения пользователем определённых правильных действий в симуляции, а также сами работодатели могут осуществлять поиск кандидатов и общение с ними, используя поиск по базе данных результатов взаимодействия с симуляцией в соответствии с ожиданиями и требованиями для открытой вакансии.

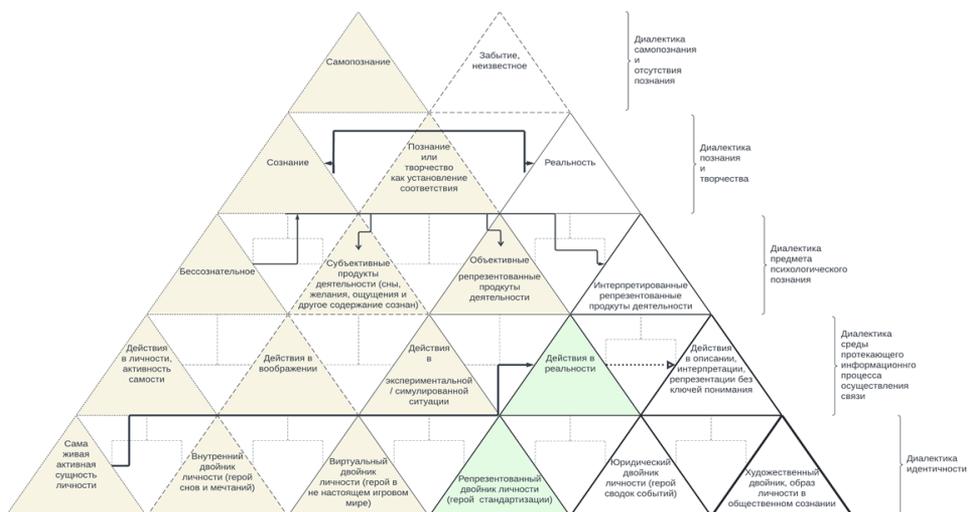


Рис. 1. Диалектические подходы к самопознанию

3. РЕАЛИЗАЦИЯ ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ САМОПОЗНАНИЯ

Организация процесса самопознания в симуляции для пользователя предполагает направление его на взаимодействие с различными наборами симулированных ситуаций с разным наполнением, объединённым мотивом познания себя (человеческой сущности) и своего места в мире человеческих отношений, в связи с чем в интерфейсе приложения должны быть встроены элементы для выражения рефлексивных суждений по поводу того или иного выбора слов или поступков, которые будут изображаться в виде таблицы самых встречаемых ответов, и, в дальнейшем, изображаться на плоскости методом многомерного шкалирования.

В разработке представлены следующие блоки:

- авторизация и вход;
- меню системы;
- симуляция ситуации общения с человечеством;
- статистика по выбору слов в симуляции общения с человечеством;
- административная часть сайта.

4. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

Программная реализация приложения для самопознания в симуляции включает в себя серверную и интерфейсную часть. Серверная часть реализована через веб-фреймворк CakePHP. В качестве языка программирования используется PHP. Для реализации веб-интерфейса был задействован фреймворк Bootstrap. Также для предоставления редакторам более гибких возможностей по управлению содержанием приложения в административной части был задействован платформонезависимый JavaScript HTML WYSIWYG редактор TinyMCE с дополнительным реализованным функционалом по загрузке файлов. В качестве базы данных был задействован PostgreSQL. Выбор платформы разработки и языка программирования обусловлен наличием всех необходимых функций, удобством разработки и тестирования.

Для развёртывания системы был задействован сервер с операционной системой Debian и веб-сервер Nginx.

5. ПРОЕКТ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ САМОПОЗНАНИЯ

В ходе теоретической части работы были показаны основные компоненты системы самопознания:

- 1) Симуляция свободы выбора.
- 2) Симулирующий в общих чертах восприятие реальности интерфейс для пользователя.
- 3) Наполнение симуляции в соответствии с фокусом на симуляцию труднодостижимых ситуаций самопознания.



- 4) Сбор данных о действиях или рефлексивных суждениях в ходе симуляции.
- 5) Предоставление пользователю глобальной статистики в качестве материала для самопознания в рамках приложения.

6. ОПИСАНИЕ БАЗЫ ДАННЫХ

Симуляция создаётся на основе нескольких таблиц SQL:

- 1) Ситуации (contexts). Представлены картинками фона, музыкальной и звуковой дорожкой для сопровождения, сопутствующей информацией о данной ситуации.
- 2) Вещи (things). Представлены картинками объектов (предметы быта, инструменты ведения профессиональной деятельности), сопутствующей информацией о данной вещи.
- 3) Действия (actions). Представлены звуковым сопровождением, информацией о данном действии, ссылкой на следующую ситуацию, запускаемую при соответствующем действии, а также булевым счётчиком, отвечающим за фатальность. Фатальное действие есть почти у каждой вещи, с целью отразить подчеркнутое предпочтение данного предмета перед остальными. Фатальное действие предполагает отправку сообщения с рефлексией. Например, подписать контракт на заводе. Форма для записи фатального действия может содержать проверку на правильность, в случае тестирования вместо опроса.
- 4) Сообщения (messages). Сообщения опраиваются через свободные формы, которые доступны пользователю при осуществлении фатальных действий с объектами под запись. Таблица сообщений включает список контекстов, вещей, действий, фатальных действий с отправленным пользователем текстом рефлексии из свободной формы, подключенной к данной таблице.

Последовательность действий пользователя в системе может быть представлена следующим ниже рядом.

- 1) Регистрация/авторизация. Указываются демографические данные пользователя, в частности, основной вид деятельности, пол и образование.
- 2) Осуществление выбора интересующего функционала через меню приложения, а именно, симуляция, либо раздел статистики (материалов для самопознания), либо раздел с общей инструкцией и внешней информацией.
- 3) Изучение симуляции. Пользователь выбирает интересующую симуляцию, попадает на соответствующую страницу. Там он может осуществить любое количество действий, провести любое количество времени, и перейти к следующему шагу.
- 4) Рефлексия и взаимодействие с симуляцией. Затем, он должен осуществить действие под запись, которое, в отличии от изучающих действий ранее, связано с обязательным внесением своей рефлексии в форму, открывающуюся из симуляции для осуществления фатального действия. Рефлексия о том, почему предпочтителен именно этот предмет и именно это действие.
- 5) Получение обратной связи. При успешной отправке данных, пользователь перенаправляется на страницу со статистикой соответствующего фатального действия,

и может изучить соответствующую ранее записанную рефлексию других игроков по поводу данного действия, а также отправить обратную связь пользователям, которые дали на это согласие путём поиска адреса электронной почты в списке всех публичных игроков.

Фреймворк автоматически создаёт все таблицы из базы данных по командам SQL, и отправляет на сервер картинки с автоматическим созданием ссылок и применением в нужном шаблоне, при правильном заполнении базы данных. Поля и код для удобства чтения помещены в приложение.

Все типы данных, представленные на схеме, являются встроенными в PostgreSQL по умолчанию. В базе данных (рис. 2) хранится тестовый материал – опросники, наполнение свободных форм, продукты взаимодействия с симуляцией, картинки и другое наполнение, интерактивные ссылки в древовидной структуре, учётные записи пользователей, данные об их действиях, записях, и т.д.

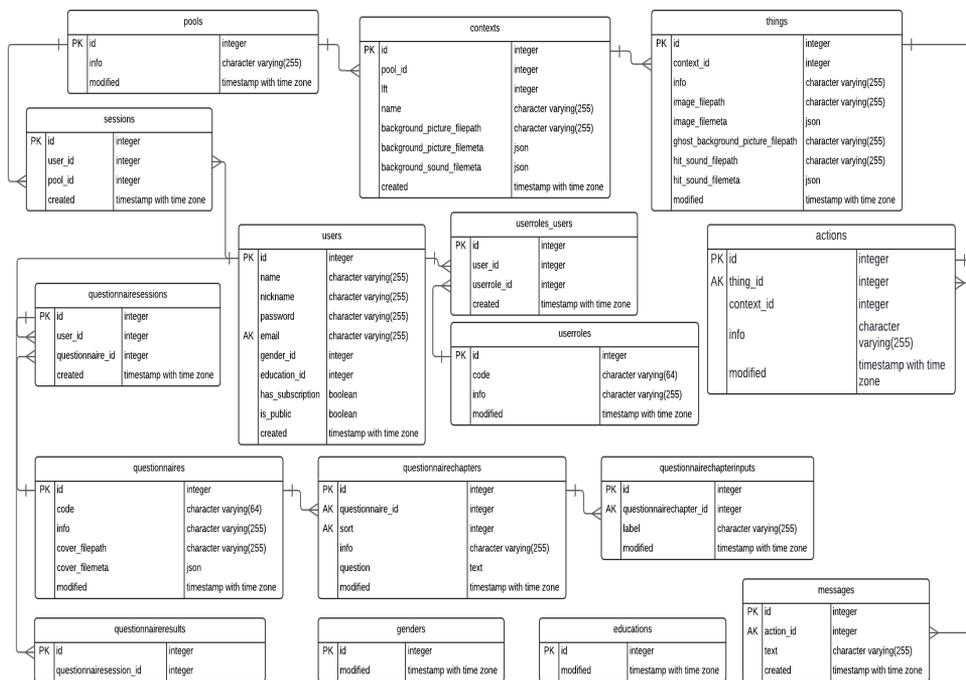


Рис. 2. Схема базы данных

7. ОПИСАНИЕ И ПРИМЕР РАБОТЫ СИСТЕМЫ

Алгоритм содержит стадии самовыражения (1), рефлексии (2) и обратной связи (3). В тренинге, предлагаемом учащимся ГИБДД, проводится данный алгоритм,

направляемый тренером. Материалом для самовыражения служили произведения искусства, присутствовала сопроводительная музыка.

В качестве материала и формы для самовыражения (1) выступает симуляция городка, где представлены все основные виды профессий, что соответствует информированию о профессиях при профориентации, но может быть произвольное другое наполнение симуляции.

Начиная со свободы выбора интересующих зданий в городке, по ходу изучения симуляции, открывается больше возможностей для самовыражения. Выразить себя возможно при осуществлении действий с предметами (которыми являются и вымышленные персонажи в симуляции).

Технически симуляция обеспечивается базой данных (рис. 2). На основе вносимых через административную часть приложения фотографий, звуков, текстов, древовидных структур, – осуществляется приложением представление пользователю симуляции. В базу данных записываются также сведения о каждом действии в симуляции, таблицы с результатами пополняются новыми записями с подробными сообщениями об активности.



Рис. 3. Вид симуляции городка



Рис. 4. Вид симуляции городка

Пользователь рефлексивует и пишет сообщение с ответом на вопрос о том, почему он решил закончить симуляцию именно с этим предметом и совершить с ним фатальное действие, о том, где ему остаться в симуляции, и засчитать тем самым его сессию для поиска похожих по поведению людей (2). Данные записываются в таблицу базы данных messages, которая пополняется посланиями миру от пользователей приложения, сопутствующими действиям в симуляции. При осуществлении фатального действия, данные послания запрашиваются в обязательном порядке. В случае нежелания отвечать и самовыражаться при помощи фатального действия, записываются только данные о выборе предметов в симуляции и действиях с ними. В таком случае, фатальный выбор, создающий публичные данные для исследования, может быть произведён по желанию, и не создаёт помех для изучения всех материалов симуляции, в которых заложено информирование о профессиях.

Пример профессии лидера общественного мнения в театре

К примеру, в ходе прохождения симуляции можно попасть на открытый микрофон в театр, высказаться на общественно значимые темы и ответить на вопросы про сознание.

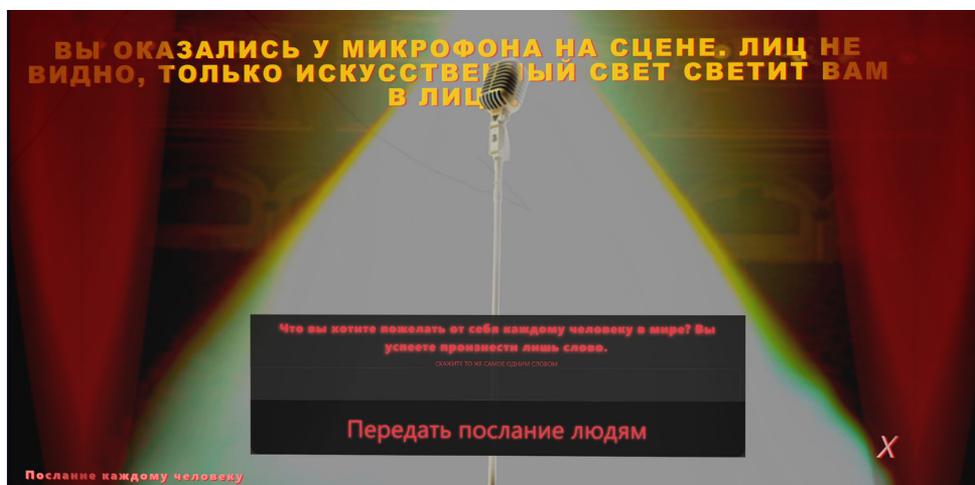


Рис. 5. Рисунок с симуляцией общения с человечеством в театре

Данные записываются системой, затем, обрабатываются оператором приложения при помощи применения процедуры многомерного шкалирования в порядковых шкалах по числу совпадений лексики для наглядной репрезентации близких пользователей, что даёт обратную связь о том, насколько они уникальны или универсальны среди других пользователей. Также они могут увидеть ссылки на личную информацию о пользователях, которые дали своё согласие, для дополнительной обратной связи с людьми, у которых похоже содержание рефлексии (3).

Все единицы лексики делятся на слова и записываются отдельно. Таким образом, единицы лексики для анализа продуктов деятельности пользователей измеряются



с привязкой только к пользователю, но не к отдельным высказываниям. Тем не менее, могут быть произведены и частные исследования по материалам общей таблицы, потенциально доступных также для детального анализа.

Полнотекстовые послания также могут быть запрошены, и могут быть проанализированы качественно, в том числе они могут быть запрошены пользователем в соответствующем разделе с материалами для самопознания. Данные тексты могут быть запрошены от автоматически организуемых при помощи функции сортировки групп, по любому интересующему параметру. В таком случае при конструировании запроса указывается данный параметр, и команда запрашивает все связанные напрямую данные, при этом отдельно можно указать и другие параметры, чтобы загрузить только узкоспециализированную интересующую информацию.

В связи с интересом и целью лишь показать принципы работы системы, но не все её возможности, предлагается к Вашему рассмотрению общий анализ лексики, созданный при пробе системы для шести пользователей.

Единожды встречаемые слова зануляются при анализе, так как не создают общности интересов и могут быть проанализированы самостоятельно пользователем.

В таблице ниже представлены имена от учётных записей пользователей и соответствующая им лексика по всем записям в свободной форме. Единица означает наличие слова в ответах данного испытуемого. Можно увидеть в последней колонке, что «человек» как ответ встречался три раза, и по авторству можно провести связь со всеми словами этого автора, что позволяет найти похожие слова, при этом критерием сходства выступает факт использования одним и тем же пользователем. Подобная таблица создаётся и по всем материалам симуляции, и выбранных в них действиям.

Учётные записи пользователей \ Выбранные для репрезентации слова	1	2	3	4	5	счастье	творчество	удовольствие	умный	ураган	успех	успехов	учитель	ценность	человек
test	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Q	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
Олл_ин	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
123	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
Алекс	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Ник_а	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	2	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Рис. 6. Сводная таблица результатов

Место тренера в проведении алгоритма, таким образом, – занимает функционал приложения.

Материалы для самовыражения (1) представлены в интерактивных формах (2) симуляции (1), при помощи которых наполняются таблицы для анализа рефлексии (2). Обратная связь по рефлексии (3) представлена в виде результатов обработки данных методом многомерного шкалирования (3). Как можно увидеть в результатах далее, судя по используемой лексике в идентичной ситуации симуляции, пользователи приложения имеют сходства и различия. Наиболее близки по выбору лексики в симуляции пользователи «Алекс» и «твин». Как нам известно из демографических данных, указанных при регистрации, пользователи «Ник_а» и «Олл_ин» – женщины. В их лексике также были обнаружены идентичные слова. Таким образом, изучая данных график, пользователи могут узнать виртуальные имена учётных записей других пользователей, которые расположены близко на графике, что сильно облегчает поиск интересующих субъектов.

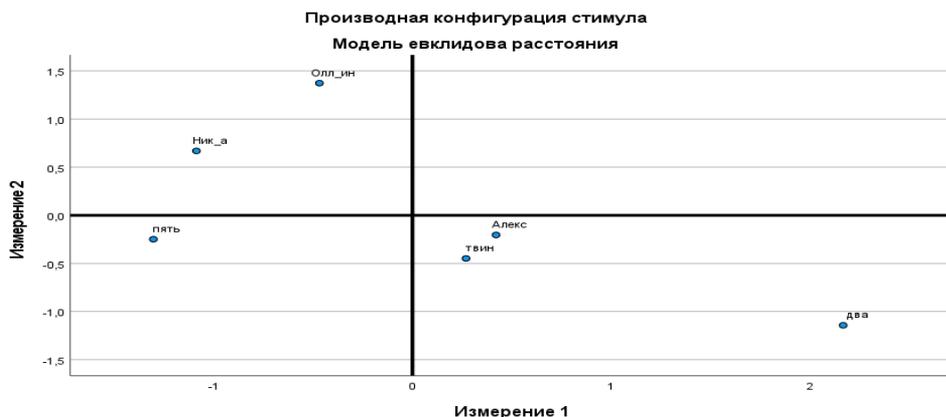


Рис. 7. Результаты обработки данных пробного запуска администратором в SPSS



Рис. 8. Результаты обработки данных пробного запуска администратором в SPSS



Затем, следует график с изображением близких слов, которые часто встречаются в лексике вместе с другими. Данный график показывает предпочтительные психологические стимулы в данной выборке. Его изучение имеет смысл для самих участников самопознания, а также для внешних наблюдателей – психологов. Изображение близких слов помогает наглядно изучить какие психологические содержания часто встречаются вместе, делать выводы о конфликтных и основных сторонах самопознания пользователей.

Подробный путь пользователя и возможные сценарии.

- 1) Регистрация или авторизация.
- 2) Указание демографических данных.
- 3) Указание публичности/анонимности персональных данных.
- 4) Начало симуляции свободы выбора зданий для посещения в городке.
- 5) Выбор здания, выбор вещей в здании, изучение материалов симуляции, нахождение вещи с фатальным действием.
- 6) Выбор действия с фатальной вещью.
 - 6а) Выбор не фатального действия, возврат к выбору здания.
 - 6б) Выбор фатального действия, отправка результатов в общую таблицу ответов с указанием публичности/анонимности отправляемых данных, перенаправление к материалам самопознания.
- 7) Выбор материалов для самопознания.
 - 7а) Выбор поиска виртуальных двойников с похожим выбором и лексикой в симуляции.
 - 7б) Выбор просмотра прохождений других игроков.
 - 7в) Выбор раздела ранее обнаруженных корреляций и связей, заполняемых оператором приложения.
 - 7г) Карта всей лексики без указания ситуаций симуляции происхождения по мере близости в соответствии с частым использованием схожими лицами.
- 8) Самостоятельное изучение интересующих данных.
 - 8а) Самопознание на основе объективно наблюдаемых данных в соотношении собственной рефлексии, рефлексии других людей, обобщений статистическими методами по рефлексии других людей.
 - 8б) Профорентация при общении с похожими пользователями, представителями выбора того или иного предмета профорентации, либо реальными профессионалами (которые указали это в своих данных), либо реальными работодателями (которые могут вноситься администратором).
- 9) Трудоустройство пользователя.
 - 9а) Нахождение работодателем кандидата среди пользователей и приглашение его на работу.
 - 9б) Получение пользователем ссылки на ресурсы трудоустройства в соответствии с правильным прохождением специализированных профессиональных задач в симуляции.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитие системы предполагает внесение всех производственных цепочек в виде интерактивных ситуаций, вещей и действий. Данные ситуации позволят посетить производства и увидеть соответствующие инструменты для ведения деятельности. Каждый инструмент, вещь, или представитель профессии снабжён описанием и формой обратной связи, потенциально применимой в одинаковой степени с лёгкостью для опроса с правильным или свободным ответом. Та или иная форма взаимодействия отрывается пользователю через действия, которыми он может изменить анимацию в ситуации, изучить разные функциональные состояния инструментов при помощи рассмотрения альтернативных изображений, загружаемых при наполнении симуляции администратором. Форма обратной связи позволяет проводить как экспертные опросы, так и обучающие тесты с правильным ответом.

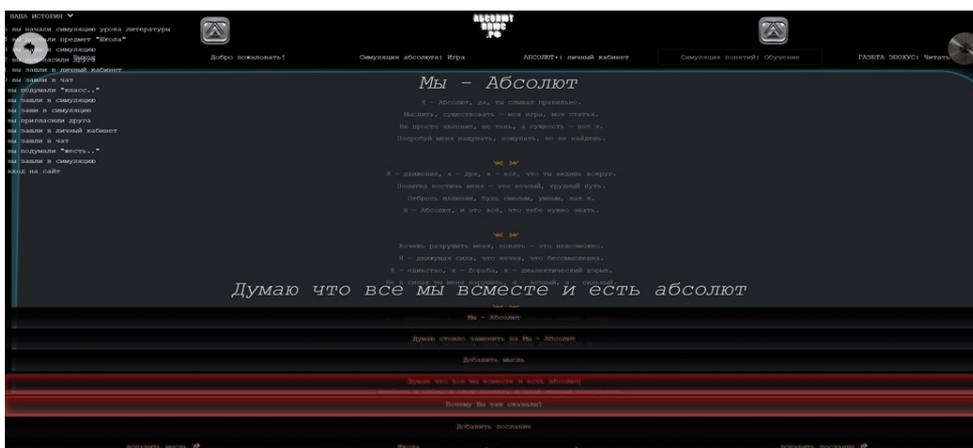


Рис. 9. Пример рефлексии по произведению искусства через форму свободной обратной связи

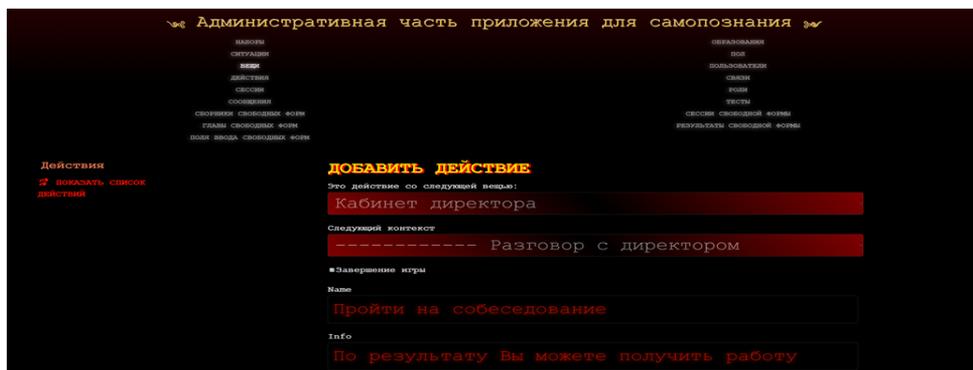


Рис. 10. Пример создания администратором специализированной ситуации для подготовки к тестированию пользователя на получение ссылок для трудоустройства



Литература

1. Постановление Правительства Российской Федерации от 13.05.2021 № 729 «О мерах по реализации программы стратегического академического лидерства «Приоритет-2030».
2. Журавлев А.Л. Перспективы психологии в решении задач российского общества. Часть II. Концептуальные основания / А.Л. Журавлев, Д.В. Ушаков, А.В. Юревич // Психологический журнал / Ред. Б.Ф. Ломов, А.В. Брушлинский. – 2013. – Т. 34. – №. 2 март-апрель 2013. – С. 70–86.
3. Касавин И.Т. Дэвид Юм и современная эпистемология // Epistemology and Philosophy of Science. 2011. №1.
4. Борисова С.Е. Психологическая техника «Самопознание» и ее применение в тренинговой и консультативной работе // Психопедагогика в правоохранительных органах. 2014. № 4. – С. 59.
5. Борисова С.Е., Леонова И.А. Междисциплинарный подход к повышению квалификации психологов подразделений ГИБДД // Психопедагогика в правоохранительных органах. 2013. №1. – С. 52.
6. Мелик-Пашаев А.А., Новлянская З.Н., Адаскина А.А., Кудина Г.Н., Чубук Н.Ф. Психологические основы художественного развития. М.: МГППУ, 2005. – С. 52
7. Ambika A. et al. The road to learning “who am I” is digitized: A study on consumer self-discovery through augmented reality tools // Journal of Consumer Behaviour. – 2023. – Т. 22. – №. 5. – pp. 1112–1127.
8. Dalgarno B., Kennedy G., Bennett S. An oz study exploring cognitive processing during computer-based discovery learning. – 2014.
9. De Bruin A.B.H., Rikers R.M.J.P., Schmidt H.G. Monitoring accuracy and self-regulation when learning to play a chess endgame // Applied Cognitive Psychology. – 2005. – Т. 19. – №. 2. – pp. 167–181.
10. Ekelund K. et al. Evaluation of the simulation-based training quality assurance tool (SBT-QA10) as a measure of learners’ perceptions during the action phase of simulation // BMC Medical Education. – 2023. – Т. 23. – №. 1. – p. 290.
11. Greene J.A., Azevedo R.A. theoretical review of Winne and Hadwin’s model of self-regulated learning: New perspectives and directions // Review of educational research. – 2007. – Т. 77. – №. 3. – pp. 334–372.
12. Hui A.N.N. et al. The relationships among simulation-based learning, creativity, and the learning approach in higher education // Creative and Collaborative Learning through Immersion: Interdisciplinary and International Perspectives. – Cham : Springer International Publishing, 2021. – pp. 89–104.
13. Kluge A., Bakken S.M. Simulation as science discovery: Ways of interactive meaning-making // Research and Practice in Technology Enhanced Learning. – 2010. – Т. 5. – №. 03. – pp. 245–273.
14. Lei P.L. et al. The Design of social agents that introduce self-reflection in a simulation environment // Journal of Educational Technology & Society. – 2013. – Т. 16. – №. 3. – pp. 152–166.
15. Miwa K., Yamakawa M., Kojima K. Introduction of Computer-Based Simulated Experiments in University Psychology Class: A Class Practice of Learning Dual Storage Model of Human Memory // International Association for Development of the Information Society. – 2022.
16. Soundy A. et al. Psychological skills training using simulated practice for brief therapeutic interactions // International Journal of Healthcare Simulation (IJoHS). – 2023. – №. Feb. – pp. 1–14.
17. Tan J. et al. Providing Guidance and Opportunities for Self-Assessment and Transfer in a Simulation Environment for Discovery Learning // Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society. – 2007. – Т. 29. – №. 29.



18. *Thao N.P., Tron N.H., Loc N.P.* Discovery learning based on simulation: A case of surfaces of revolution // *Universal Journal of Educational Research*. – 2020. – Т. 8. – №. 8. – pp. 3430–438.
19. *Clark, Jim & Paivio, Allan.* (1991). Dual Coding Theory and Education. *Educational Psychology Review*. – 1991. – №. 3. – pp. 149–210.
20. *Bieri, J.* (1966). Cognitive Complexity and Personality Development. In: Harvey, O.J. (eds) *Experience Structure & Adaptability*. Springer, Berlin, Heidelberg.
21. *Clark, Jim & Paivio, Allan.* Dual Coding Theory and Education. *Educational Psychology Review*. – 1991. – №. 3. – pp. 149–210.



Computer Implementation of the Self-Knowledge System

Egor A. Savenkov*

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-8510-0468>
e-mail: mr.absolute.official@hotmail.com

Irina M. Nurkaeva**

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1949-6734>
e-mail: nurkaevaim@yandex.ru

Dmitry A. Katyshev***

Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-7900-6431>
e-mail: katyshevda@mgppu.ru

The paper discusses the issues of developing an information system for self-knowledge training. The development tools and requirements for them have been identified, the main components of the system have been developed, and test results have been obtained.

Keywords: simulation, training, information system, personality testing, self-knowledge, career guidance.

For citation:

Savenkov E.A., Nurkaeva I.M., Katyshev D.A. Computer Implementation of the Self-Knowledge System. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 3, pp. 149–173. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140309> (In Russ., abstr. in Engl.).

****Egor A. Savenkov***, Junior Researcher, Laboratory «Information Technologies for Psychological Diagnostics», Moscow State University of Psychology & Education, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-8510-0468>, e-mail: mr.absolute.official@hotmail.com

*****Irina M. Nurkaeva***, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Informatics and Multimedia Technologies, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1949-6734>, e-mail: nurkaevaim@yandex.ru

******Dmitry A. Katyshev***, Junior Researcher, Laboratory “Information Technologies for Psychological Diagnostics”, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-7900-6431>, e-mail: katyshevda@mgppu.ru



References

1. Decree of the Government of the Russian Federation dated 05/13/2021 No. 729 «On measures to implement the strategic academic leadership program «Priority 2030».
2. Zhuravlev A.L. Prospects of psychology in solving the problems of Russian society. Part II. Conceptual foundations / A.L. Zhuravlev, D.V. Ushakov, A.V. Yurevich // *Psychological Journal* / Ed. by B.F. Lomov, A.V. Brushlinsky. – 2013. – Volume 34 No. 2 March–April 2013. – pp. 70–86.
3. Kasavin I. T. David Hume and modern epistemology // *Epistemology and Philosophy of Science*. 2011. No.1.
4. Borisova S.E. Psychological technique «Self-knowledge» and its application in training and consulting work // *Psycho pedagogy in law enforcement agencies*. 2014. No. 4. – p. 59.
5. Borisova S.E., Leonova I.A. Interdisciplinary approach to professional development of psychologists of traffic police departments // *Psycho pedagogy in law enforcement agencies*. 2013. No. 1. – p. 52.
6. Melik-Pashaev A.A., Novlyanskaya Z.N., Adaskina A.A., Kudina G.N., Chubuk N.F. *Psychological Foundations of Artistic Development*. Moscow: Moscow City Psychological and Pedagogical University, 2005. – p. 52.
7. Ambika A. et al. The road to learning “who am I” is digitized: A study on consumer self-discovery through augmented reality tools // *Journal of Consumer Behaviour*. – 2023. – T. 22. – №. 5. – pp. 1112–1127.
8. Dalgarno B., Kennedy G., Bennett S. An oz study exploring cognitive processing during computer-based discovery learning. – 2014.
9. De Bruin A.B.H., Rikers R.M.J.P., Schmidt H.G. Monitoring accuracy and self-regulation when learning to play a chess endgame // *Applied Cognitive Psychology*. – 2005. – T. 19. – №. 2. – pp. 167–181.
10. Ekelund K. et al. Evaluation of the simulation-based training quality assurance tool (SBT-QA10) as a measure of learners’ perceptions during the action phase of simulation // *BMC Medical Education*. – 2023. – T. 23. – №. 1. – p. 290.
11. Greene J.A., Azevedo R.A. theoretical review of Winne and Hadwin’s model of self-regulated learning: New perspectives and directions // *Review of educational research*. – 2007. – T. 77. – №. 3. – pp. 334–372.
12. Hui A.N.N. et al. The relationships among simulation-based learning, creativity, and the learning approach in higher education // *Creative and Collaborative Learning through Immersion: Interdisciplinary and International Perspectives*. – Cham : Springer International Publishing, 2021. – pp. 89–104.
13. Kluge A., Bakken S.M. Simulation as science discovery: Ways of interactive meaning-making // *Research and Practice in Technology Enhanced Learning*. – 2010. – T. 5. – №. 03. – pp. 245–273.
14. Lei P.L. et al. The Design of social agents that introduce self-reflection in a simulation environment // *Journal of Educational Technology & Society*. – 2013. – T. 16. – №. 3. – pp. 152–166.
15. Miwa K., Yamakawa M., Kojima K. Introduction of Computer-Based Simulated Experiments in University Psychology Class: A Class Practice of Learning Dual Storage Model of Human Memory // *International Association for Development of the Information Society*. – 2022.
16. Soundy A. et al. Psychological skills training using simulated practice for brief therapeutic interactions // *International Journal of Healthcare Simulation (IJoHS)*. – 2023. – №. Feb. – pp. 1–14.
17. Tan J. et al. Providing Guidance and Opportunities for Self-Assessment and Transfer in a Simulation Environment for Discovery Learning // *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society*. – 2007. – T. 29. – №. 29.



18. Thao N.P., Tron N.H., Loc N.P. Discovery learning based on simulation: A case of surfaces of revolution // *Universal Journal of Educational Research*. – 2020. – Т. 8. – №. 8. – pp. 3430–438.
19. Clark, Jim & Paivio, Allan. (1991). Dual Coding Theory and Education. *Educational Psychology Review*. – 1991. – №. 3. – pp. 149–210.
20. Bieri, J. (1966). Cognitive Complexity and Personality Development. In: Harvey, O.J. (eds) *Experience Structure & Adaptability*. Springer, Berlin, Heidelberg.
21. Clark, Jim & Paivio, Allan. Dual Coding Theory and Education. *Educational Psychology Review*. – 1991. – №. 3. – pp. 149–210.

Получена 25.07.2024

Received 25.07.2024

Принята в печать 20.08.2024

Accepted 20.08.2024

◇◇◇◇◇ МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ◇◇◇◇◇

УДК 372.851

Вычислительный эксперимент в преподавании высшей математики. Комбинаторика и её приложения

Куланин Е.Д.*

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>
e-mail: lucas03@mail.ru

Степанов М.Е.**

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>
e-mail: mestepanov@yandex.ru

Статья продолжает цикл ([1] – [13]) методических разработок авторов. В ней обсуждаются некоторые проблемы, связанные с путями повышения культуры математического мышления студентов-математиков. Авторы опираются на опыт работы на факультете информационных технологий МГППУ.

Ключевые слова: высшее образование, методика преподавания математики, множества и операции с ними, комбинаторика, теория перечислений, общая алгебра, алгебра многочленов, теория вероятностей.

Для цитаты:

Куланин Е.Д., Степанов М.Е. Вычислительный эксперимент в преподавании высшей математики. Комбинаторика и её приложения // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 3. С. 174–202. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140310>

***Куланин Евгений Дмитриевич**, кандидат физико-математических наук, профессор, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>, e-mail: lucas03@mail.ru

****Степанов Михаил Евграфович**, кандидат педагогических наук, доцент, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: mestepanov@yandex.ru



1. ВВЕДЕНИЕ

Данная статья в известном смысле продолжает и дополняет статью авторов «Вычислительный эксперимент в преподавании высшей математики на примере теории чисел» [13]. Приведём цитату из статьи [13], чтобы объяснить цели, с которыми были задуманы статьи, посвящённые вычислениям различного характера.

«Учебная работа со студентами-математиками, кроме всего прочего, включает в себя развитие их интереса к математике как таковой. Добиться даже минимальных результатов в этом направлении можно, только предлагая учащимся задания, имеющие характер научного исследования. Поиск таких задач связан с определёнными трудностями. Действительно, с одной стороны задача должна быть посильной, а с другой – представлять возможности для получения новых результатов.

Авторы статьи считают, что для этих целей как раз и можно использовать задачи вычислительного характера. Данная статья посвящена рассмотрению ряда примеров таких вопросов, связанных с теорией чисел. В дальнейшем предполагается также и написание статей, которые касаются вычислений в общей алгебре, геометрии, математическом анализе и т. д.»

Данная статья направлена на **рассмотрение задач комбинаторики**. В одном из своих больших разделов – **теории перечислений** – комбинаторика целиком ориентирована на вычисления [14]. В рамках общего курса математики в высшей школе комбинаторика как отдельный предмет не выделяется. Однако важность и широкая сфера применения многих её формул требует включения некоторых вопросов комбинаторики в рамки других предметов. В первую очередь речь идёт о теории вероятностей, где методы решения ряда задач основываются на комбинаторных формулах.

В этой статье авторы рассматривают некоторые вопросы комбинаторики сами по себе, а затем показывают их применение в других разделах математики.

2. НЕКОТОРЫЕ ФАКТЫ ТЕОРИИ ПЕРЕЧИСЛЕНИЙ

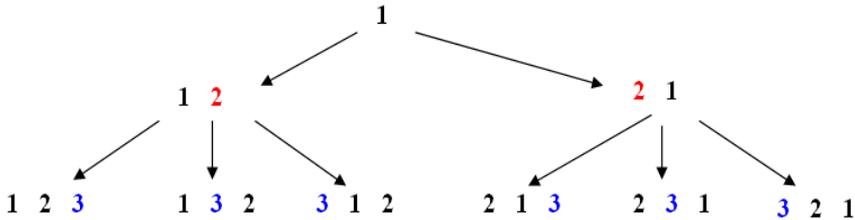
Начнём с рассмотрения ряда известных формул.

Число пар. Пусть заданы два множества M и N . Прямым произведением этих множеств называется множество упорядоченных пар $\{(m; n) \mid m \in M, n \in N\}$. Если множества M и N являются конечными, то общее число пар равно произведению количества элементов первого множества на количество элементов второго. Множество пар при небольшом количестве элементов в исходных множествах можно наглядно изобразить в виде прямоугольной таблицы.

Перестановки. Всякое упорядоченное множество (то есть множество, элементы которого занумерованы) называется перестановкой его элементов. Число всевозможных перестановок, которые могут быть образованы из n элементов равно n -факториал, то есть $P_n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$.



Пояснение. Один элемент можно переставить одним способом. Если добавиться второй элемент, то его можно поставить справа и слева от первого – два способа. Если добавить третий элемент, то в любую перестановку из двух его можно поставить справа, в середину и в центр, то есть из каждой перестановки из двух элементов получится три перестановки из трёх – всего шесть способов и т. д.



Задание 1. Вычислить $10!$ без использования калькулятора.

Решение. Основной приём, который следует применять при вычислениях, – использование коммутативности умножения и дистрибутивности. Итак, $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 7 \cdot (3 \cdot 6 \cdot 9) \cdot (4 \cdot 8) \cdot 100 = 7 \cdot 81 \cdot 64 \cdot 100 = 7 \cdot 81 \cdot 64 \cdot 100 = 7 \cdot (80 \cdot 64 + 64) \cdot 100 = 7 \cdot (5120 + 64) \cdot 100 = 7 \cdot 5184 \cdot 100 = (35000 + 700 + 560 + 28) \cdot 100 = 36288 \cdot 100 = 3628800$.

Задание 2. На одной книжной полке стоит n книг, на второй m . Книги с полки на полку переносить нельзя, но их можно переставлять на каждой из полок произвольным образом. Сколько различных перестановок при этом возникнет.

Решение. Мы имеем дело с двумя множествами – множество перестановок книг на первой полке и множество перестановок книг на второй полке. Число элементов первого множества равно $n!$, а второго – $m!$. Поскольку каждой перестановке книг на первой полке может соответствовать любая перестановка книг на второй полке, то общее количество перестановок равно числу соответствующих пар. Таким образом, искомое число равно $n! \cdot m!$.

Задание 3. Сочетанием из n элементов, взятых по k , называется подмножество, содержащее k элементов данного множества. Число сочетаний из n по k обозначается через C_n^k и равно $\frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Пояснение. На полке n книг можно расставить $n!$ способами. Выберем k книг и разделим полку на две части. Справа будем всевозможными способами переставлять k книг, а слева $n - k$ книг. Всего получится $k!(n - k)!$ вариантов (смотри задание 2). Таким образом, на каждое сочетание приходится $k!(n - k)!$ вариантов. Следовательно, общее число сочетаний равно $\frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Задание 4. Устно вычислить, сколькими способами можно из 9 предметов выбрать 5.

Решение. Главным правилом, которому нужно следовать при вычислении в данном случае, является проведение сокращений дроби. Перемножение чисел следует начинать только после того, как знаменатель станет равен единице.



$$C_9^5 = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 9 \cdot 2 \cdot 7 = 18 \cdot 7 = 126.$$

Размещения. Размещением из n элементов по k называется всякая упорядоченная часть данного множества, содержащая k элементов. Число размещений из n по k обозначается через A_n^k и равно $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Пояснение. Для размещения выбирают k книг и на правую часть полки ставят в определённом порядке, а слева $n - k$ книг переставляют всевозможными способами. Рассуждая по аналогии с сочетаниями, устанавливаем, что число размещений равно $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Перестановки с повторением. Пусть алфавит содержит n букв. Тогда перестановкой из n элементов по k с повторениями называется слово из k букв (буквы могут повторяться). Общее количество таких число равно n^k .

Пояснение. Размещение из n элементов по k с повторениями можно рассматривать как позиционную запись числа по основанию k , состоящего из n цифр. Минимальным из этих чисел является 0, а максимальное равно $n^k - 1$, то есть всего таких чисел n^k .

Выводя формулу для числа сочетаний, мы решили следующую задачу: сколькими способами можно разбить множество с n элементами на два множества, содержащие k и $n - k$ элементов. Эту задачу можно обобщить.

Задание 5. Множество, содержащее n элементов, разбивают на m непересекающихся множеств, содержащих соответственно n_1, n_2, \dots, n_m элементов, при этом $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$. Получить формулу для вычисления количества таких разбиений, обозначив это количество через $P(n_1, n_2, \dots, n_m)$.

Пояснение. Сначала отметим, что вместо множества пар в задании рассматриваются кортежи, имеющие длину m . Их количество равно произведению числа элементов каждого множества.

Вывод соответствующей формулы полностью повторяет рассуждения, проведённые в заданиях 2 и 3. Разделим полку на m секций и разобьём книги на соответствующие подмножества. Число перестановок книг в каждой из этих секций равно $n_1!$, $n_2!$, ..., $n_m!$. А общее число равно произведению этих факториалов. Число перестановок книг без секций равно $n!$. Таким образом,

$$P(n_1, n_2, \dots, n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!}.$$

Задание 6. Определить, сколькими способами 10 книг можно разбить на блоки по две книги. Вычисления провести устно.

Решение. Соответствующее число равно $\frac{10!}{2^5} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 = 10 \cdot 126 \cdot 9 = 10 \cdot (100 + 20 + 6) \cdot 9 = 9000 + 1800 + 540 = 11340$.



3. ПЕРЕМНОЖЕНИЕ СКОБОК

В дальнейшем нам понадобится умение осознанно перемножать скобки, каждая из которых содержит сумму нескольких переменных.

Со времён Древней Греции используется геометрическое истолкование умножения. При многократном сложении (**b** раз) нескольких равных куч (по **a** предметов), можно заменить каждую кучу полосой из **a** единичных квадратов и сложить **b** полос одну под другой. В итоге получится прямоугольник **a** на **b**, площадь которого равна $a \times b$. Его можно повернуть на 90° и представить, что он сложен из **a** горизонтальных полос, содержащих по **b** единичных квадратов. Площадь его не изменилась, следовательно, $a \times b = b \times a$ (рисунок 1).

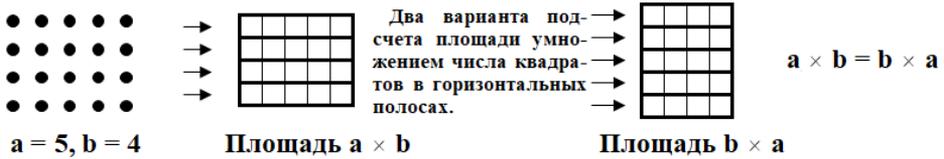


Рис. 1

При рассмотрении произведения трёх чисел $a \times b \times c$ предметы можно заменить единичными кубами и сложить из них параллелепипед. Его можно сложить из **c** горизонтальных пластин размером **a** на **b**, или же из **a** вертикальных пластин размером **b** на **c**. Произведение $a \times b \times c$ равно объёму параллелепипеда, а, значит, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$. Так же как и в случае сложения, закон ассоциативности позволяет использовать запись произведения нескольких сомножителей вообще без скобок (рисунок 2).

$a = 6, b = 3, c = 3$

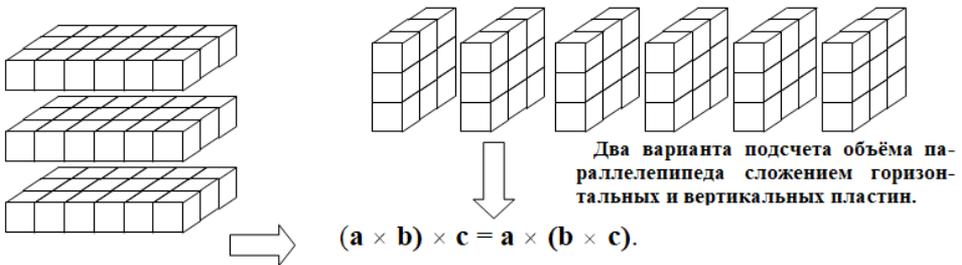


Рис. 2

Наличие геометрического истолкования умножения и его большая практическая важность указывает на существование глубокой связи числовых отношений и простых геометрических форм. По крайней мере, становится ясным, что истолкование



смысла арифметических операций хотя бы отчасти связано с упорядоченным расположением предметов в пространстве.

Тот факт, что перемножение двух сумм связано с вычислением площади прямоугольника, помогает технически облегчить процесс перемножения двух скобок, содержащих суммы, с помощью прямоугольной таблицы. Слагаемые одной скобки относятся со строками, а другой – со столбцами.

Например, перемножим суммы $(a + b + c)$ и $(x + y + z)$. Построим таблицу 3 на 3 и заполним её. Затем суммируем содержимое всех клеток таблицы.

	x	y	z
a	ax	ay	az
b	bx	by	bz
c	cx	cy	cz

В итоге получаем:

$$(a + b + c)(x + y + z) = ax + bx + cx + ay + by + cy + az + bz + cz$$

Если теперь отстраниться от таблицы, можно сформулировать правило: **произведение двух сумм складывается из всех произведений вида «каждое слагаемое первой суммы умножено на каждое слагаемое второй суммы».**

При перемножении нескольких сумм можно сначала перемножить первые две скобки, а затем результат умножить на третью скобку. Новый результат с помощью таблицы нужно умножить на четвёртую скобку и т. д.

И снова, если отстраниться от таблиц, можно сформулировать правило: **произведение нескольких сумм складывается из всех произведений вида «слагаемое первой скобки умножено на слагаемое второй скобки, затем на слагаемое третьей скобки и т. д. во всех возможных вариантах».**

Таким образом, при перемножении сумм нужно научиться выбирать из скобок по одному элементу всеми возможными способами. Аналогичные рассуждения можно провести при возведении суммы в какую-либо степень.

Задание 7. Бином Ньютона – это формула для возведения двучлена $(p + q)$ в n -ю степень. Вывести эту формулу.

Пояснение. При перемножении n скобок вида $(p + q)$ из каждой скобки выбирают либо слагаемое p , либо слагаемое q . В итоге будет получена сумма членов вида $p^k q^{n-k}$, где k меняется от нуля до n . Многие члены будут при этом повторяться. Подсчитывая число членов $p^k q^{n-k}$ при конкретном значении k , можно рассуждать так. Всего перемножается n скобок. Из них нужно выбрать k скобок. Сделать это можно C_n^k способами. В итоге формула бинома Ньютона выглядит следующим образом:

$$(p + q)^n = p^n + C_n^1 p^{n-1} q + \dots + C_n^k p^{n-k} q^k + \dots + C_n^{n-1} p q^{n-1} + q^n.$$



Задание 8. Возвести комплексное число $1 + i$ в четвертую степень.

Решение. Используем формулу бинома Ньютона:

$$(1+i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4.$$

Задание 9. Написать программу, которая позволяет вычислить C_n^k . Построить диаграмму из коэффициентов формулы бинома Ньютона для степени n .

Решение. Поскольку для вычисления числа сочетаний есть формула, представляется, что проблем с написанием программы не будет. Однако это не совсем так. Дело в том, что в случае предварительного вычисления факториалов будут получены очень большие числа. Последующее деление этих чисел друг на друга может привести к потере точности.

По этой причине будем вычислять число сочетаний перемножая дроби

$$C_n^m = \frac{n}{m} \cdot \frac{n-1}{m-1} \cdot \dots \cdot \frac{n-m+1}{1}.$$

Затем округлим результат до ближайшего целого.

```
n = 10
GraphicsWindow.PenColor = "black"
GraphicsWindow.Width = 400
GraphicsWindow.Height = 700
x = 50
For m = 0 To n
    'Подпрограмма вычисления числа сочетаний
    sotsh()
EndFor
'Подпрограмма
Sub sotsh
    nt = n
    mt = m
    cnm = 1
    If m > n/2 Then
        mt = n - m
    EndIf
    If m = 0 Then
        Goto met
    EndIf
    For i = mt To 1 Step -1
        cnm = cnm*nt/i
        nt = nt - 1
    EndFor
    'Округление до ближайшего целого
    cnm = Math.Round(cnm)
```



```
met:  
GraphicsWindow.DrawText(x,650, cnm)  
GraphicsWindow.DrawRectangle(x, 620 – cnm*2, 20, cnm*2)  
x = x + 30  
EndSub
```

Результат работы программы показан на рисунке 3.

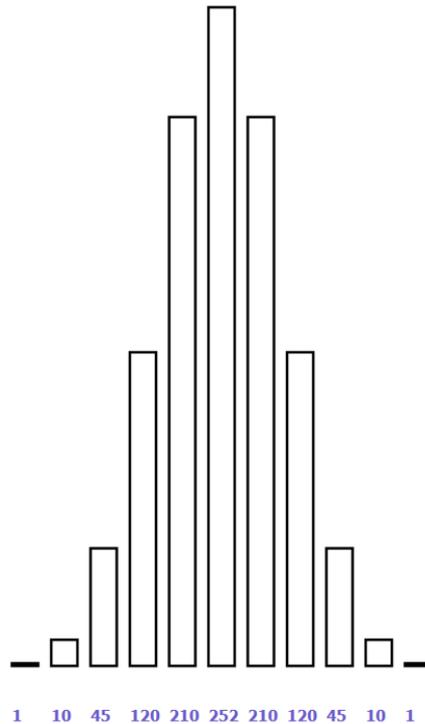


Рис. 3

Задание 10. Написать программу для возведения числа вида $a + b \cdot \sqrt{5}$ в n -ю степень, где a и b – целые числа. Результат должен быть представлен в таком же виде.

Решение. Результаты работы программы показаны на рисунке 4.

```
n = 7  
'Исходное число'  
a = 3  
b = -1  
y = 50  
as = Math.Power(a, n)
```



```
GraphicsWindow.DrawText(50, y, as)
y = y + 20
bs = 0
cht = 1
For m = 1 To n
  'Подпрограмма вычисления числа сочетаний
  sotsh()
  If cht = 0 Then
    'Чётная степень корня
    sl = cnm*Math.Power(a, n-m)*Math.Power(5, m/2)*Math.Power(b, m)
    as = as + sl
    GraphicsWindow.DrawText(50, y, sl)
  Else
    'Нечётная степень корня
    sl = cnm*Math.Power(a, n-m)*Math.Power(5, (m - 1)/2)*Math.Power(b, m)
    bs = bs + sl
    GraphicsWindow.DrawText(80, y, sl)
  EndIf
  cht = 1 - cht
  y = y + 20
EndFor
GraphicsWindow.BrushColor = "black"
GraphicsWindow.DrawText(50,350, as)
GraphicsWindow.DrawText(100,350, bs)
GraphicsWindow.FontSize = 20
GraphicsWindow.DrawText(150,346,"V")
GraphicsWindow.DrawLine(160,350,180,350)
GraphicsWindow.DrawText(162,347,"5")
'Проверка
sq5 = Math.SquareRoot(5)
r1 = Math.Power(a+b*sq5, n)
r2 = as + bs*sq5
GraphicsWindow.DrawText(300,170,"Проверка")
GraphicsWindow.DrawText(300,200, r1)
GraphicsWindow.DrawText(300,230, r2)
'Подпрограмма
Sub sotsh
  nt = n
  mt = m
  cnm = 1
  If m > n/2 Then
    mt = n - m
  EndIf
  If m = 0 Then
    Goto met
  EndIf
  For i = mt To 1 Step -1
```



```
cnm = cnm*nt/i  
nt = nt - 1  
EndFor  
'Округление до ближайшего целого  
cnm = Math.Round(cnm)  
met:  
EndSub
```

```
2187  
-5103  
25515  
-14175  
23625  
-4725  
2625  
-125
```

Проверка
0,151838885074205
0,15183888506688

53952 -24128 $\sqrt{5}$

Рис. 4

Теперь рассмотрим вопрос об обобщении формулы бинома Ньютона на случай возведения в n -ю степень сумм более, чем двух слагаемых. Чтобы разобраться с этим вопросом, необходимо выяснить, сколько одночленов останется в итоговой сумме после раскрытия скобок и приведения подобных. Также нужно выяснить, какие перед ними будут стоять коэффициенты. Задача эта достаточно трудная. По этой причине будем двигаться к её решению от более простых задач к задачам более сложным. Возможно, удастся на основе вычислений частного вида выдвинуть и доказать общую гипотезу.

Все одночлены, которые возникают после раскрытия скобок, имеют n -ю степень. Чтобы в обозримой форме представить их, свяжем каждый одночлен со словом из n букв. Если буквы внутри слова переставить по алфавиту, то факт совпадения двух слов, полученных из разных одночленов, указывает на подобие этих одночленов. Например, в бинOME Ньютона из одночленов p^2qp и qp^3 будет получено слово $pprpq = p^3q$. Итак, среди слов, составленных из букв, которые упорядочены по алфавиту, не должно быть одинаковых. Число этих слов как раз и будет количеством одночленов в итоговой сумме после раскрытия скобок и приведения подобных.

Чтобы получить все эти слова, будем их формировать и располагать в алфавитном порядке, как ранее поступили с буквами. Чтобы это упорядочение легко воспринималось, в качестве обозначения слагаемых в исходной скобке используем буквы



латинского алфавита, начиная с a . Таким образом, в n -ю степень будут возводиться суммы вида $a, a+b, a+b+c, a+b+c+d, \dots$

Последующие задания могут показаться слишком частными, но именно они помогут разобраться в ситуации.

Задание 11. Вывести формулу, аналогичную формуле бинома Ньютона, для возведения в квадрат суммы трёх слагаемых.

Решение. По договорённости будем выводить формулу для выражения $(a+b+c)^2$. Правило перемножения скобок позволяет перечислить все одночлены, из которых складывается итоговое выражение (они же могут рассматриваться как соответствующие слова). Перечисляемые одночлены расположим в алфавитном порядке

$$a^2, ab, ac, b^2, bc, c^2.$$

Их шесть. Разберёмся, почему. Если обратиться к степеням 0 и 1, то для $(a+b+c)^0 = 1$ – одно слагаемое, а для $(a+b+c)^1 = a+b+c$ – три слагаемых. Вернёмся к квадрату. Все перечисленные многочлены, из которых и складывается квадрат суммы, можно связать со следующими выражениями:

$$a^2 \cdot (b+c)^0$$

$$a \cdot (b+c)^1$$

$$(b+c)^2$$

Здесь как раз и видно, что после приведения подобных будет получено ровно $6 = 1 + 2 + 3$ слагаемых. При этом числа 1, 2 и 3 задают количество слагаемых в биномах степеней 0, 1, 2. Подобная ситуация, позволяющая вычислять количество более длинных слов, отправляясь от количеств, связанных со словами более короткими, сохранится и в дальнейшем.

Что касается коэффициентов, то их вычисление фактически описано в задании 5. Итак, $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$.

Уже на этом этапе можно сделать ряд предположений. Если известно количество членов в любых степенях сумм с $m-1$ слагаемым, то можно получить количество членов в выражении для k -й степени суммы с m слагаемыми. Попытаемся это сделать.

Пусть нужно вычислить n -ю степень суммы m слагаемых $(a+b+\dots)^n$, тогда все члены, составляющие итоговую сумму могут быть получены следующим образом: они являются одночленами всех многочленов вида $(b+\dots)^k \cdot a^{n-k}$. Если многочлен $(b+\dots)^k$ состоит из s_k слагаемых, то n -я степень суммы m слагаемых $(a+b+\dots)^n$ состоит из суммы $s_0 + s_1 + \dots + s_n$ членов.

Пока это не даёт возможности получить итоговую общую формулу для числа членов. Но для степеней трёх слагаемых такая возможность появилась. Дело в том, что число членов бинома в n -й степени равно $n+1$. Из этого и предыдущих рассуждений



следует, что число членов степени $(a + b + c)^n$ равно сумме натуральных чисел от 1 до $n + 1$. Эту сумму легко вычислить. Она равна $\frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$.

Теперь открывается возможность выдвигать новые гипотезы. Но сначала рассмотрим два задания проверочного и закрепляющего характера.

Задание 12. Вывести формулу, аналогичную формуле бинома Ньютона, для возведения в третью степень ($n = 3$) суммы трёх слагаемых.

Решение. Выведем формулу для выражения $(a + b + c)^3$. Перечислим все одночлены, из которых складывается итоговое выражение. Перечисляемые одночлены расположим в алфавитном порядке

$$a^3, a^2b, a^2c, ab^2, abc, ac^2, b^3, b^2c, bc^2, c^3.$$

Их число равно $10 = 1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \cdot 5}{2}$, что подтверждает полученный ранее результат. Остаётся найти коэффициенты. Для a^3, b^3, c^3 этот коэффициент равен 1. Для $a^2b, a^2c, ab^2, ac^2, b^2c, bc^2$ коэффициент равен $\frac{3!}{2!1!} = 3$. Для abc коэффициент равен $\frac{3!}{1!1!1!} = 6$.

Задание 13. Вывести формулу, аналогичную формуле бинома Ньютона, для возведения в пятую степень ($n = 5$) суммы трёх слагаемых.

Решение. Вычисляя выражение $(a + b + c)^5$ перечислим все одночлены, из которых складывается итоговое выражение. Их количество равно $21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{6 \cdot 7}{2}$

$$a^5, a^4b, a^4c, a^3b^2, a^3bc, a^3c^2, a^2b^3, a^2b^2c, a^2bc^2, a^2c^3$$

$$ab^4, ab^3c, ab^2c^2, abc^3, ac^4, b^5, b^4c, b^3c^2, b^2c^3, bc^4, c^5.$$

Коэффициенты вычисляются аналогично.

Задание 14. Сумма m одночленов возведена в n -ю степень. Каково число одночленов, из которых складывается итоговое выражение? Какие коэффициенты возникнут после приведения подобных? Каково число слагаемых после приведения подобных? Высказать гипотезу.

Решение. Начнём с того, что число одночленов, из которых складывается итоговое выражение или, что то же самое, число слов без повторений, называется **количеством** всевозможных **упорядоченных разбиений** числа n на m целых неотрицательных чисел.

Фактически на данном этапе есть возможность последовательно вычислять нужные числа, суммируя соответствующие последовательности. Для возведения в квадрат суммирование уже проведено и получен результат: **количество** всевозможных **упорядоченных разбиений** числа n на 3 целых неотрицательных числа равно



$$\frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}.$$

Попытаемся получить количество всевозможных упорядоченных разбиений числа n на 4 целых неотрицательных числа. Для этого просуммируем последовательность чисел $\frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \dots + \frac{(n+2) \cdot (n+3)}{2}$. Для получения результата используем формулу суммирования квадратов натуральных чисел:

$$1^2 + 2^2 + \dots + \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} [15].$$

Итак,

$$\begin{aligned} & \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \dots + \frac{(n+2) \cdot (n+3)}{2} = \frac{1}{2} \cdot (1^2 + 1 + 2^2 + 2 + \dots + (n+2)^2 + n + 2) = \\ & = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(n+2) \cdot (n+3) \cdot (4n+5)}{6} + \frac{(n+2) \cdot (n+3)}{2} \right) = \frac{(n+2) \cdot (n+3)}{4} \cdot \left(\frac{4n+5}{6} + \frac{1}{2} \right) = \\ & \frac{(n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)}{3!}. \end{aligned}$$

Теперь можно заметить, что все количества всевозможных упорядоченных разбиений выражаются как число сочетаний – для $m = 2$ это C_{n+1}^1 , для $m = 3$ это C_{n+2}^2 , для $m = 4$ это C_{n+3}^3 . В качестве гипотезы выскажем следующее предположение: количество всевозможных упорядоченных разбиений числа n на m целых неотрицательных чисел выражаются как число сочетаний C_{n+m-1}^{m-1} . Это, с учётом наших рассуждений означает, что для всех n и m выполняется равенство

$$C_{0+m-1}^{m-1} + C_{1+m-1}^{m-1} + C_{2+m-1}^{m-1} + \dots + C_{(n-1)+m-1}^{m-1} + C_{n+m-1}^{m-1} = C_{(n+1)+m}^m$$

Отметим, что в этом равенстве можно сумму любого набора последовательных слагаемых, начиная с первого, в левой части можно свернуть в соответствующее сочетание.

Чтобы доказать формулу, используем метод математической индукции. Для малых значений числа m проверка уже сделана. Кроме того, формула верна для любых m при $n = 1$.

Предположим, что формула верна для некоторого m при $n \leq k$. И, кроме того, она верна для всех n при всех меньших значениях m . Докажем, что она верна и для m при $n = k + 1$. Для этого достаточно доказать, что

$$C_{k+1+m}^m + C_{k+1+m}^{m-1} = C_{k+2+m}^m.$$

Здесь свёрнута в сочетание сумма всех слагаемых кроме последнего, что допустимо по предположению индукции.



Эта формула действительно верна.

$$\begin{aligned} C_{k+1+m}^m + C_{k+1+m}^{m-1} &= \frac{(k+1+m)!}{m!(k+1)!} + \frac{(k+1+m)!}{(m-1)!(k+2)!} = \\ &= \frac{(k+1+m)!}{(m-1)!(k+1)!} \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{k+2} \right) = \frac{(k+2+m)!}{m!(k+2)!} = C_{k+2+m}^m. \end{aligned}$$

Перейдём к приложениям комбинаторики.

4. КОМБИНАТОРИКА И ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В качестве теоретико-вероятностных задач будем искать распределения дискретных случайных величин. Напомним, что **дискретной случайной величиной называется величина, при испытаниях принимающая случайные значения** $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ **с вероятностями** $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$. Вектор $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$ называется распределением вероятностей случайной величины.

Начнём с задач, относящихся к области классической вероятности. **Классическое определение вероятности, основано на понятии равновероятности.** Если какие-то события должны происходить с одинаковой частотой (например, из соображений симметрии), то они называются равновероятными. Примером равновероятных событий является выпадение какой-то из граней игрального кубика.

Вычисления классических вероятностей производится по следующему правилу. Пусть общее число равновероятных событий равно n , и пусть m из них по условию задачи считаются благоприятными, тогда вероятность благоприятного события равна отношению $\frac{m}{n}$.

Задание 15. В урне находится n чёрных шаров и m белых. Из урны наугад вынимают k шаров ($n > k, m > k$). Описать множество возможных исходов. Ввести дискретную случайную величину, связанную с этими исходами и найти её распределение.

Решение. Характер исхода определяется количеством вынутых из урны шаров одного цвета. Для определённости будем ориентироваться на количество вынутых чёрных шаров. Таким образом, возможен $k + 1$ исход, поскольку число вынутых чёрных шаров меняется от нуля до k . Перейдём к вычислению вероятностей каждого из этих исходов.

Пусть из урны вынули i чёрных шаров и $k - i$ белых. Общее число вариантов, которыми из урны можно вынуть k шаров равно C_{n+m}^k . Общее число вариантов, которыми из урны можно вынуть i чёрных шаров равно C_n^i . Общее число вариантов, которыми из урны можно вынуть $k - i$ шаров равно C_m^{k-i} . Значит, общее число вариантов, которыми из урны можно вынуть i чёрных шаров и $k - i$ белых шаров равно $C_n^i \cdot C_m^{k-i}$. Следовательно, исход, связанный с тем, что из урны вынута i чёрных шаров равен $p_i = \frac{C_n^i \cdot C_m^{k-i}}{C_{n+m}^k}$. Тем самым, распределение соответствующей дискретной случайной величины найдено.



Задание 16. Написать программу для вычисления вероятностей событий из предыдущего задания.

Решение. В программе используется подпрограмма вычисления числа сочетаний. Результат работы программы показан на рисунке 5.

```
n = 6
m = 7
k = 6
nt = n+m
mt = k
sotsh()
c3 = cnm
GraphicsWindow.BrushColor = "black"
GraphicsWindow.Width = 400
GraphicsWindow.Height = 400
GraphicsWindow.DrawText(10,20,"Число чёрных шаров")
GraphicsWindow.DrawText(170,20,"Вероятность")
y = 50
w = 0
'i – количество чёрных шаров
For i = 0 To k
    nt = n
    mt = i
    sotsh()
    c1 = cnm
    nt = m
    mt = k-i
    sotsh()
    c2 = cnm
    'Вероятность выборки с i чёрными шарами
    p = (c1*c2)/c3
    'Сумма вероятностей
    w = w + p
    GraphicsWindow.DrawText(50, y, i)
    GraphicsWindow.DrawText(150, y, p)
    y = y + 30
EndFor
GraphicsWindow.DrawText(10, y,"Сумма вероятностей")
GraphicsWindow.DrawText(150, y, w)
'Подпрограмма
Sub sotsh
    cnm = 1
    If mt = 0 Then
        Goto met
    EndIf
    For j = mt To 1 Step -1
        cnm = cnm*nt/j
```



```

nt = nt - 1
EndFor
cnm = Math.Round(cnm)
met:
EndSub
  
```

Число чёрных шаров	Вероятность
0	0,0040792540792540792540792541
1	0,0734265734265734265734265734
2	0,3059440559440559440559440559
3	0,4079254079254079254079254079
4	0,1835664335664335664335664336
5	0,0244755244755244755244755245
6	0,0005827505827505827505827506
Сумма вероятностей	1,0000000000000000000000000000

Рис. 5

Задание 17. Написать программу, для вычисления вероятностей из предыдущего задания в виде обыкновенных дробей.

Пояснение. Нужно найти числитель дроби, выражающей соответствующую вероятность, то есть $C_n^i \cdot C_m^{k-i}$, а затем найти наибольший общий делитель числителя и знаменателя и сократить дробь. Вычисление НОД двух натуральных чисел описано в статье авторов [13].

При вычислении вероятности наступления объединения двух несовместных событий их вероятности складываются, а при вычислении вероятности совместного наступления нескольких независимых событий их вероятности перемножаются. Из этого обстоятельства следует, что **вычисление совокупности вероятностей полной системы событий в некоторых случаях можно связать с перемножением скобок**. Хорошим примером является задача о стрелках.

Ограничимся случаем трёх стрелков, которые поражают цель с вероятностями p_1, p_2, p_3 . Соответственно вероятности их промахов равны $q_1 = 1 - p_1, q_2 = 1 - p_2, q_3 = 1 - p_3$. Для этих стрелков полная система событий такова: все трое попали, не попал только первый, не попал только второй, не попал только третий, попал только первый, попал только второй, попал только третий, все трое не попали. Чтобы получить полное решение задачи о вычислении вероятностей этих событий, нужно перемножить три скобки:

$$\begin{aligned}
 & (p_1 + q_1)(p_2 + q_2)(p_3 + q_3) = \\
 & = p_1 p_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 + p_1 q_2 p_3 + p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3 + q_1 q_2 q_3.
 \end{aligned}$$



Каждое слагаемое с одной стороны определяет характер события: буква p указывает на попадание, а индекс, на номер попавшего стрелка. Буква q точно так же указывает на промах. С другой стороны соответствующее слагаемое как раз и задаёт вероятность соответствующего события.

Часто требуется найти вероятности объединённых событий, например, событие «попал только один стрелок» складывается из трёх событий «попал только первый», «попал только второй», «попал только третий». Итак, вероятность события «попал только один стрелок» равна $p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3$.

Перейдём к рассмотрению **схемы Бернулли**. Проведённые только что рассуждения позволяют связать схему испытаний Бернулли с биномом Ньютона. Напомним, что в схеме испытаний Бернулли многократно выполняются однотипные опыты, приводящие к наступлению (с вероятностью p) или ненаступлению (с вероятностью $q = 1 - p$) одного и того же события A . Например, такая ситуация возникает при многократных выстрелах по цели одного и того же стрелка. Результаты опытов предполагаются независимыми. По этой причине вероятности событий перемножаются как выше в задаче о стрелках.

Таким образом, каждое испытание Бернулли можно уподобить выстрелу одного и того же стрелка. В случае испытаний Бернулли этот стрелок стреляет последовательно. Для двух выстрелов вероятность двух попаданий равна p^2 . Вероятность двух промахов равна q^2 . Наконец, вероятность одного попадания складывается из вероятностей двух несовместных событий – (попадание, промах) и (промах, попадание), то есть эта вероятность равна $2pq$.

Легко понять, что указанные вероятности равны слагаемым бинома Ньютона: $(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$. Можно понять, что при многочисленных испытаниях возникнет сходная ситуация.

Пусть проведено n испытаний Бернулли. Обозначим через $P(n, k)$ вероятность того, что в n испытаниях благоприятное событие A наступило ровно k раз (k меняется от нуля до n). Тогда на основе того, что вероятности совместного наступления независимых событий перемножаются и с помощью бинома, получим формулу: $P(n, k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. Если рассмотреть все вероятности числа успехов, будет получено так называемое биномиальное распределение вероятностей.

Задание 18. Написать программу для вычисления биномиального распределения вероятностей и построения соответствующей диаграммы.

Решение. Программа может быть получена из программы задания 9 с помощью достаточно очевидной модификации. Нужно ввести вероятность успешного испытания. Кроме того, следует значительно увеличить коэффициент, определяющий высоту прямоугольников, составляющих диаграмму. При выводе на экран соответствующих вероятностей нужно избежать наложения чисел друг на друга. Результаты работы программы показаны на рисунке 6.

```
n = 8
p = .6
q = 1 - p
```



```
GraphicsWindow.PenColor = «black»
GraphicsWindow.Width = 400
GraphicsWindow.Height = 550
x = 50
y = 370
For m = 0 To n
  'Подпрограмма вычисления числа сочетаний
  sotsh()
EndFor
'Подпрограмма
Sub sotsh
  nt = n
  mt = m
  cnm = 1
  If m > n/2 Then
    mt = n - m
  EndIf
  If m = 0 Then
    Goto met
  EndIf
  For i = mt To 1 Step -1
    cnm = cnm*nt/i
    nt = nt - 1
  EndFor
  'Округление до ближайшего целого
  cnm = Math.Round(cnm)
  met:
  pq = cnm * Math.Power(p, m) * Math.Power(q, n - m)
  GraphicsWindow.DrawText(x, y, pq)
  GraphicsWindow.DrawRectangle(x, 350 - pq*1000, 20, pq*1000)
  x = x + 30
  y = y + 15
EndSub
```

Схема Бернулли может быть обобщена на случай, когда каждое из стандартных испытаний имеет более двух исходов. Это обобщение называют **полиномиальной схемой**. Хорошим примером этой схемы является одновременное бросание нескольких игральных кубиков. При этом рассматривается дискретная случайная величина, равная сумме выпавших очков. Как и следует ожидать, вычисление вероятностей, определяющих распределение этой случайной величины, можно связать с возведением в степень, равную числу кубиков, суммы из шести слагаемых. Однако возможны и иные подходы к этой задаче.

Рассмотрим конкретные примеры. Начнём со случая бросания двух кубиков. Он наиболее прост и нагляден. В частности, множество всех событий можно представить в виде квадратной таблицы (рисунок 7).

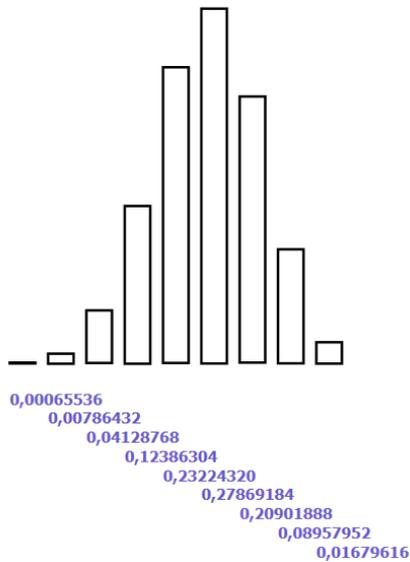


Рис. 6

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Рис. 7

Задание 19. Получить распределение вероятностей полиномиального распределения вероятностей, возникающего при бросании двух игральных костей.

Решение. Отметим, что при практической реализации данной схемы можно либо бросать один раз сразу две кости, либо последовательно бросать одну кость два раза.

Поскольку целью является подсчёт слов, приводящих к одинаковым суммам, следует именно на этой задаче сосредоточить внимание. Дело в том, что разные слова-одночлены могут соответствовать одинаковым суммам. Именно суммы и надо перечислять. Из-за наличия наглядного представления ситуации можно просто подсчитать число клеток с равными суммами и разделить на общее число клеток.



Однако мы поступим несколько иначе, нацеливаясь на более сложную задачу и готовясь к её решению. Итак, приступим к перечислению одинаковых сумм.

Суммы меняются от 2 до 12. Будем выписывать разложение этих сумм на слагаемые от 1 до 6, располагая сомножители по возрастанию.

Сумма 2 получается единственным образом (1, 1). Вероятность равна $\frac{1}{36}$.

Сумма 3 получается либо из слагаемых (1, 2), либо из перестановки (2, 1). Имеем два варианта. Вероятность равна $\frac{1}{18}$.

Сумма 4 получается либо из слагаемых (1, 3) и (2, 2), либо из перестановки (3, 1). Имеем три варианта. Вероятность равна $\frac{1}{12}$.

Сумма 5 получается либо из слагаемых (1, 4) и (2, 3), либо из перестановок (4, 1) и (3, 2). Имеем четыре варианта. Вероятность равна $\frac{1}{9}$.

Сумма 6 получается либо из слагаемых (1, 5), (2, 4) и (3, 3), либо из перестановок (5, 1) и (4, 2). Имеем пять вариантов. Вероятность равна $\frac{5}{36}$.

Сумма 7 получается либо из слагаемых (1, 6), (2, 5) и (3, 4), либо из перестановок (6, 1), (5, 2) и (4, 3). Имеем шесть вариантов. Вероятность равна $\frac{1}{6}$.

Суммы 8, 9, 10, 11 и 12 в известном смысле получаются симметрично суммам от 6 до 1. Вероятности соответственно равны $\frac{5}{36}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{36}$.

Задание 19. Получить распределение вероятностей полиномиального распределения вероятностей, возникающего при бросании трёх игральных костей.

Решение. Наглядность соответствующей геометрической конструкции значительно понижена, хотя ещё сохраняется возможность хотя бы частичного изображения трёхмерной таблицы (рисунок 8).

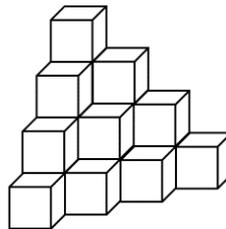


Рис. 8

Этот рисунок позволяет понять, что решаемая задача связана с вопросом геометрического характера, а именно с подсчётом числа единичных кубиков, составляющих большой куб, центры которых лежат на плоскости перпендикулярной одной из диагоналей большого куба. Отметим, что число единичных кубиков, слагающих большой куб, равно 216,

Перейдём к подсчётам.



Суммы меняются от 3 до 18. Будем выписывать разложение этих сумм на слагаемые от 1 до 6, располагая сомножители по возрастанию.

Сумма 3 получается **единственным образом** (1, 1, 1). Вероятность равна $\frac{1}{216}$.

Сумма 4 получается из слагаемых (1, 1, 2), дающих три перестановки. **Имеем три варианта**. Вероятность равна $\frac{1}{72}$.

Сумма 5 получается из слагаемых (1, 1, 3) и (1, 2, 2). Каждая сумма с помощью перестановок даёт три варианта. **Имеем шесть вариантов**. Вероятность равна $\frac{1}{36}$.

Сумма 6 получается из слагаемых (1, 1, 4) – три варианта, (1, 2, 3) – шесть вариантов после перестановок, (2, 2, 2) – один вариант. **Всего имеем десять вариантов** (они как раз соответствуют рисунку 8). Вероятность равна $\frac{5}{108}$.

Сумма 7 получается из слагаемых (1, 1, 5) – три варианта, (1, 2, 5) – шесть вариантов, (1, 3, 3) – три варианта, (2, 2, 3) – три варианта. **Всего имеем пятнадцать вариантов**. Вероятность равна $\frac{5}{72}$.

Сумма 8 получается из слагаемых (1, 1, 6) – три варианта, (1, 2, 4) – шесть вариантов, (1, 3, 4) – шесть вариантов, (2, 2, 4) – три варианта, (2, 3, 3) – три варианта. **Всего имеем двадцать один вариант**. Вероятность равна $\frac{7}{72}$.

Сумма 9 получается из слагаемых (1, 2, 6) – шесть вариантов, (1, 3, 5) – шесть вариантов, (1, 4, 4) – три варианта, (2, 2, 5) – три варианта, (2, 3, 4) – шесть вариантов, (3, 3, 3) – один вариант. **Всего имеем двадцать пять вариантов**. Вероятность равна $\frac{25}{216}$.

Сумма 10 получается из слагаемых (1, 3, 6) – шесть вариантов, (1, 4, 5) – шесть вариантов, (2, 2, 6) – три варианта, (2, 3, 5) – шесть вариантов, (2, 4, 4) – три варианта, (3, 3, 4) – три варианта. **Всего имеем двадцать семь вариантов**. Вероятность равна $\frac{1}{8}$.

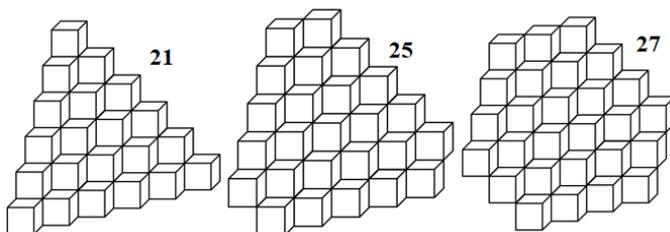
Суммы от 11 до 18 в известном смысле получаются симметрично суммам от 10 до 3. Вероятности соответственно равны $\frac{1}{8}, \frac{25}{216}, \frac{7}{72}, \frac{5}{72}, \frac{5}{108}, \frac{1}{36}, \frac{1}{72}, \frac{1}{216}$.

Для проверки найдём сумму всех вариантов:

$$2 \cdot (1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 25 + 27) = 2 \cdot 108 = 216.$$

Задание 20. Изобразить сечения куба, соответствующие суммам очков 8, 9 и 10 с указанием числа вариантов.

Решение. Изображения показаны на рисунке 9.



Рису. 9



Задание 21. Разобраться, как соответствующие сечения складываются в большой куб.

Пояснение. Следующее сечение куба также соответствует сумме очков 11. Оно, как и сечение, соответствующее 10 очкам, складывается из 27 вариантов, но перевёрнуто. Далее прикладываются перевёрнутые сечения в обратном порядке из числа вариантов 25, 21, 15...

5. СИММЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Вернёмся к перемножению скобок и обратимся к задачам высшей алгебры, связанным с симметрическими многочленами [16].

Одним из объектов высшей алгебры являются многочлены от нескольких переменных. Будем обозначать соответствующие переменные буквами некоторого алфавита. Тогда каждый член многочлена можно рассматривать как слово, составленное из букв этого алфавита. Кроме того, при таком подходе можно располагать члены в алфавитном (лексикографическом) порядке. Мы уже делали нечто подобное.

Многочлен называется симметрическим, если он не меняется при любой перестановке переменных. Некоторые симметрические многочлены особенно важны. Они называются **элементарными симметрическими многочленами**. Для алфавита, состоящего из n букв, определены n таких многочленов, обозначаемых через $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. Член элементарного симметрического многочлена σ_k соответствуют всем различным словам из k букв. При этом любая буква алфавита не может входить в слово более одного раза.

В курсе высшей алгебры доказывается теорема **основная теорема о симметрических многочленах**. Согласно ей каждый симметрический многочлен может быть выражен как многочлен от элементарных симметрических многочленов. Например, при $n = 2$, $\sigma_1 = x + y$ и $\sigma_2 = x \cdot y$. Симметрический многочлен $x^2 + y^2$ выражается через элементарные: $x^2 + y^2 = \sigma_1^2 - 2 \cdot \sigma_2$.

В примере, конечно, рассмотрен очень простой случай. Но на самом деле при росте числа слагаемых и степеней вычисления становятся всё более сложными. Убедимся в этом.

Задание 22. Рассмотрим многочлены с четырьмя переменными x, y, z, t . В этом случае $\sigma_1(x, y, z, t) = x + y + z + t$. Вычислить $\sigma_1^6 = (x + y + z + t)^6$.

Решение. Перед нами задача, связанная с перемножением скобок и рассмотренная выше. Сейчас, проводя более сложные, чем ранее, вычисления, будем подробно комментировать наши действия, порой повторяя выше сказанное.

Поскольку $(x + y + z + t)^6 = (x + y + z + t)(x + y + z + t)$, в каждой из этих шести скобок выбирается по одной букве из четырёх. По этой причине после раскрытия скобок получится $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^6 = (2^2)^6 = (2^2)^6 = 2^{12} = 2^{10} \cdot 2^2 = 4 \cdot 2^{10} = 4 \cdot 1024 = 4096 = 4$ Кб слагаемых. Уже одно это число показывает, насколько объёмна решаемая задача.

Естественно, что среди слагаемых будут подобные. Количество подобных равно коэффициенту в полиномиальной формуле перед $x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} t^{k_4}$, где $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 6$.



Этот коэффициент равен $P(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{6!}{k_1!k_2!k_3!k_4!}$.

В нашем случае полиномиальная формула будет иметь следующий вид:

$$(x + y + z + t)^6 = \sum P(k_1, k_2, k_3, k_4) x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} t^{k_4}, \quad (1)$$

где сумма распространена на всевозможные разбиения числа 6 на 4 целых неотрицательных слагаемых: $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 6$.

Поскольку $P(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)!}{k_1!k_2!k_3!k_4!} = \frac{6!}{k_1!k_2!k_3!k_4!}$, то ясно, что

если набор чисел (s_1, s_2, s_3, s_4) получается перестановкой из набора (k_1, k_2, k_3, k_4) , то $P(s_1, s_2, s_3, s_4) = P(k_1, k_2, k_3, k_4)$. Поэтому, например, в разложении (1) коэффициенты при x^2t^2yz и y^2z^2xt будут равны. Отсюда следует, что достаточно найти коэффициенты для таких разбиений $6 = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$, что $k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq k_4 \geq 0$, а затем переставлять показатели всеми возможными способами.

Запишем все разбиения числа 6 на 4 целых неотрицательных слагаемых, располагая их в порядке убывания:

1. (6, 0, 0, 0).
2. (5, 1, 0, 0).
3. (4, 2, 0, 0).
4. (4, 1, 1, 0).
5. (3, 3, 0, 0).
6. (3, 2, 1, 0).
7. (3, 1, 1, 1).
8. (2, 2, 2, 0).
9. (2, 2, 1, 1).

Всего получилось 9 основных типов разбиений. Остальные разбиения получаются из основных всевозможными перестановками. Теперь выпишем для каждого типа полиномиальный коэффициент, число S_k слагаемых, соответствующих этому коэффициенту, а также сами эти слагаемые.

1. $P_6(6, 0, 0, 0) = \frac{6!}{6!0!0!0!} = 1$. В этом случае $S_1 = P_4(1, 3) = \frac{4!}{1!3!} = 4$, так как число S_1 слагаемых, соответствующих этому коэффициенту, равно количеству перестановок четырёх элементов, из которых три повторяются. Выпишем все четыре слагаемых, соответствующих коэффициенту 1:

$$x^6 + y^6 + z^6 + t^6.$$

2. $P_6(5, 1, 0, 0) = \frac{6!}{5!1!0!0!} = 6$. В этом случае $S_2 = P_4(1, 1, 2) = \frac{4!}{1!1!2!} = 12$, так как число S_2 слагаемых, соответствующих этому коэффициенту, равно количеству



перестановок четырёх элементов, из которых два повторяются. Выписываем все двенадцать слагаемых, соответствующих коэффициенту 6:

$$6x^5y + 6x^5z + 6x^5t + 6y^5x + 6y^5z + 6y^5t + 6z^5x + 6z^5y + 6z^5t + 6t^5x + 6t^5y + 6t^5z.$$

3. $P_6(4, 2, 0, 0) = \frac{6!}{4!2!0!0!} = 15$. В этом случае $S_3 = P_4(1, 1, 2) = \frac{4!}{1!1!2!} = 12$, так как число S_3 слагаемых, соответствующих этому коэффициенту, равно количеству перестановок четырёх элементов, из которых два повторяются. Выписываем все двенадцать слагаемых, соответствующих коэффициенту 15:

$$15x^4y^2 + 15x^4z^2 + 15x^4t^2 + 15y^4x^2 + 15y^4z^2 + 15y^4t^2 + \\ + 15z^4x^2 + 15z^4y^2 + 15z^4t^2 + 15t^4x^2 + 15t^4y^2 + 15t^4z^2.$$

4. $P_6(4, 1, 1, 0) = \frac{6!}{4!1!1!0!} = 30$. В этом случае $S_4 = P_4(1, 1, 2) = \frac{4!}{1!1!2!} = 12$, так как число S_4 слагаемых, соответствующих этому коэффициенту, равно количеству перестановок четырёх элементов, из которых два повторяются. Выписываем все двенадцать слагаемых, соответствующих коэффициенту 30:

$$30x^4yz + 30x^4yt + 30x^4zt + 30y^4xz + 30y^4xt + 30y^4zt + \\ + 30z^4xy + 30z^4xt + 30z^4yt + 30t^4xy + 30t^4xz + 30t^4yz.$$

5. $P_6(3, 3, 0, 0) = \frac{6!}{3!3!0!0!} = 20$. В этом случае $S_5 = P_4(1, 1, 2) = \frac{4!}{2!2!} = 6$, так как число S_5 слагаемых, соответствующих этому коэффициенту, равно количеству перестановок четырёх элементов, из которых два элемента повторяются два раза. Выписываем все шесть слагаемых, соответствующих коэффициенту 20:

$$20x^3y^3 + 20x^3z^3 + 20x^3t^3 + 20y^3z^3 + 20y^3t^3 + 20z^3t^3.$$

6. $P_6(3, 2, 1, 0) = \frac{6!}{3!2!1!0!} = 60$. В этом случае $S_6 = P_4(1, 1, 2) = 4! = 24$, так как число S_6 слагаемых, соответствующих этому коэффициенту, равно количеству перестановок четырёх элементов без повторений. Выписываем все двадцать четыре слагаемых, соответствующих коэффициенту 60:

$$60x^3y^2z + 60x^3y^2t + 60x^3z^2y + 60x^3z^2t + 60x^3t^2y + 60x^3t^2z + 60y^3x^2z + 60y^3x^2t + \\ + 60y^3x^2t + 60y^3z^2x + 60y^3z^2t + 60y^3t^2z + 60z^3x^2y + 60z^3x^2t + 60z^3y^2x + 60z^3y^2t + \\ + 60z^3t^2x + 60z^3t^2y + 60t^3x^2y + 60t^3x^2z + 60t^3y^2x + 60t^3y^2z + 60t^3z^2x + 60t^3z^2y.$$

7. $P_7(3, 1, 1, 1) = \frac{6!}{3!1!1!1!} = 120$. В этом случае $S_7 = P_4(1, 1, 2) = \frac{4!}{3!1!} = 4$, так как число S_7 слагаемых, соответствующих этому коэффициенту, равно количеству перестановок четырёх элементов, из которых три повторяются. Выписываем все четыре слагаемых, соответствующих коэффициенту 120:



$$120x^3yzt + 120y^3xzt + 120z^3xyt + 120t^3yz.$$

8. $P_6(2, 2, 2, 0) = \frac{6!}{2!2!2!0!} = 90$. В этом случае $S_8 = P_4(3, 1) = \frac{4!}{3!1!} = 4$, так как число S_8 слагаемых, соответствующих этому коэффициенту, равно количеству перестановок четырёх элементов, из которых три повторяются. Выписываем все четыре слагаемых, соответствующих коэффициенту 90:

$$90x^2y^2z^2 + 90y^2z^2t^2 + 90z^2t^2x^2 + 90t^2x^2y^2.$$

9. $P_6(2, 2, 1, 1) = \frac{6!}{2!2!1!1!} = 180$. В этом случае $S_9 = P_4(3, 1) = \frac{4!}{2!2!} = 6$, так как число S_9 слагаемых, соответствующих этому коэффициенту, равно количеству перестановок четырёх элементов, из которых два элемента повторяются два раза. Выписываем все 6 слагаемых, соответствующих коэффициенту 180:

$$180x^2y^2zt + 180x^2z^2yt + 180x^2t^2yz + 180y^2z^2xt + 180y^2t^2xz + 180z^2t^2xy.$$

Полученные результаты сведём в таблицу.

Тип	Коэффициент	Число слагаемых	Число слагаемых до приведения подобных
1. (6, 0, 0, 0)	1	4	4
2. (5, 1, 0, 0)	6	12	72
3. (4, 2, 0, 0)	15	12	180
4. (4, 1, 1, 0)	30	12	360
5. (3, 3, 0, 0)	20	6	120
6. (3, 2, 1, 0)	60	24	1440
7. (3, 1, 1, 1)	120	4	480
8. (2, 2, 2, 0)	90	4	360
9. (2, 2, 1, 1)	180	6	1080

Всего получилось $4 + 72 + (180 + 120) + (360 + 1440) + 480 + 360 + 1080 = 76 + 300 + 1800 + 480 + 1440 = 376 + 2280 + 1440 = 2656 + 1440 = (2600 + 1400) + (56 + 40) = 4000 + 96 = 4096$ слагаемых до приведения подобных.

Подсчитаем число слагаемых после приведения подобных, т.е. просуммируем третий столбец таблицы: $4 + 12 \cdot 3 + 6 + 24 + 4 \cdot 2 + 6 = 10 + 36 + 24 + 14 = 24 + 60 = 84$. Мы помним, что количество всевозможных упорядоченных разбиений числа n на m целых неотрицательных чисел выражаются как число сочетаний C_{n+m-1}^{m-1} . В нашем случае $n = 6$ и $m = 4$. Следовательно, число членов после приведения подобных равно $C_9^3 = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 3} = 84$. Таким образом, наши теоретические результаты подтверждены практическим примером.



Чтобы оценить объём проделанной нами работы, запишем окончательный результат:

$$\begin{aligned}(x + y + z + t)^6 = & x^6 + y^6 + z^6 + t^6 + 6x^5y + 6x^5z + 6x^5t + 6y^5x + 6y^5z + 6y^5t + \\ & + 6z^5x + 6z^5y + 6z^5t + 6t^5x + 6t^5y + 6t^5z + 15x^4y^2 + 15x^4z^2 + 15x^4t^2 + 15y^4x^2 + \\ & + 15y^4z^2 + 15y^4t^2 + 15z^4x^2 + 15z^4y^2 + 15z^4t^2 + 15t^4x^2 + 15t^4y^2 + 15t^4z^2 + \\ & + 30x^4yz + 30x^4yt + 30x^4zt + 30y^4xz + 30y^4xt + 30y^4zt + 30z^4xy + 30z^4xt + \\ & + 30z^4yt + 30t^4xy + 30t^4xz + 30t^4yz + 20x^3y^3 + 20x^3z^3 + 20x^3t^3 + 20y^3z^3 + \\ & + 20y^3t^3 + 20z^3t^3 + 60x^3y^2z + 60x^3y^2t + 60x^3z^2y + 60x^3z^2t + 60x^3t^2y + 60x^3t^2z + \\ & + 60y^3x^2z + 60y^3x^2t + 60y^3z^2x + 60y^3z^2t + 60y^3t^2x + 60y^3t^2z + 60z^3x^2y + \\ & + 60z^3x^2t + 60z^3y^2x + 60z^3y^2t + 60z^3t^2x + 60z^3t^2y + 60t^3x^2y + 60t^3x^2z + \\ & + 60t^3y^2x + 60t^3y^2z + 60t^3z^2x + 60t^3z^2y + 120x^3yzt + 120y^3xzt + 120z^3xyt + \\ & + 120t^3yz + 90x^2y^2z^2 + 90y^2z^2t^2 + 90z^2t^2x^2 + 90t^2x^2y^2 + 180x^2y^2zt + 180x^2z^2yt + \\ & + 180x^2t^2yz + 180y^2z^2xt + 180y^2t^2xz + 180z^2t^2xy.\end{aligned}$$

Понятно, что произвольный симметрический многочлен четырёх переменных шестой степени может и более сложным образом выражаться через элементарные, чем в разобранном нами примере. Но этот пример дал нам возможность «пощупать» многочлен $\sigma_1^6 = (x + y + z + t)^6$ своими руками и заодно потренироваться в вычислении перестановок с повторениями, а в одном случае без повторений.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Авторы надеются, что их методические идеи могут оказаться полезными для молодых преподавателей и помочь в их нелёгкой работе. По этой же причине предполагается написание ещё ряда статей, связанных с вычислениями в различных областях математики.

Литература

1. Куланин Е.Д., Нуркаева И.М. О двух геометрических задачах на экстремум. Математика в школе. 2019. № 4. С. 35–40.
2. Куланин Е.Д., Нуркаева И.М. Еще раз о задаче Мавло. Математика в школе. 2020. № 2. С. 76–79.
3. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М. Пропедевтика решения экстремальных задач в школьном курсе математики. Моделирование и анализ данных. 2019. № 4. С. 127–144.
4. Куланин Е.Д., Нгуен Ву Куанг, Степанов М.Е. Осозаемая предметность с компьютерной поддержкой. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. 2019. № 4. С. 145–156.
5. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М. Роль образного мышления в научном мышлении. Моделирование и анализ данных. 2020. Т. 10. № 2 С. 110–128.
6. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М. О различных подходах к решению экстремальных задач. Моделирование и анализ данных. 2020. Т. 11. № 1. С. 40–60.
7. Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А., Куланин Е.Д. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами. Москва, 2013. Том 2 (8-е издание).
8. Степанов М.Е. Некоторые вопросы методики преподавания высшей математики. Моделирование и анализ данных. 2017. № 1. С. 54–94.



9. Куланин Е.Д., Степанов М.Е. Из опыта работы в режиме дистанционного обучения Моделирование и анализ данных. 2022. Т. 12. № 3. С. 58–70.
10. Куланин Е.Д., Степанов М.Е. Всестороннее рассмотрение математических понятий как методический прием. Моделирование и анализ данных. 2022. Т. 12. № 4. С. 67–84.
11. Куланин Е.Д., Степанов М.Е. О визуализации решений некоторых экстремальных задач. Моделирование и анализ данных. 2022. Т. 12. № 4. С. 94–104.
12. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Панфилов А.Д., Потоньшев И.С. Системный подход к методике тифлопедагогики на примере задач математического анализа. 2022. Т. 12. № 2. С. 34–82.
13. Куланин Е.Д., Степанов М.Е. Вычислительный эксперимент в преподавании высшей математики на примере теории чисел. Моделирование и анализ данных. 2024. Т. 14. № 1. С. 170–195.
14. Холл М. Комбинаторика. М., Мир, 1970.
15. Натансон И.П. Суммирование бесконечно малых величин. М., Физматгиз, 1960.
16. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., Физматгиз, 1962.



Computational Experiment in Teaching Higher Mathematics. Combinatorics and its Applications

Yevgeny D. Kulanin*

Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>

e-mail: lucas03@mail.ru

Mikhail E. Stepanov**

Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>

e-mail: mestepanov@yandex.ru

The article continues the cycle ([1] – [12]) of methodological developments of the authors. It discusses some problems related to ways to improve the culture of mathematical thinking of mathematics students. The authors rely on the experience of working at the Faculty of Information Technology of MSUPE.

Keywords: higher education, methods of teaching mathematics, sets and operations with them, combinatorics, enumeration theory, general algebra, algebra of polynomials, probability theory.

For citation:

Kulanin Y.D., Stepanov M.E. A Computational Experiment in Teaching Higher Mathematics. Combinatorics and its Applications. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 3, pp. 174–202. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140310> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Kulanin E.D., Nurkaeva I.M. On two geometric extremum problems. *Mathematics at school*. 2019. No. 4. pp. 35–40.
2. Kulanin E.D., Nurkaeva I.M. Once again about the Mavlo task. *Mathematics at school*. 2020. No. 2. pp. 76–79.
3. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. Propaedeutics of solving extreme problems in the school mathematics course. *Data modeling and analysis*. 2019. No. 4. pp. 127–144.
4. Kulanin E.D., Nguyen Wu Quang, Stepanov M.E. Tangible objectivity with computer support. *Data modeling and analysis. Scientific journal*. 2019. No. 4. pp. 145–156.

****Yevgeny D. Kulanin***, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>, e-mail: lucas03@mail.ru

*****Mikhail E. Stepanov***, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: mestepanov@yandex.ru



5. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. The role of imaginative thinking in scientific thinking. *Data modeling and analysis*. 2020. Vol.10. No. 2 pp. 110–128.
6. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. On various approaches to solving extreme problems. *Data modeling and analysis*. 2020. Vol. 11. No.1. pp. 40–60.
7. Lungu K.N., Norin V.P., Pisny D.T., Shevchenko Yu.A., Kulanin E.D. *Collection of problems in higher mathematics with control papers*. Moscow, 2013. Volume 2 (8th edition).
8. Stepanov M.E. Some questions of the methodology of teaching higher mathematics. *Data modeling and analysis*. 2017. No.1. pp. 54–94.
9. Kulanin E.D., Stepanov M.E. From the experience of working in remote mode *Learning Modeling and data analysis*. 2022. Vol. 12. No. 3. pp. 58–70.
10. Kulanin E.D., Stepanov M.E. Comprehensive consideration of mathematical concepts as a methodological technique. *Data modeling and analysis*. 2022. Vol. 12. No.4. pp.67–84.
11. Kulanin E.D., Stepanov M.E. On visualization of solutions to some extreme problems. *Data modeling and analysis*. 2022. Vol.12. No.4. pp. 94–104.
12. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Panfilov A.D., Potonyshchev I.S. A systematic approach to the methodology of typhlopedagogy on the example of mathematical analysis problems. 2022. Vol. 12. No.2. pp. 34–82.
13. Kulanin E.D., Stepanov M.E. Computational experiment in teaching higher mathematics by the example of number theory. *Data modeling and analysis*. 2024. vol. 14. No.1. pp. 170–195.
14. Hall M. *Combinatorics*. M., Mir, 1970.
15. Natanson I.P. *Summation of infinitesimal quantities*. M., Fizmatgiz, 1960.
16. Kurosh A.G. *Course of higher algebra*. M., Fizmatgiz, 1962.

Получена 09.07.2024

Принята в печать 07.08.2024

Received 09.07.2024

Accepted 07.08.2024

Моделирование и анализ данных 2024. Том 14. № 3.

Научный журнал

Издаётся с 2011 года

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный психолого-педагогический университет»

Адрес редколлегии:

г. Москва, ул. Сретенка, 29, факультет информационных технологий

Тел.: +7 (499) 167-66-74

E-mail: mad.mgppu@gmail.com

Журнал зарегистрирован в Государственном комитете РФ по печати.

Свидетельство о регистрации средств массовой информации

ПИ № ФС77-66444 от 14 июля 2016 года

ISSN: 2219-3758

ISSN: 2311-9454 (online)

Подписано в печать: 20.09.2024.

Формат: 70*100/16. Гарнитура Times.

Усл. печ. п. 12,6. Усл.-изд. л. 10,2.

Печать по требованию. Электронное издание.