

**2**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И АНАЛИЗ ДАННЫХ**

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

**MODELLING  
AND DATA ANALYSIS**

SCIENTIFIC JOURNAL

**2022**

ISSN: 2219-3758  
ISSN: 2311-9454 (ONLINE)

# **МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ**

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

**2022 • Том. 12 • № 2**

# **MODELLING AND DATA ANALYSIS**

SCIENTIFIC JOURNAL

**2022 • Vol. 12 • № 2**



Московский государственный  
психолого-педагогический университет  
Moscow State University  
of Psychology & Education

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Главный редактор** – Л.С. Куравский

**Заместители главного редактора** – С.Д. Кулик, А.В. Пантелеев

**Члены редакционной коллегии** – К.К. Абгарян, Г.Г. Амосов, М.В. Воронов, Е.Л. Григоренко (США), В.К. Захаров, А.И. Кибзун, Л.М. Либкин (Великобритания), В.Р. Милов, А.В. Наумов, Д.Л. Ревизников, Х. Холлинг (Германия), Д. Фрэнсис (США), К.В. Хорошенко (Великобритания), Г.А. Юрьев

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**Председатель редакционного совета** – Г.Г. Амосов

**Члены редакционного совета** – В.А. Барабанщиков, П. Бентлер (США), А.В. Горбатов, Л.С. Куравский, Л.М. Либкин (Великобритания), А.А. Марголис, В.В. Рубцов, Д.В. Ушаков, Д. Фрэнсис (США)

**Ответственный секретарь** – Н.Е. Юрьева

Издаётся с 2011 года

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Московский государственный психолого-педагогический университет»

Адрес редколлегии:

г. Москва, ул. Сретенка, 29, факультет информационных технологий  
Тел.: +7 (499) 167-66-74  
E-mail: mad.mgppu@gmail.com

Журнал зарегистрирован в Государственном комитете РФ по печати.

Свидетельство о регистрации средств массовой информации

ПИ № ФС77-52058 от 7 декабря 2012 года

**ISSN: 2219-3758**

**ISSN: 2311-9454 (online)**

© ФГБОУ ВО «Московский государственный психолого-педагогический университет», 2022.  
Все права защищены. Любая часть этого издания не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами без письменного разрешения редакционной коллегии. Правила оформления рукописей, направляемых в редакцию журнала, высылаются по запросу по электронной почте.



## СОДЕРЖАНИЕ



### **АНАЛИЗ ДАННЫХ**

---

*Иванов А.А., Яшина Н.П.*

Анализ больших данных в задачах многокритериального выбора ..... 5

*Романадзе Е.Л., Судаков В.А., Кислинский В.Г.*

Разработка метода извлечения ключевых  
слов на основе вероятностной тематической модели ..... 20

### **МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ**

---

*Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Панфилов А.Д., Потоньшев И.С.*

Системный подход к методике  
тифлопедагогики на примере задач математического анализа ..... 34

*Степанов М.Е., Воронина С.Н.*

Осязательные модели в аналитической геометрии ..... 83

### **КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ**

---

*Колотовкин И.С.*

Использование самообучающегося  
алгоритма с элементами искусственного интеллекта  
на основе цепей Маркова для корректировки семантического  
ядра сайтов научного и коммерческого направления ..... 103







вычислительную сложность, что позволяет работать с большими массивами исходной информации. Разработана программная система ранжирования альтернатив в задачах с большими данными. Исходная информация хранится в Excel таблицах, что позволяет легко учитывать ограничения по шкалам критериев. Организация работы программной системы продемонстрирована на примере выбора наилучшего варианта дрона для приобретения с целью наблюдения за местностью, ее съемок и передачи информации оператору.

**Ключевые слова:** принятие решений, критерий качества, анализ больших данных, матрица предпочтений, ранжирование альтернатив.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

До недавнего времени считалось, что проблема выбора из предложенных альтернатив лежит в области психологии, напрямую зависит от индивидуальных способностей человека. В последние годы возможность получения и необходимость обработки большого объема исходной информации не позволяют осуществить выбор, основываясь только на интуиции лица, принимающего решения (ЛПР). Появилась потребность в разработке математически обоснованных методов и алгоритмов, позволяющих доверить процесс выбора оптимальных вариантов программной системе.

При принятии решений большинство задач обычно являются многокритериальными: рассматриваемые альтернативы оцениваются по критериям качества. Методы выбора и упорядочения альтернатив в таких задачах в значительной степени зависят от шкал критериев. Традиционные алгоритмы выбора оптимальных вариантов решений основываются на задании информации в количественных шкалах, т.е. численными оценками альтернатив по критериям качества, при этом обычно требуется, чтобы шкалы критериев были однородными. Но, практические задачи с однородными шкалами встречаются крайне редко, поэтому приходится использовать дополнительные процедуры приведения оценок по критериям к единой шкале [1].

Данная статья основывается на алгоритмах, не требующих предварительного приведения шкал критериев к однородным [2,3]. Все алгоритмы имеют полиномиальную вычислительную сложность, что позволяет анализировать большие объемы исходной информации.

В разработанную программную систему данные от ЛПР поступают через Excel таблицы. Это простой и удобный способ ввода информации для обычных пользователей в случае больших данных [4]. Информация хранится на удаленном сервере, что позволяет зарегистрированному пользователю всегда иметь доступ для её корректировки, причем с различных устройств. Работа программной системы продемонстрирована на примере выбора наиболее предпочтительных для ЛПР моделей дронов.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА

Для решения задачи необходимо сформировать математическую модель, полностью отражающую разнообразие информации и методов принятия решений. Будем

рассматривать математическую модель многокритериального выбора, содержащую следующие элементы:

$$\langle t, A, K, X, F, \varphi, I, r \rangle,$$

где  $t$  – постановка задачи (ранжирование, выбор наилучших альтернатив);

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  – множество рассматриваемых альтернатив;

$K = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$  – множество критериев;

$X = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$  – множество шкал критериев;

$F = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$  – предпочтения по шкалам критериев;

$\varphi$  – отображение  $A \rightarrow (X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m)$

$I$  – информация о важности критериев;

$r$  – решающее правило (последовательность алгоритмов непротиворечивого агрегирования предпочтений).

В зависимости от содержательной постановки задачи  $t$  требуется построить агрегированное отношение предпочтения на множестве альтернатив  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , провести ранжирование альтернатив и/или осуществить выбор наилучших вариантов альтернатив. Множество альтернатив  $A$  задается ЛПР. Альтернативы оцениваются по критериям качества  $K = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$  с порядковыми или числовыми шкалами  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ . Таким образом, каждой альтернативе ставится в соответствие векторная оценка из множества  $(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m)$ ;  $(\varphi: A \rightarrow (X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m))$ . Значения оценок по числовым шкалам критериев минимизируются или максимизируются. Так стоимость альтернативы обычно минимизируется, а скорость – максимизируется. Существуют шкалы, у которых наилучшие и худшие оценки зависят от предпочтений ЛПР, например, месторасположение альтернативы. Предпочтения по шкалам критериев  $F = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$  могут быть заданы численными оценками альтернатив по данному критерию, попарным сравнением (в частности ранжированием альтернатив), т.е. отношениями предпочтения  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ , выбором множества наилучших альтернатив, вербальными оценками. В случае задания предпочтений бинарными отношениями оценок альтернатив по шкалам критериев не существует.

Информация  $I$  о важности критериев  $K_1, K_2, \dots, K_m$  может быть задана отношением предпочтения на множестве критериев (относительная важность критериев) или весовыми коэффициентами  $k = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ , численно выражающими важность критериев. Относительная важность критериев может быть дополнена информацией о том, во сколько раз один критерий лучше другого. Коэффициенты важности могут быть заданы ЛПР или вычислены в результате работы одной из специально разработанных процедур. Если критерии обладают одинаковой важностью, то все весовые коэффициенты равны единице.

Под решающим правилом  $r$  понимается последовательность алгоритмов, приводящая к решению задачи. В первую очередь решающее правило содержит алгоритмы многокритериального выбора, а также вспомогательные алгоритмы обработки информации. При формировании решающего правила  $r$  учитывается тип входной



информации и требования ЛПР к выходной информации. В связи с этим требуются процедуры, позволяющие выявить и формализовать в удобном для работы основных алгоритмов виде входную информацию. В ряде методов могут потребоваться дополнительные процедуры приведения шкал критериев к единой шкале, а на заключительном этапе решения задачи алгоритмы для упорядочения альтернатив и выбора наилучших из них. Решающее правило также может содержать алгоритмы нахождения коэффициентов важности критериев.

В данной статье предлагаются алгоритмы многокритериального выбора, основанные на задании численных оценок альтернатив по критериям, но не требующие приведения шкал критериев к однородным. Все алгоритмы полиномиальные, что позволяет анализировать большое число альтернатив.

Пусть альтернативы из множества  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  оцениваются по критериям качества  $K = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$  с числовыми шкалами отношений  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ . Каждой альтернативе из множества  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  ставится в соответствие вектор оценок по критериям. Требуется ранжировать альтернативы, т.е. упорядочить их по предпочтению.

Каждому критерию  $K_t$  ( $t = 1, \dots, m$ ) поставим в соответствие вектор оценок альтернатив  $x^t = \langle x_1^t, x_2^t, \dots, x_n^t \rangle$ ,  $x_i^t \in \mathbb{R}^+$ .

**Определение 1.** Матрицей предпочтений  $P^t = \|p_{ij}^t\|$  ( $t = 1, \dots, m$ ) называется квадратная матрица порядка  $n$  ( $n$  – число альтернатив,  $i, j = 1, \dots, n$ ) с элементами

$$p_{ij}^t = \begin{cases} \frac{x_i^t}{x_i^t + x_j^t}, & \text{если значения оценок по шкале } X_t \text{ максимизируются,} \\ \frac{x_j^t}{x_i^t + x_j^t}, & \text{если значения оценок по шкале } X_t \text{ минимизируются,} \end{cases} \quad (1)$$

Элемент матрицы  $p_{ij}^t$  показывает, что по критерию  $K_t$  альтернатива  $a_i$  более предпочтительна, чем  $a_j$  в  $p_{ij}^t$  раз.

Для элементов матрицы предпочтений  $p^t$  выполняется:

$$1) \frac{p_{ij}^t}{p_{ji}^t} = \begin{cases} \frac{x_i^t}{x_j^t}, & \text{если значения оценок по шкале } X_t \text{ максимизируются,} \\ \frac{x_j^t}{x_i^t}, & \text{если значения оценок по шкале } X_t \text{ минимизируются,} \end{cases}$$

– сохраняется информация о том, во сколько раз альтернатива  $a_i$  предпочтительнее альтернативы  $a_j$ ;

$$2) p_{ij}^t + p_{ji}^t = 1 \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Эти свойства фактически позволяют заменить процедуру приведения шкал критериев к однородным.

Таким образом, на входе алгоритма, позволяющего построить агрегированное предпочтение, должны быть заданы матрицы предпочтений по критериям  $P^1, P^2, \dots, P^m$ .

При нахождения агрегированного отношения предпочтения в зависимости от желаний ЛПР можно использовать алгоритмы, основывающиеся на суммировании матриц исходных предпочтений. Можно также построить агрегированное отношение, минимально удаленное от исходных. Опишем подробно алгоритмы, рассматриваемые в данной статье.

### 3. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ АГРЕГИРОВАННОГО РАНЖИРОВАНИЯ АЛЬТЕРНАТИВ ДЛЯ ДВУХ КРИТЕРИЕВ

Рассмотрим случай, когда оценка альтернатив проводится по двум критериям качества, имеющим равную важность.

Просуммировав матрицы предпочтений по критериям, получим матрицу суммарных предпочтений  $P_{\Sigma} = \|p_{ij}^{\Sigma}\|$ .

**Утверждение 1.** Для альтернатив, оцениваемых по двум критериям качества, оценки по которым являются положительными и максимизируются, предпочтительнее альтернатива с большим произведением компонент векторной оценки.

**Доказательство утверждения 1.** Пусть оценки по шкалам критериев  $K_1$  и  $K_2$  максимизируются. Альтернатива  $a_1$  имеет векторную оценку по критериям  $\langle x_1, y_1 \rangle$ , а альтернатива  $a_2 - \langle x_2, y_2 \rangle$  ( $x_1, y_1, x_2, y_2 > 0$ ). Тогда матрицы предпочтений по критериям  $K_1$  и  $K_2$  имеют вид:

$$P^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{x_1}{x_1 + x_2} \\ \frac{x_2}{x_1 + x_2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{y_1}{y_1 + y_2} \\ \frac{y_2}{y_1 + y_2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу суммарных предпочтений:

$$P_{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{y_1}{y_1 + y_2} \\ \frac{x_2}{x_1 + x_2} + \frac{y_2}{y_1 + y_2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Сравним числа:

$$\frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{y_1}{y_1 + y_2} \gtrless \frac{x_2}{x_1 + x_2} + \frac{y_2}{y_1 + y_2} \Leftrightarrow$$

(так как все оценки положительные)

$$x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2 \gtrless x_2 y_1 + x_2 y_2 + x_1 y_2 + x_1 y_1 \Leftrightarrow x_1 y_1 \gtrless x_2 y_2.$$

Получаем, для двух критериев лучшей будет векторная оценка с большим значением произведения ее компонент.



**Утверждение 2.** Для альтернатив, оцениваемых по двум критериям качества, оценки по которым являются положительными и минимизируются, предпочтительнее альтернатива с меньшим произведением компонент векторной оценки.

**Доказательство утверждения 2.** Пусть оценки по шкалам критериев  $K_1$  и  $K_2$  минимизируются. Альтернатива  $a_1$  имеет векторную оценку по критериям  $\langle x_1, y_1 \rangle$ , а альтернатива  $a_2 - \langle x_2, y_2 \rangle$  ( $x_1, y_1, x_2, y_2 > 0$ ). Тогда матрицы предпочтений по критериям  $K_1$  и  $K_2$  имеют вид:

$$P^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{x_2}{x_1 + x_2} \\ \frac{x_1}{x_1 + x_2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{y_2}{y_1 + y_2} \\ \frac{y_1}{y_1 + y_2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу суммарных предпочтений:

$$P_{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_2}{x_1 + x_2} + \frac{y_2}{y_1 + y_2} \\ \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{y_1}{y_1 + y_2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Сравним числа:

$$\begin{aligned} \frac{x_2}{x_1 + x_2} + \frac{y_2}{y_1 + y_2} \geq \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{y_1}{y_1 + y_2} &\Leftrightarrow \\ x_2 y_1 + x_2 y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_2 \geq x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_1 &\Leftrightarrow x_2 y_2 \geq x_1 y_1. \end{aligned}$$

Получаем, для двух критериев, для которых оценки по шкалам минимизируются, лучшей будет векторная оценка с меньшим значением произведения ее компонент.

**Утверждение 3.** Пусть для альтернатив, оцениваемых по двум критериям качества с положительными шкалами, оценки по критерию  $K_1$  максимизируются, а по  $K_2$ , минимизируются. Тогда предпочтительнее альтернатива с большим отношением оценки по критерию  $K_1$  к оценке по критерию  $K_2$ .

**Доказательство утверждения 3.** Пусть альтернатива  $a_1$  имеет вектор оценок по критериям  $\langle x_1, y_1 \rangle$ , а альтернатива  $a_2 - \langle x_2, y_2 \rangle$  ( $x_1, y_1, x_2, y_2 > 0$ ). Найдем матрицы предпочтений по критериям  $K_1$  и  $K_2$ .

По шкале критерия  $K_1$  оценки максимизируются, следовательно,

$$P^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{x_1}{x_1 + x_2} \\ \frac{x_2}{x_1 + x_2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

По шкале критерия  $K_2$  оценки минимизируются, следовательно,

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{y_2}{y_1 + y_2} \\ \frac{y_1}{y_1 + y_2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Матрица суммарных предпочтений имеет вид:

$$P_{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{y_2}{y_1 + y_2} \\ \frac{x_2}{x_1 + x_2} + \frac{y_1}{y_1 + y_2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Сравним ее элементы:

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{y_2}{y_1 + y_2} &\stackrel{\geq}{\leq} \frac{x_2}{x_1 + x_2} + \frac{y_1}{y_1 + y_2} \Leftrightarrow \\ x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_2 &\stackrel{\geq}{\leq} x_2 y_1 + x_2 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_1 \Leftrightarrow \\ x_1 y_2 &\stackrel{\geq}{\leq} x_2 y_1 \Leftrightarrow \frac{x_1}{y_1} \stackrel{\geq}{\leq} \frac{x_2}{y_2}. \end{aligned}$$

Получаем: предпочтительнее альтернатива, у векторной оценки которой большее значение отношения первой компоненты (оценки максимизируются) ко второй (оценки максимизируются). Что и требовалось доказать.

**Теорема 1.** При сравнении векторных оценок альтернатив по двум критериям качества с положительными шкалами получим ранжирование альтернатив, т.е. все альтернативы попарно сравнимы.

Доказательство теоремы 1 следует из утверждений 1–3, в которых векторным оценкам ставится в соответствие число, что позволяет сравнить все альтернативы по предпочтительности. Заметим, что в случае равенства чисел альтернативы имеют равную предпочтительность.

**Пример 1.** Пусть множество альтернатив  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  оценивается по двум критериям качества  $K_1, K_2$ . Численные оценки альтернатив приведены в таблице.

	$K_1$	$K_2$	Произведение оценок	Отношение оценок
$a_1$	3	6	18	$\frac{1}{2}$
$a_2$	4	5	20	$\frac{4}{5}$
$a_3$	2	7	14	$\frac{2}{7}$
$a_4$	7	3	21	$\frac{7}{3}$

Если значения оценок по шкалам критериев максимизируются, то по утверждению 1 наилучшая альтернатива  $a_2$ .

Если значения оценок по шкалам критериев минимизируются, то по утверждению 2 наилучшая альтернатива  $a_3$ .

Если значения оценок по шкале критерия  $K_1$  максимизируются, а по шкале критерия  $K_2$  минимизируются, то по утверждению 3 наилучшая альтернатива  $a_4$ .



#### 4. АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ АГРЕГИРОВАННОГО РАНЖИРОВАНИЯ АЛЬТЕРНАТИВ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧИСЛА КРИТЕРИЕВ

Опишем алгоритмы построения агрегированного отношения предпочтения для произвольного числа альтернатив, основывающиеся на суммировании матриц исходных предпочтений.

*Алгоритм ранжирования альтернатив на основе орграфа суммарного предпочтения.*

1. Формирование матриц предпочтения  $P^1, P^2, \dots, P^m$  по критериям по формулам (1).
2. Построение матрицы суммарных предпочтений.
3.  $P_{\Sigma} = \sum_{t=1}^m P^t$ .
4. Ранжирование альтернатив.

Предложенный алгоритм допускает введение весовых коэффициентов  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , характеризующих компетентность экспертов или важность критериев качества. В этом случае матрица суммарных предпочтений будет вычисляться по формуле:

$$P_{\Sigma} = \sum_{t=1}^m k_t P^t.$$

Ранжирование альтернатив по одному критерию качества осуществляет Excel таблица. Алгоритмы ранжирования в случае задания двух критериев описаны в предыдущем параграфе. Для ранжирования альтернатив при большем числе критериев воспользуемся алгоритмами, основанными на индексировании альтернатив [5].

Опишем алгоритмы нахождения индексов альтернатив. Будем рассматривать следующие процедуры.

Процедура разности весов: каждой альтернативе  $a_i \in A$  ставится в соответствие индекс, равный разности суммы элементов строки матрицы суммарных предпочтений  $P_{\Sigma} = \|p_{ij}^{\Sigma}\|$  и элементов столбца этой матрицы.

$$I_i^{DW} = \sum_{j=1}^m (p_{ij}^{\Sigma} - p_{ji}^{\Sigma}) \quad (2)$$

Процедура отношения весов: каждой альтернативе  $a_i \in A$  ставится в соответствие индекс, равный отношению суммы элементов строки матрицы суммарных предпочтений  $P_{\Sigma} = \|p_{ij}^{\Sigma}\|$  и элементов столбца этой матрицы.

$$I_i^{RW} = \frac{\sum_{j=1}^m p_{ij}^{\Sigma}}{\sum_{j=1}^m p_{ji}^{\Sigma}} \quad (3)$$

Если знаменатель дроби равен нулю, то  $I_i^{RW} = \infty$ . При программной реализации знак бесконечности заменяется числом, заведомо большим индексов всех альтернатив,

индекс которых не равен бесконечности. В случае, когда числитель и знаменатель равен нулю можно рекомендовать поставить альтернативу  $a_i$  в ранжировании на последнее место, т.к. информация о сравнении ее с другими альтернативами отсутствует. Мы будем решать задачи с полной информацией об альтернативах.

Преобразуем формулу (2) с учетом особенностей матриц предпочтений по критериям и матрицы суммарных предпочтений в рассматриваемом случае. По определению для матрицы предпочтений по критерию  $K_t$  выполняется:  $p_{ij}^t + p_{ji}^t = 1$  ( $i, j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, m$ ). Следовательно, для элементов матрицы суммарных предпочтений справедливы равенства  $p_{ij}^\Sigma + p_{ji}^\Sigma = m, i, j = 1, \dots, n$ . Тогда:

$$I_i^{PW} = \sum_{j=1}^n (p_{ij}^\Sigma - p_{ji}^\Sigma) = \sum_{j=1}^n (p_{ij}^\Sigma - (m - p_{ij}^\Sigma)) = \sum_{j=1}^n (2p_{ij}^\Sigma - m) = 2 \sum_{j=1}^n p_{ij}^\Sigma - nm.$$

Таким образом, при ранжировании индекс альтернативы  $a_i \in A$  можно определять суммой элементов  $i$ -ой строки матрицы суммарных предпочтений.

Проведем аналогичные преобразования для формулы (3).

$$I_i^{RW} = \frac{\sum_{j=1}^n p_{ij}^\Sigma}{\sum_{j=1}^n p_{ji}^\Sigma} = \frac{\sum_{j=1}^n (m - p_{ji}^\Sigma)}{\sum_{j=1}^n p_{ji}^\Sigma} = \frac{nm - \sum_{j=1}^n p_{ji}^\Sigma}{\sum_{j=1}^n p_{ji}^\Sigma} = \frac{nm}{\sum_{j=1}^n p_{ji}^\Sigma} - 1.$$

Таким образом, при ранжировании индекс альтернативы  $a_i \in A$  можно определять величиной, обратной к сумме элементов  $i$ -го столбца матрицы суммарных предпочтений.

Вместо элементов столбца можно подставить элементы строки:

$$\sum_{i=1}^n p_{ji}^\Sigma = \sum_{i=1}^n (m - p_{ij}^\Sigma) = nm - \sum_{i=1}^n p_{ij}^\Sigma.$$

Заметим, что полученные формулы справедливы только при выполнении соотношений  $p_{ij}^\Sigma + p_{ji}^\Sigma = m; i, j = 1, \dots, n$ . Но предложенную методику формирования матриц предпочтений можно распространить на весьма частую ситуацию, когда не для каждой альтернативы известны все оценки по критериям. В этом случае при сравнении альтернатив, информация о которых отсутствует по некоторому  $t$ -ому критерию ( $t = 1, \dots, m$ ), целесообразно положить  $p_{ij}^t = p_{ji}^t = 0$ , а не  $p_{ij}^t = p_{ji}^t = \frac{1}{2}$ , уменьшив их значимость в матрице суммарных предпочтений.

**Пример 2.** Пусть множество альтернатив  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  оценивается по трем критериям качества  $K_1, K_2, K_3$ . Численные оценки альтернатив приведены в таблице (значения по шкалам оценкам максимизируются).

	$K_1$	$K_2$	$K_3$
$a_1$	2	3	4
$a_2$	3	4	2
$a_3$	2	4	4
$a_4$	3	3	2



Матрицы предпочтений альтернатив для каждого критерия соответственно имеют вид:

$$P^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & 1 & \frac{3}{5} & 1 \\ \frac{5}{5} & \frac{2}{2} & \frac{5}{5} & \frac{2}{2} \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ \frac{2}{2} & \frac{5}{5} & \frac{2}{2} & \frac{5}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{5} & \frac{2}{2} & \frac{5}{5} & \frac{2}{2} \end{pmatrix}; P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{7} & 1 & 1 & \frac{4}{7} \\ \frac{7}{7} & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & \frac{7}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{4}{7} \\ \frac{7}{7} & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & \frac{7}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{2} & \frac{7}{7} & \frac{7}{7} & \frac{2}{2} \end{pmatrix}; P^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{3}{3} & \frac{2}{2} & \frac{3}{3} & \frac{2}{2} \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ \frac{2}{2} & \frac{3}{3} & \frac{2}{2} & \frac{3}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{3} & \frac{2}{2} & \frac{3}{3} & \frac{2}{2} \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу суммарных предпочтений  $P$ :

$$P_{\Sigma} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{157}{105} & \frac{10}{7} & \frac{47}{30} \\ \frac{2}{158} & \frac{3}{105} & \frac{43}{43} & \frac{11}{11} \\ \frac{105}{11} & \frac{2}{47} & \frac{30}{3} & \frac{7}{172} \\ \frac{7}{43} & \frac{30}{10} & \frac{2}{143} & \frac{105}{3} \\ \frac{43}{30} & \frac{10}{7} & \frac{143}{105} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Применив процедуру разности весов (2), получим вектор индексов

$$I^{DW} = \langle -\frac{2}{105}; \frac{2}{105}; \frac{58}{105}; -\frac{58}{105} \rangle.$$

Получим ранжирование альтернатив  $a_3 - a_2 - a_1 - a_4$ .

Убедимся, что ранжирование не изменится при суммировании элементов строк. Поскольку диагональные элементы равны будем суммировать без них. Получим вектор

$$\langle \frac{943}{210}; \frac{947}{210}; \frac{1003}{210}; \frac{887}{210} \rangle.$$

Применив процедуру отношения весов (1) получим вектор индексов (приблизленно)

$$I^{RW} = \langle 0.997; 1; 1.1; 0.912 \rangle.$$

Ранжирования альтернатив  $a_4 - a_1 - a_2 - a_3$  не изменилось.

Если полученные разными методами агрегированные ранжирования различны, то выбрать ранжирование наиболее согласованное с ранжированиями по критериям можно следующим способом.

Зададим отношение предпочтения, соответствующее полученному ранжированию бинарной матрицей  $R = \|r_{ij}\|$  с элементами

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i \text{ не менее предпочтительна } a_j \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$



Проранжируем альтернативы по критериям и зададим соответствующие отношения предпочтения бинарными матрицами  $R^1, R^2, \dots, R^m$ .

Найдем суммарное расстояние от матрицы  $R$  до  $R^1, R^2, \dots, R^m$  по формуле

$$D(R) = \sum_{t=1}^m d(R, R^t) = \sum_{t=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |r_{ij} - r_{ij}^t| \quad (4)$$

Расстояние между матрицами зададим, как расстояние Хэмминга.

**Пример 3.** На основе оценок по критериям из примера 2 построим бинарные матрицы  $R^1, R^2, R^3$ .

	$K_1$	$K_2$	$K_3$
$a_1$	2	3	4
$a_2$	3	4	2
$a_3$	2	4	4
$a_4$	3	3	2

$$R^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; R^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для ранжирования  $a_3 - a_2 - a_1 - a_4$  бинарная матрица

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Суммарное расстояние найдем по формуле (4)

$$D(R) = d(R, R^1) + d(R, R^2) + d(R, R^3) = 8 + 2 + 4 = 14.$$

Если мы получим различные агрегированные ранжирования, решая задачу разным методом, то их можно сравнить по суммарному расстоянию до предпочтений по критериям. Наиболее согласованным с ранжированиями по критериям является агрегированное ранжирование с наименьшим суммарным расстоянием.

## 5. ОРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ С БОЛЬШИМИ ДАННЫМИ В ПРОГРАММНОЙ СИСТЕМЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА

При решении задач с большим объемом исходных данных у разработчика программной системы возникает проблема выбора наиболее удобного способа хранения информации и для ввода ЛПР, и для считывания программой. Необходимо учесть, что в задачах принятия решений информация может постоянно обновляться в связи с поступлением новых вариантов альтернатив.



В разработанной программной системе выбран наиболее простой и удобный для ЛПР способ ввода данных через Excel таблицы. Программа загружает Excel таблицу в систему, считывает и создаёт свои таблицы, удобные для работы алгоритмов многокритериального выбора. База данных программной системы содержит следующую информацию.

1. Таблица с наименованиями альтернатив и их числовые характеристики.
2. Информация по критериям: тип шкалы, максимизируются или минимизируются оценки по шкале, весовые коэффициенты важности критериев.

Программная система организована так, что исходные данные хранятся на удаленном сервере, т. о. зарегистрированный пользователь всегда имеет доступ для их корректировки, причем с различных устройств.

Рассмотрим работу программы на примере ранжирования дронов с целью приобретения для наблюдения за местностью, съемки местности и передачи информации оператору. В настоящее время разработано сотни различных моделей дронов даже в рамках данного предназначения. ЛПР обращается на специальный сайт по продажам дронов, например в интернет-магазин, где ему предоставляется огромный список моделей. Сайт предлагает ЛПР помощь в выборе наиболее предпочтительных вариантов дронов. Разработчики сайта хранят список моделей дронов с их характеристиками по критериям качества в Excel таблице. В таблице также присутствует информация о том максимизируются или минимизируются оценки по критериям.

Будем оценивать модели дронов по следующим критериям:  $K_1$  — стоимость (в рублях, min);  $K_2$  — вес (в кг, min);  $K_3$  — максимальная длительность полета (в часах или мин., max);  $K_4$  — максимальная высота полета (в метрах, max);  $K_5$  — обслуживание (в баллах, max);  $K_6$  — защита от столкновений и погодных явлений (в баллах, max).

### ***Основные этапы работы программной системы ранжирования альтернатив в диалоговом режиме с ЛПР***

1. ЛПР (лицо, принимающее решения) вводит интервалы-ограничения для каждого критерия (например, ограничения по стоимости). Таблица может сама упорядочивать модели по одному критерию, и мы легко отсекаем дроны вне заданного интервала.
2. ЛПР выбирает критерии из заданного перечня, по которым хочет ранжировать дроны. Дополнительно, по желанию ЛПР, можно ввести весовые коэффициенты важности критериев.
3. Программа ранжирует дроны и выдает на экран 5 (или более) наилучших аппаратов.

ЛПР имеет возможность изменять наборы критериев и повторно осуществлять выбор наиболее предпочтительных моделей дронов.

ЛПР выбирает одну или несколько понравившихся ему моделей и оставляет на сайте заказа.



## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложены и обоснованы алгоритмы многокритериального выбора, не требующие приведения шкал критериев к однородным. Все алгоритмы имеют полиномиальную вычислительную сложность, что позволяет работать с большими массивами исходной информации. Разработана программная система, предназначенная для решения задач многокритериального принятия решений, а также для проведения практических и лабораторных работ в вузах по дисциплине «Математическая теория принятия решений».

### *Литература*

1. *Петровский А.Б.* Теория принятия решений. М.: Академия. 2009.
2. *Smerchinskaya S.O., Yashina N.P.* On an algorithm for pairwise comparison of alternatives in multi-criteria problems // International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing. 2018. Vol. 9, Issue 1. DOI: 10.1142/S179396231850006X.
3. *Смерчинская С.О., Яшина Н.П.* Агрегирование предпочтений в многокритериальных задачах // Вестник Московского авиационного института. 2013. № 2, том 20. С. 219–225.
4. *Shikhman V., Müller D.* Mathematical Foundations of Big Data Analytics. 2021. DOI: 10.1007/978-3-662-62521-7. ISBN: 978–3-662–62520–0
5. *Нефедов В.Н., Смерчинская С.О., Яшина Н.П.* Построение агрегированного отношения, минимально удаленного от экспертных предпочтений. Прикладная дискретная математика. 2018. № 42. С. 120–132. DOI: 10.17223/20710410/42/9



## Big Data Analysis in Multi-Criteria Choice Problems

**Andrey A. Ivanov\***

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4433-6449>

e-mail: [ivanov17andrey@gmail.com](mailto:ivanov17andrey@gmail.com)

**Nina P. Yashina\*\***

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8401-0315>

e-mail: [nina\\_p\\_yashina@mail.ru](mailto:nina_p_yashina@mail.ru)

The problem of multi-criteria choice with non-uniform scales of criteria is considered. A model of a multicriteria choice problem is described, the main elements of which are sets of alternatives and quality criteria, as well as algorithms that allow ranking alternatives without prior reduction of the criteria scales to homogeneous ones. Algorithms for constructing aggregated ranking of alternatives are based on the construction of preference matrices by criteria containing information on the degree of superiority of one alternative over another. Propositions are proved that allow ranking alternatives with assessments according to two quality criteria. Algorithms for indexing alternatives are proposed that allow ranking alternatives for an arbitrary number of criteria. The best aggregated ranking is determined by the total distance to the rankings of alternatives by criteria. All algorithms have polynomial computational complexity, which makes it possible to work with large arrays of initial information. A software system for ranking alternatives in problems with big data has been developed. The initial information is stored in Excel tables, which makes it easy to take into account the limitations on the criteria scales. The operation of the software system is demonstrated by the example of choosing the best version of a drone for purchase in order to observe the terrain, shoot it and transmit information to the operator.

**Keywords:** decision making, quality criterion, big data analysis, preference matrix, ranking of alternatives.

### For citation:

Ivanov A.A., Yashina N.P. Big Data Analysis in Multi-Criteria Choice Problems. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2022. Vol. 12, no. 2, pp. 5–19.

DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2022120201> (In Russ., abstr. in Engl.).

\***Andrey A. Ivanov**, Graduate Student, Moscow Aviation Institute (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4433-6449>, e-mail: [ivanov17andrey@gmail.com](mailto:ivanov17andrey@gmail.com)

\*\***Nina P. Yashina**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Cybernetics, Moscow Aviation Institute (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8401-0315>, e-mail: [nina\\_p\\_yashina@mail.ru](mailto:nina_p_yashina@mail.ru)



### **References**

1. Petrovskiy A.B. *Teoriya Prinyatiya Resheniy*. M.: Akademiya. 2009
2. Smerchinskaya S.O., Yashina N.P. On an algorithm for pairwise comparison of alternatives in multi-criteria problems // *International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing*. 2018. Vol. 9, Issue 1. DOI: 10.1142/S179396231850006X.
3. Smerchinskaya S.O., Yashina N.P. Agregirovaniye predpochteniy v mnogokriteriallnikh zadachakh // *Vestnik Moskovskogo aviacionnogo instituta*. 2013. № 2, tom 20. С. 219–225.
4. Shikhman V., Müller D. *Mathematical Foundations of Big Data Analytics*. 2021. DOI: 10.1007/978-3-662-62521-7. ISBN: 978–3-662–62520–0
5. Nefedov V.N., Smerchinskaya S.O., Yashina N.P. Postroeniye agregirovannogo otnosheniya, minimalno udalennogo ot ekspertikh predpochteniy. *Prikladnaya diskretnaya matematika*. 2018. № 42. С. 120–132. DOI: 10.17223/20710410/42/9

Получена 25.04.2022

Received 25.04.2022

Принята в печать 03.06.2022

Accepted 03.06.2022

## Разработка метода извлечения ключевых слов на основе вероятностной тематической модели

**Романадзе Е.Л.\***

Московский авиационный институт (МАИ)  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0351-7235>  
e-mail: [katia\\_rom.97@mail.ru](mailto:katia_rom.97@mail.ru)

**Судаков В.А.\*\***

Московский авиационный институт (МАИ), г. Москва, Российская Федерация  
ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1658-1941>  
e-mail: [sudakov@ws-dss.com](mailto:sudakov@ws-dss.com)

**Кислинский В.Г.\*\*\***

Московский физико-технический институт (МФТИ)  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2000-583X>

В работе рассмотрена задача тематического моделирования. Для анализа коллекции документов, описывающих товары онлайн-магазина, разработан новый метод извлечения ключевых слов на основе тематического моделирования. Проведен сравнительный анализ базового метода извлечения ключевых слов и предложенного метода. Приведены наглядные результаты, описывающие

### Для цитаты:

*Романадзе Е.Л., Судаков В.А., Кислинский В.Г.* Разработка метода извлечения ключевых слов на основе вероятностной тематической модели // Моделирование и анализ данных. 2022. Том 12. № 2. С. 20–33. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2022120202>

\**Романадзе Екатерина Левановна*, студент магистратуры, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ (НИУ)), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0351-7235>, e-mail: [katia\\_rom.97@mail.ru](mailto:katia_rom.97@mail.ru)

\*\**Судаков Владимир Анатольевич*, доктор технических наук, профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ (НИУ)), ведущий научный сотрудник, Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша Российской академии наук» (ИПМ им. М.В.Келдыша РАН), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1658-1941>, e-mail: [sudakov@ws-dss.com](mailto:sudakov@ws-dss.com)

\*\*\**Кислинский Вадим Геннадиевич*, научный сотрудник, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (МФТИ (НИУ)), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2000-583X>



преимущества данного подхода. Полученное решение может быть использовано для упрощения навигации по сайту и поиска релевантных товаров.

**Ключевые слова:** извлечение ключевых фраз, тематическое моделирование, NLP, LDA, машинное обучение

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Каждый день создается огромное количество текстов, и люди сталкиваются с большим объемом информации, которую нужно анализировать и потреблять. С учетом увеличения окружающих нас данных, этот процесс становится все более сложным, однако не менее необходимым. Актуальным инструментарием, облегчающим решение данной проблемы, является автоматическое извлечение ключевых слов из текста. Извлечение ключевых слов – это определение слов или фраз, которые наилучшим образом выражают основные концепции текстов. Таким образом, опираясь на термины, которые характеризуют документ, человек сможет принять решение о детальном прочтении представленной информации. На практике извлечение ключевых слов решает и многие другие проблемы, такие как:

- упрощение поисковой системы – прокачка индексов/семантический поиск/расширение поисковых запросов;
- реферирование текстов;
- классификация/кластеризация документов;
- выделение признаков (интерпретируемых топиков) для рекомендательных систем и поведенческого анализа;
- рекламные системы – контекстная реклама и выделение коммерческих интересов [1].

В представленной работе объектом исследования является набор текстов (документов), описывающих товары, представленные в онлайн каталоге интернет-магазина OZON. Предмет исследования – методы извлечения ключевых слов.

Цель работы – извлечение ключевых слов из описаний товаров, что приведет к упрощению их поиска. Для этого были проработаны сопутствующие задачи:

1. Проанализированы полученные данные.
2. Разработан метод для извлечения ключевых слов из документов.
3. Проведен вычислительный эксперимент.
4. Оценена эффективность работы модели.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Перед нами стоит задача извлечения ключевых слов, для ее решения рассмотрим исходные данные. Предоставляется коллекция документов, связанная общей тематикой (новости, рассказы, статьи и т.д.) –  $D$ . Каждый документ  $d \in D$  состоит из набора слов  $w_1, \dots, w_{n_d}$ , где  $n_d$  – это количество слов в документе  $d$ . Цель – выделить ключевые слова/фразы  $K_{l_d}$  ( $l_d$  – это количество ключевых слов в документе  $d$ ), со-



стоящие из  $W_d$ , которые будут описывать смысловую часть заданного документа  $d$ . При этом искомые ключевые слова/фразы  $K_{I_d}$  могут быть заданы изначально или вовсе неизвестны.

Схема эксперимента для решения задачи представлена на рисунке 1. В основу метода входит модель тематического моделирования – LDA. Для получения наиболее быстрых и качественных результатов данные обрабатываются стандартными методами, а также посредством статистической меры IDF. Непосредственное извлечение ключевых слов происходит на последнем этапе.



Рис. 1. Схема эксперимента

Далее рассмотрим каждый пункт по отдельности, предварительно ознакомившись с теоретической основой и базовыми понятиями, применяемыми в работе с текстом, а также непосредственно в тематическом моделировании.

### 3. ПРЕДОБРАБОТКА

Для решения задач NLP данные первым делом подвергаются предварительной обработке. Ее цель заключается в очищении текста от незначимых и неинформативных данных, что упрощает и облегчает работу. Правильная предварительная обработка в первую очередь сказывается на качестве оценки результатов. Далее опишем базовые способы, применяемые к текстам в качестве предварительной обработки.

В первую очередь из текстов убирается вся пунктуация, так как анализу подлежат непосредственно слова. Далее слова приводятся к нижнему регистру поскольку одно и то же слово, написанное в разных регистрах, моделью будет восприниматься как два разных слова. Получившиеся тексты подвергаются токенизации. Токенизация – это задача разделения текста на части, называемые токенами, таким образом каждый документ можно представить в виде списка слов или словосочетаний, из которых он состоит.

Далее данные подвергаются лемматизации или стеммингу. Лемматизация – это приведение слов к нормальному виду. Например, слово «красивое» будет преобразовано в «красивый», слово «убежал» в «убежать». Данные преобразования считаются наиболее точными, но как правило занимают больше времени. Стемминг – это процесс отбрасывания окончаний или других изменяемых частей слов. Например, слово «красивое» будет преобразовано в «красив», а слово «убежал» в «беж». Подобные преобразования занимают меньше времени, но могут приводить к спорным результатам, так как урезав большую часть слова может быть утерян его смысл и урезанное слово будет в дальнейшем трактоваться некорректно. Следует отметить, что стемминг в большей степени применяется к английским словам, так как лексически выдает более точные результаты, чем при применении к словам русского языка. В конечном счете после лемматизации/стемминга алгоритму проще воспринимать связь между словами и анализировать их, так как одно и то же слово, представленное



в разных падежах, регистрах или времени, должно восприниматься одинаково, так как имеет как правило идентичную смысловую нагрузку.

Следующим шагом осуществляется удаление стоп-слов. Под стоп-словами подразумеваются слова, которые часто встречаются во всех документах или в документах представленной тематики. Они считаются общими и теряют свою ценность за счет частоты, так как явно не являются ключевыми для документов и потому не несут смысловой нагрузки. Также в список стоп-слов могут быть включены слова, которые, наоборот, крайне редко встречаются. Если слово было встречено всего один раз во всей коллекции документов, то оно также имеет малую эффективность в анализе, поэтому подобные слова следует исключить.

Перечисленная обработка является фундаментальной для работы с текстами, но в отдельных случаях могут потребоваться дополнительные преобразования. К примеру, помимо отдельно стоящих слов можно выделять устойчивые фразы, словосочетания автоматическими методами или же рассматривать для анализа только определенные части речи, также с помощью регулярным выражений можно избавиться от лишних данных.

TF-IDF (сокращение от term frequency – inverse document frequency) – это статистическая мера для оценки важности слова в документе, который является частью коллекции.

Для ее расчета вычисляются меры TF (term frequency – частота слова), и IDF (inverse document frequency – обратная частота документа). При этом TF оценка слов меняется от документа к документу, а IDF оценка слова одинаковая для слов внутри каждого документа.

TF оценивает частоту некоторого слова внутри документа по следующей формуле:

$$tf(t, d) = \frac{n_t}{\sum_k n_k}, \quad (1)$$

где  $n_t$  – число вхождений слова  $t$  в документ, а в знаменателе – общее число слов в данном документе.

IDF оценивает обратную частоту документов, включающих в себя некоторое слово и выражается в представленной ниже формуле.

$$idf(t, D) = \ln \frac{|D|}{|\{d_i \in D | t \in d_i\}|} \quad (2)$$

где  $|D|$  – число документов в коллекции,  $|\{d_i \in D | t \in d_i\}|$  – число документов из коллекции  $D$ , в которых встречается  $t$ .

Таким образом для оценки слов с помощью TF-IDF перемножаются две рассмотренные меры, и по итогу вес некоторого слова пропорционален частоте употребления этого слова в документе и обратно пропорционален частоте употребления слова во всех документах коллекции.

$$tf-idf(t, d, D) = tf(t, d) \times idf(t, D) \quad (3)$$



Большой вес по TF-IDF получают слова с высокой частотой в пределах конкретного документа и с низкой частотой употреблений в других документах. Мера TF-IDF часто используется в задачах анализа текстов и информационного поиска, например, как один из критериев релевантности документа поисковому запросу, при расчёте меры близости документов при кластеризации.

#### 4. ТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Тематическое моделирование – одно из современных направлений обработки естественного языка. Тематическая модель коллекции текстовых документов определяет к каким темам относится каждый документ и какие слова образуют каждую тему. Алгоритм описывает темы дискретным распределением вероятностей слов, а документы – дискретным распределением вероятностей тем. Такой подход напоминает кластеризацию, однако, отличие в том, что при кластеризации документ целиком относится к одному кластеру, тогда как тематическая модель осуществляет мягкую кластеризацию, разделяя документ между несколькими кластерами.

Исходные данные – коллекция текстовых документов  $D$ , при этом каждый документ  $d$  из  $D$  представляется как последовательность термов  $W_d = (w_1, \dots, w_{n_d})$ , где  $n_d$  – количество термов документа  $d$ . Термами считаются слова, словосочетания, цифры или иные сущности, которые входят в документ, в зависимости от того какой предварительной обработке подверглись документы. Предполагается, что каждый документ описан одной или несколькими темами, а темы различаются частотой употребления отдельных термов. Таким образом коллекцию документов можно представить в виде последовательности троек . . . Так как термы и документы известны, на их основе предполагается выявить темы. В связи с этим требуется найти:

- 1) число тем;
- 2) слова, характерные для каждой темы, и их распределения;
- 3) принадлежность документов к темам.

Ниже представлены задачи, которые можно решить с помощью данной модели:

- ранжирование документов по заданной тематике;
- ранжирование документов по степени сходства с заданным документом;
- определение тематики различных сущностей (конференций, журналов и т.д.);
- определение тематики авторов.

Для решения задачи необходимо определить основные предположения вероятностных тематических моделей. Так, предполагается, что:

- порядок документов в коллекции не влияет на результат;
- порядок термов внутри документа также не влияет на результат – используется «мешок слов»;
- термы, которые часто встречаются во всех документах, не имеют смысловой нагрузки и поэтому удаляются из списка (стоп-слова);
- слова, написанные в разных формах, считаются одинаковыми и приводятся к одному виду;



- каждая тема  $t \in T$  описывается неизвестным распределением  $p(w|t)$  на множестве термов  $w \in W$ ;
- каждый документ  $d \in D$  описывается неизвестным распределением  $p(t|d)$  на множестве тем  $t \in T$ ;
- гипотеза условной независимости  $p(w|t, d) = p(w|t)$ . Она предполагает, что появление термов в документе  $d$  по теме  $t$  зависит непосредственно от темы и описывается общим распределением  $p(w|t)$  [5].

Распределение термов в документе  $p(w|d)$  описывается вероятностной смесью распределений термов в темах  $\phi_{wt} = p(w|t)$  с весами  $\theta_{td} = p(t|d)$ .

$$p(w|d) = \sum_{t \in T} p(w|t, d) p(t|d) = \sum_{t \in T} p(w|t) p(t|d) = \sum_{t \in T} \phi_{wt} \theta_{td} \quad (4)$$

Для поиска приближенных значений матриц  $\phi_{wt}$  и  $\theta_{td}$  максимизируется логарифм правдоподобия:

$$L(\Phi, \Theta) = \sum_{d \in D} \sum_{w \in d} n_{dw} \ln \sum_{t \in T} \phi_{wt} \theta_{td} \rightarrow \max_{\Phi, \Theta} \quad (5)$$

Для максимизации (5) вычисляется EM-алгоритм, в котором итерационно чередуются E и M шаги. Рациональный алгоритм представлен на рисунке 2, где  $\phi_{wt}$  – вероятности термов  $w$  в каждой теме  $t$ ;  $\theta_{td}$  – вероятности тем  $t$  в каждом документе  $d$ ;  $n_{wt}$  – число троек, в которых терм  $w$  связан с темой  $t$ ;  $n_{td}$  – число троек, в которых терм документа  $d$  связан с темой  $t$ ;  $n_t$  – число троек, связанных с темой  $t$ ;  $n_{tdw}$  – число троек, в которых терм  $w$  документа  $d$  связан с темой  $t$ ;  $n_d$  – длина документа  $d$  в термах;  $n_{dw}$  – число вхождений терма  $w$  в документ  $d$  [2].

	<b>Вход:</b> коллекция $D$ , число тем $ T $ , начальные приближения матриц $\phi_{wt}$ и $\theta_{td}$ ;
	<b>Выход:</b> параметры $\phi_{wt}$ и $\theta_{td}$
1	<b>Повторять</b>
2	Обнулить $n_{wt}, n_{td}, n_t$ для всех $d \in D, w \in W, t \in T$ ;
3	Для всех $d \in D, w \in W$
4	$n_{tdw} \leftarrow \frac{n_{dw} \phi_{wt} \theta_{td}}{\sum_t \phi_{wt} \theta_{td}} \text{ для всех } t \in T$
5	Увеличить $n_{wt}, n_{td}, n_t$ на $n_{tdw}$ для всех $t \in T$ ;
6	$\phi_{wt} \leftarrow \frac{n_{wt}}{n_t} \text{ для всех } w \in W, t \in T;$
7	$\theta_{td} \leftarrow \frac{n_{td}}{n_d} \text{ для всех } d \in D, t \in T;$
8	<b>Пока</b> $\phi_{wt}$ и $\theta_{td}$ не сойдутся;

Рис. 2. Рациональный EM-алгоритма для тематической модели



Данный алгоритм называют EM-алгоритмом, где на E-шаге (expectation) происходит оценка условного распределения латентных тем  $n_{idw}$  по формуле Байеса для всех терминов в документах, а на M-шаге (maximization) по этим вероятностям вычисляются частотные оценки матриц  $\phi_{wt}$  и  $\theta_{id}$ .

## 5. АДДИТИВНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И LDA

Для решения проблем неустойчивости и неединственности используются регуляризаторы. На искомое решение накладываются дополнительные ограничения. Аддитивная регуляризация или подход ARTM основан на идее многокритериальной регуляризации, при котором вводятся еще  $n$  критериев  $R_i(\Phi, \Theta)$   $i = 1, 2, \dots, n$ . Взвешенная сумма всех таких критериев:

$$R(\Phi, \Theta) = \sum_{i=1}^n \tau_i R_i(\Phi, \Theta), \quad (6)$$

где  $\tau_i$  – неотрицательный коэффициент регуляризации, максимизируется совместно с основным критерием правдоподобия:

$$L(\Phi, \Theta) + R(\Phi, \Theta) \rightarrow \max_{\Phi, \Theta}. \quad (7)$$

Задача решается также EM-алгоритмом, модифицируя M шаг следующим образом:

$$\phi_{wt} = \operatorname{norm}_{w \in W} \left( n_{wt} + \phi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \phi_{wt}} \right), \quad (8)$$

$$\theta_{id} = \operatorname{norm}_{t \in T} \left( n_{id} + \theta_{id} \frac{\partial R}{\partial \theta_{id}} \right). \quad (9)$$

LDA (latent Dirichlet allocation – латентное размещение Дирихле) является наиболее цитируемой моделью тематического моделирования. Основная идея заключается в предположении, что матрицы  $\Theta$  и  $\Phi$  являются случайными векторами и порождаются распределением Дирихле с гиперпараметрами  $\alpha \in \mathbb{R}^T$  и  $\beta \in \mathbb{R}^W$  соответственно:

$$\operatorname{Dir}(\theta_d; \alpha) = \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\prod_t \Gamma(\alpha_t)} \prod_t \theta_{id}^{\alpha_t - 1}, \quad \alpha_t > 0, \quad \alpha_0 = \sum_t \alpha_t, \quad \theta_{id} > 0, \quad \sum_t \theta_{id} = 1; \quad (10)$$

$$\operatorname{Dir}(\phi_t; \beta) = \frac{\Gamma(\beta_0)}{\prod_w \Gamma(\beta_w)} \prod_w \phi_{wt}^{\beta_w - 1}, \quad \beta_w > 0, \quad \beta_0 = \sum_w \beta_w, \quad \phi_{wt} > 0, \quad \sum_w \phi_{wt} = 1; \quad (11)$$

где  $\Gamma(z)$  – гамма-функция,  $\beta_w$  и  $\alpha_t$  столбцы матриц  $\beta$  и  $\alpha$ , а  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  – коэффициенты регуляризации. Параметры распределения Дирихле связаны с математическим ожиданием порождения случайных векторов:  $E\theta_{id} = \frac{\alpha_t}{\alpha_0}$ ,  $E\phi_{id} = \frac{\beta_t}{\beta_0}$  [4].

В терминах ARTM модель LDA выражается через сглаживающие регуляризаторы следующим образом:

$$R(\Phi, \Theta) = \beta_0 \sum_{t, w} \beta_w \ln \phi_{wt} + \alpha_0 \sum_{d, t} \alpha_t \ln \theta_{td} . \quad (12)$$

Подставив данный критерий формулу М-шага, получим новое его представление:

$$\phi_{wt} = \text{norm}_{w \in W} (n_{wt} + \beta_0 \beta_w) , \quad (13)$$

$$\theta_{td} = \text{norm}_{t \in T} (n_{td} + \alpha_0 \alpha_w) . \quad (14)$$

## 6. РЕАЛИЗАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Цель работы заключается в упрощении навигации по сайту путем извлечения ключевых слов из описаний товаров. В качестве данных имеется набор annotations из 400 тысяч описаний, характеризующих товары онлайн магазина OZON. Так как у анализируемых данных отсутствуют искомые, заранее известные ключевые слова, то точность эксперимента будет оцениваться как эмпирически, так и за счет заранее отобранных данных, для которых ключевые слова уже прописаны. Таким образом мы имеем три набора данных: annotations – обучающая выборка и 500N-KPCrowd-v1.1, SemEval2017 – тестовые выборки.

Набор данных annotations состоит в общей сумме из 29,5 млн слов, из них 260 тысяч уникальных. Описания представлены на русском языке. На рисунке 3 продемонстрирована частота встречаемых слов в документах. Как видно большая часть встречается только один раз.

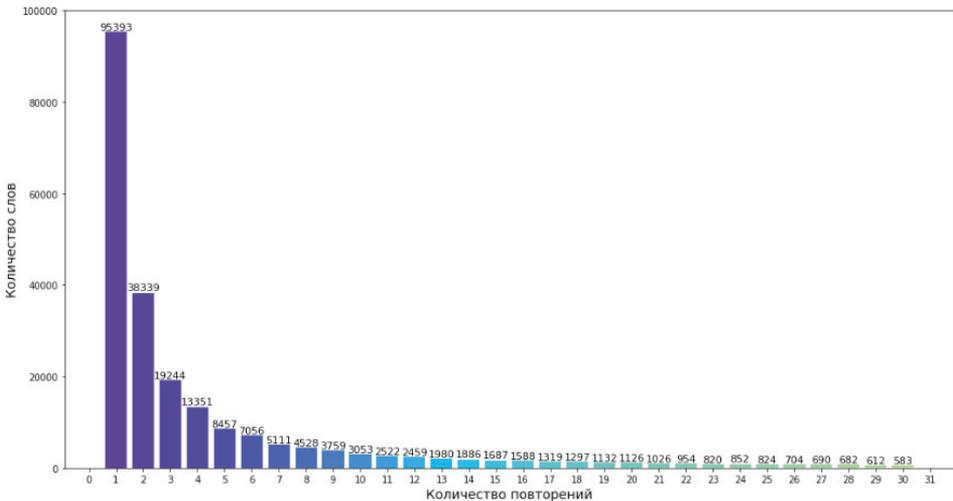


Рис. 3. Частота встречаемых слов в документах

Рисунок 4 показывает количества слов в документах. В среднем описание товара состоит из 20–25 слов.

Набор данных 500N-KPCrowd-v1.1 представляет собой сводку новостей вместе с заголовками. Датасет описан на английском языке. Для каждой новости есть определенный набор заданных ключевых слов. Всего представлено 500 новостных статей.

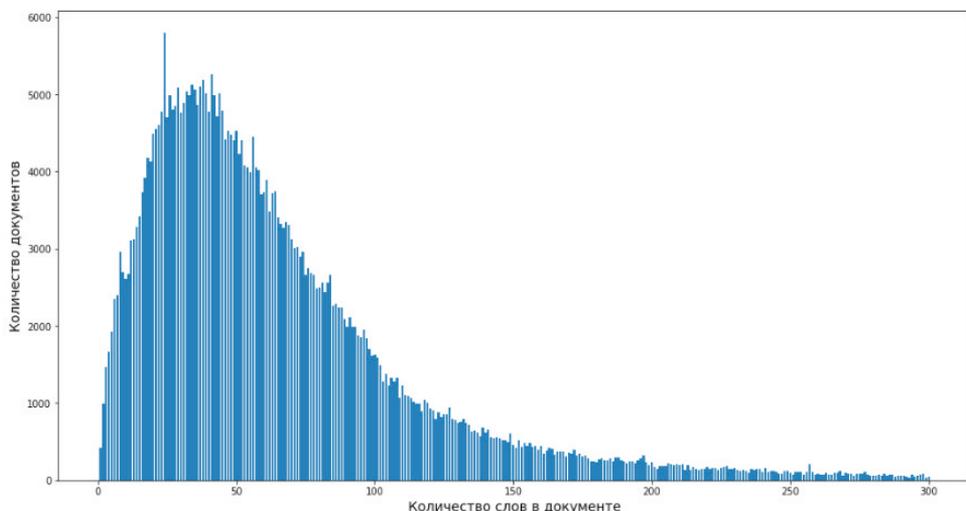


Рис. 4. Частота слов в документе

Набор SemEval2017 состоит из 500 документов, выбранных из журнальных статей ScienceDirect, равномерно распределенных по областям информатики, материаловедения и физики. Статьи представлены на английском языке

В таблице 1 приведены основные характеристики рассматриваемых датасетов.

Таблица 1

### Характеристики датасетов

Данные	Язык	Количество документов	Количество слов	Количество уникальных слов
annotations	Русский	400000	29.5 млн	260 т
500N-KPCrowd-v1.1	Английский	500	116 т	16 т
SemEval2017	Английский	500	49 т	8 т

Предобработка данных осуществлялась с помощью языка программирования python. На этапе предобработки с помощью регулярных выражений данные почистили от пунктуации html-тэгов, а также удалили слова, состоящие из одного буквы. Tokenization и удаление стоп-слов было осуществлено с помощью библиотека nltk. Для приведения слов к единой форме была использована лемматизация из nltk.stem.WordNetLemmatizer() и rumorphy2.MorphAnalyzer(). По итогу обработки получили релевантные данные для каждого документа. Во-первых, данных стало гораздо меньше, что способствует ускорению работы алгоритмов, во-вторых, сами слова представлены в удобном виде, подлежащем анализу.

Следующим этапом применялся статистический метод IDF для отбора кандидатов, наиболее информативных слов. Получив результаты, слова с наибольшими и наименьшими значениями IDF были удалены, так как первые можно отнести в группу стоп-слов, которые слишком часто встречаются, а вторая группа наоборот – редкие единичные слова, которые также не подлежат анализу.

Итоговые данные были переведены в формат BOW (Bag-of-words) и разбиты на темы с помощью тематического моделирования. Для реализации была использована модель LDA с аддитивной регуляризацией из библиотеки BigARTM. Bag-of-Words или мешок слов – это модель, часто используемая при обработке текстов, представляющая собой неупорядоченный набор слов, входящих в обрабатываемый текст. В этой модели документ представляется в виде мешка его слов с сохранением информации об их количестве [3].

В ходе эксперимента данные были разбиты на 150 тем. На рисунке 6 представлена визуализация тем, для наглядности выведены по два слова из 13 тем. Для визуализации за основу была взята матрица  $\phi$ , в которой хранятся вероятности попадания слова в определенную тему. Размерность матрицы была уменьшена до 2 с помощью t-SNE – алгоритм машинного обучения, базовый принцип которого заключается в сокращении попарных расстояний между точками при сохранении их относительного расположения. Иными словами, алгоритм отображает многомерные данные на пространство более низкой размерности, при этом сохраняя структуру соседства точек.

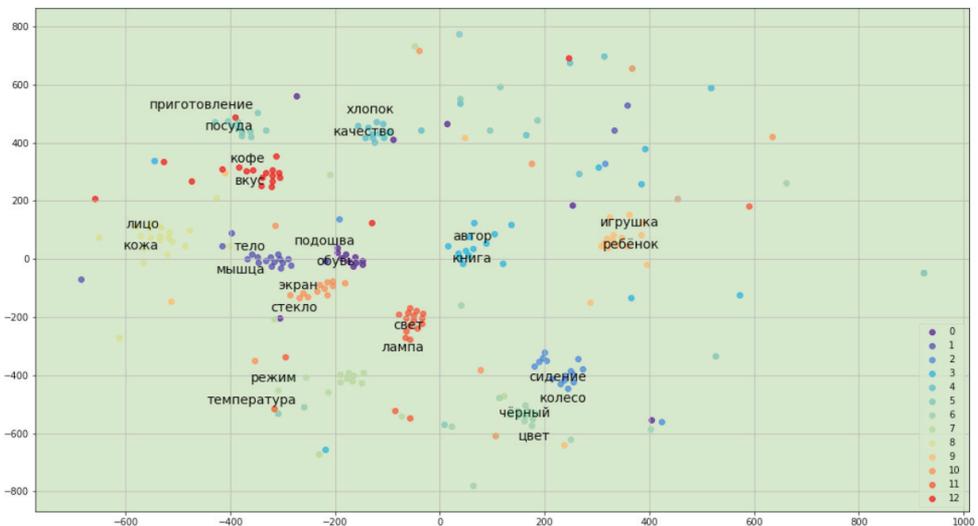


Рис. 6. Распределение тем

Для удобства было выведено по 30 первых слов в каждой теме. График напоминает задачу кластеризации, как и было упомянуто выше. Есть слова, которые строго попадают под свою тематику, а также слова, которые находятся в промежуточном состоянии, так как могут с приблизительно одинаковой вероятностью относиться к нескольким темам одновременно.



## 7. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

По итогам работы модели каждому документу были присвоены топ 3 темы наиболее подходящие и из каждой темы выделены топ 3 слова. Пример отобранных ключевых слов показан на рисунке 7.

**Коврик**-пазл «Сказочная принцесса» – увлекательная, развивающая **игрушка**, на которой **малыш** сможет лежать, сидеть, ползать и играть. Коврик состоит из двадцати четырех текстурированных сегментов, с красочным изображением принцесс, цифр от 0 до 9 и других волшебных предметов. Таким образом, в игровой форме малыш **развивает** не только визуальное и тактильное **восприятие** предметов, но и в игровой форме научится счету. Коврик помогает развитию мелкой моторики, воображения, **мышления** и пространственного восприятия **ребенка**.

Коврик-пазл создан из экологически чистого полимерного **материала** – ЭВА (этиленвинилацетат).

Основные достоинства:

- хорошо амортизирует
- гипоаллергенный
- не электризуется
- легкий
- стойкий к воздействию химических веществ
- препятствует образованию и размножению грибка, а также болезнетворных бактерий

Для детей с 10 месяцев

**Размер** коврика в собранном состоянии: 62 x 93 x 1 см

Размер упаковки: 32 x 32 x 6 см

Рис. 7. Пример отобранных ключевых слов для описания

На рисунке 7 представлено описание товара «коврик-пазл «Сказочная принцесса». Каждая тема показана отдельным цветом. Ключевые слова «коврик», «материал» и «размер» характеризуют сам товар – коврик, слова следующей тема – «игрушка», «малыш» и «ребенок» объединены детской тематикой, что указывает на то, для кого предназначен товар, а следующая тройка слов – «развивает», «восприятие» и «мышление» указывают на пользу товара. Следовательно, по данному примеру можно сказать, что алгоритм отработал корректно.

Оценка качества модели была произведена с помощью расчетов для тестовой выборки. Результаты приведенного эксперимента сравнивались с базовым алгоритмом, в основу которого вошло выделение ключевых слов с помощью метода TF-IDF, то есть отбиралось также по 9 ключевых слов из каждого документа, которые имеют наибольший вес.

Так как у данных 500N-KPCrowd-v1.1 и SemEval2017 есть заранее известные ключевые слова, на их основе была посчитана метрика precision, которая вычисляет соотношение количества правильно отобранных ключевых к общему количеству искомым ключевых слов:

$$precision = \frac{TP}{TP + FP},$$



где TP – количество истинных срабатываний, а FP – количество ложных срабатываний соответственно.

Для сравнения к тестовым данным был применен базовый алгоритм, который оценивал слова по TF-IDF. По результатам базового алгоритма precision для датасета 500N-KPCrowd-v1.1 precision составил 0.38 и 0.43 соответственно. После проведения описанного эксперимента метрика возросла и составила 0.56 для 500N-KPCrowd-v1.1 и 0.62 для SemEval2017. Подробнее результаты описаны в таблице 2.

Таблица 2

### Результаты эксперимента

Данные	Базовый алгоритм (TF-IDF)	Представленный метод
500N-KPCrowd-v1.1	0.38	0.56
SemEval2017	0.43	0.62

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проделанной работы извлечены ключевые слова из описаний товаров для упрощения поиска. Была разработана модель тематического моделирования LDA, основанная на подходе ARTM. Данные, используемые для проведения эксперимента, – список описаний товаров в размере 400 тысяч документов. Для проведения эксперимента данные были подвержены предварительной обработке, выделению кандидатов в ключевые слова с помощью статистических методов и обработаны с помощью модели LDA для получения результатов. Оптимальное решение было достигнуто выделением 150 тем из всего списка документов. Конечный вывод ключевых слов состоял из выделения наиболее значимых трех слов по каждой из трех приоритетных тем, выделенных для конкретного документа. Качество работы оценивалось на тестовых данных – готовые данные 500N-KPCrowd-v1.1 и SemEval2017 с выделенными ключевыми словами. Метрика precision показала результаты в 0.56 и 0.62 соответственно, что выше результата базового алгоритма.

### Литература

1. *Augenstein, I., Das, M., Riedel, S., Vikraman, L. and McCallum, A.* (2017) Semeval 2017 task 10: Scienceie – extracting keyphrases and relations from scientific publications. In Proceedings of the 11th International Workshop on Semantic Evaluation, SemEval@ACL 2017, Vancouver, Canada, August 3–4, 2017, 546–555. URL: <https://doi.org/10.18653/v1/S17-2091>.
2. *Апишев М.А.* Эффективные реализации алгоритмов тематического моделирования: дис. канд. физ-мат наук: 230401. – М., 2020. – 152 с.
3. *Воронцов К.В.* Вероятностное тематическое моделирование: теория, модели, алгоритмы и проект BigARTM. URL: <http://www.machinelearning.ru/wiki/images/d/d5/Voron17survey-artm.pdf>.
4. *Воронцов К., Потапенко А.А.* Аддитивная регуляризация тематических моделей // Доклады Академии наук. – 2014. – Т. 456, № 3. – С. 268–271.
5. *Коршунов Антон, Гомзин Андрей.* Тематическое моделирование текстов на естественном языке // Труды Института системного программирования РАН, 2012. Т. 23. – С. 215–244.



## Development of a Keyphrase Extraction Method Based on a Probabilistic Topic Model

**Ekaterina L. Romanadze\***

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0351-7235>

e-mail: [katia\\_rom.97@mail.ru](mailto:katia_rom.97@mail.ru)

**Vladimir A. Sudakov\*\***

Moscow Aviation Institute Moscow, Russia,

IPM them. M.V. Keldysh RAS, Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1658-1941>

e-mail: [sudakov@ws-dss.com](mailto:sudakov@ws-dss.com)

**Vadim G. Kislinsky\*\*\***

Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia,

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2000-583X>

The article considers the task of topic modeling. A new method for extracting keywords has been developed based on topic modeling to analyze a collection of documents describing the goods of an online store. A comparative analysis of the basic method for extracting keywords and the proposed method was carried out. Illustrative results are presented that describe the advantages of this approach. The resulting solution can be used to simplify site navigation and search for relevant products.

**Keywords:** keyword extraction, topic modeling, NLP, LDA, machine learning

### For citation:

Romanadze E.L., Sudakov V.A., Kislinsky V.G. Development of a Keyphrase Extraction Method Based on a Probabilistic Topic Model. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2022. Vol. 12, no. 2, pp. 20–33. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2022120202> (In Russ., abstr. in Engl.).

\***Ekaterina L. Romanadze**, Graduate Student, Moscow Aviation Institute (National Research University)(MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0351-7235>, e-mail: [katia\\_rom.97@mail.ru](mailto:katia_rom.97@mail.ru)

\*\***Vladimir A. Sudakov**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), MAI, Moscow, Russia, Leading Researcher, Federal State Institution “Federal Research Center Institute of Applied Mathematics. M.V. Keldysh of the Russian Academy of Sciences (IPM named after M.V. Keldysh RAS), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1658-1941>, e-mail: [sudakov@ws-dss.com](mailto:sudakov@ws-dss.com)

\*\*\***Vadim G. Kislinsky**, Researcher, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University) (MFTI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2000-583X>



### **References**

1. Augenstein, I., Das, M., Riedel, S., Vikraman, L. and McCallum, A. (2017) Semeval 2017 task 10: Scienceie – extracting keyphrases and relations from scientific publications. In Proceedings of the 11th International Workshop on Semantic Evaluation, SemEval@ACL 2017, Vancouver, Canada, August 3–4, 2017, 546–555. URL: <https://doi.org/10.18653/v1/S17-2091>.
2. Apishev M.A. Effective implementation of topic modeling algorithms: dis. cand. physics and mathematics: 230401. – M., 2020. – 152 p.
3. Vorontsov K.V. Probabilistic topic modeling: theory, models, algorithms and design BigARTM. URL: <http://www.machinelearning.ru/wiki/images/d/d5/Voron17survey-artm.pdf>.
4. Vorontsov K., Potapenko A.A. Additive regularization of thematic models // Reports of the Academy of Sciences. – 2014. – T. 456, № 3. 268–271 p.
5. Korshunov Anton, Gomzin Andrey. Thematic modeling of natural language texts // Proceedings of the Institute for System Programming of the Russian Academy of Sciences, 2012. T. 23. p. 215–244.

Получена 18.04.2022

Received 18.04.2022

Принята в печать 23.06.2022

Accepted 23.06.2022

## ◆◆◆◆◆ МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ◆◆◆◆◆

УДК 372.851

### **Системный подход к методике тифлопедагогике на примере задач математического анализа**

***Куланин Е.Д.\****

Московский государственный психолого-педагогический университет  
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>  
e-mail: [lucas03@mail.ru](mailto:lucas03@mail.ru)

***Степанов М.Е.\*\****

Московский государственный психолого-педагогический университет  
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>  
e-mail: [mestepanov@yandex.ru](mailto:mestepanov@yandex.ru)

***Панфилов А.Д.\*\*\****

Московский государственный психолого-педагогический университет  
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация  
e-mail: [sp.999@bk.ru](mailto:sp.999@bk.ru)

***Потоньшев И.С.\*\*\*\****

Московский государственный психолого-педагогический университет  
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация  
e-mail: [i-p99@mail.ru](mailto:i-p99@mail.ru)

В статье обсуждаются некоторые проблемы, возникающие при работе со студентами, имеющими дефекты зрения. В частности, авторы обсуждают пути повышения культуры математического мышления студентов с дефектами зрения. Авторы опираются на опыт работы на факультете информационных технологий МГППУ.

**Ключевые слова:** высшее образование, система заданий, целенаправленное размышление, тифлопедагогика, методика преподавания математики, Евклидова геометрия, пространственное воображение, математический анализ, аналитическая геометрия, интегральное исчисление, тестирование уровня развития.

**Для цитаты:**

*Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Панфилов А.Д., Потоньшев И.С.* Системный подход к методике тифлопедагогике на примере задач математического анализа // Моделирование и анализ данных. 2022. Том 12. № 2. С. 34–82. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2022120203>



\***Куланин Евгений Дмитриевич**, кандидат физико-математических наук, профессор, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>, e-mail: [lucas03@mail.ru](mailto:lucas03@mail.ru)

\*\***Степанов Михаил Евграфович**, кандидат педагогических наук, доцент, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: [mestepanov@yandex.ru](mailto:mestepanov@yandex.ru)

\*\*\***Панфилов Александр Дмитриевич**, студент, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, e-mail: [sp.999@bk.ru](mailto:sp.999@bk.ru)

\*\*\*\***Потоньшев Илья Сергеевич**, студент, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, e-mail: [i-p99@mail.ru](mailto:i-p99@mail.ru)

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Некоторым из авторов данной статьи пришлось многие годы преподавать студентам с дефектами зрения различные разделы высшей математики. Естественно, что в такой ситуации им пришлось обдумывать вопросы, связанные с проблемами тифлопедагогики [1, 2]. В то же время авторы занимались и общими вопросами методики преподавания высшей математики [3–6]. Данная статья является итогом осмысления общих проблем преподавания высшей математики и проблем тифлопедагогики в совокупности.

Авторы исходят из следующей точки зрения. Глубокое освоение математических знаний предполагает овладение целым рядом понятий и навыков. Прежде всего, необходимо *понимать* соответствующий материал, а, по мнению авторов статьи, понимание основывается на образном мышлении [6]. В то же время, как правило, освоение математических знаний связано с получением вычислительных навыков в широком смысле. Наконец, студент должен уметь свободно выражать свои мысли вне зависимости от того, основываются ли они на образах или на алгоритмических и вычислительных навыках. На самом деле, конечно, процесс обучения значительно более сложен, однако, общая идея, из которой авторы исходят, может быть выражена именно так.

В области тифлопедагогики особенно затрудняется обучение, направленное на развитие образного мышления. Одним из путей решения этой проблемы является использование осязательной предметности [2]. Но одной замены визуальных учебных пособий на осязаемые пособия, конечно, недостаточно. Необходим системный подход, позволяющий соединить воедино различные направления и идеи, используемые при обучении математике. Авторы предполагают, что для эффективного осуществления такого системного подхода необходимо основываться на системах заданий, позволяющих студентам с дефектами зрения успешно осваивать различные разделы математики.

**Основной педагогической целью разработки системы заданий является создание атмосферы целенаправленного размышления по вопросам, связанным с изучаемой темой.**



Отметим, в связи с вышесказанным, что использование термина «система» в данной статье имеет два аспекта. Первый из них состоит в том, что рассматриваемые ниже задания должны соединять в себе различные аспекты математической деятельности, например, такие как образное манипулирование геометрическими объектами и проведение, связанных с этими объектами вычислений. Второй аспект связан с созданием набора заданий, который мы будем называть «системой заданий».

## 2. ВОПРОСЫ, СВЯЗАННЫЕ ОСВОЕНИЕМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Как своеобразный полигон реализации системного подхода к изучению различных разделов высшей математики авторы выбрали интегральное исчисление, а точнее совокупность задач, которые направлены на получение с помощью интегралов площадей и объёмов геометрических фигур и тел.

Важно отметить, что поскольку решение подобных задач связано с предварительным развитием пространственного воображения, в обширную систему заданий будут включены и задачи, относящиеся к различным разделам геометрии, в том числе и геометрии элементарной. При этом необходимо ясно понимать, что в рамках тифлопедагогики некоторые элементарные, а порой и просто тривиальные на первый взгляд задачи и вопросы исключительно важны и даже незаменимы. В дальнейшем это следует иметь в виду.

Кроме того, по мнению авторов, достижение достаточно глубокого уровня понимания изучаемых студентами математических вопросов возможно с помощью получения одних и тех же результатов различными способами, начиная от элементарных решений и кончая методами, основанными на использовании сложных математических теорий.

Таким образом, использование системного подхода к разработке соответствующих комплексов заданий предполагает обращение к достаточно разнородной, на первый взгляд, совокупности математических идей и теорий.

Рассматриваемый нами ниже круг вопросов затрагивает

1. Задания, непосредственно направленные на развитие пространственного воображения у студентов с дефектами зрения. Они могут использоваться как начальная база для освоения самых разных разделов математики. При решении соответствующих задач могут использоваться различные подходы, включая осязательные эксперименты с материальными моделями геометрических объектов.
2. Вопросы планиметрии, связанные с вычислением площадей.
3. Вопросы стереометрии, связанные с вычислением объёмов.
4. Геометрические образы, изучаемые в аналитической геометрии (кривые и поверхности второго порядка) и математическом анализе (графики функций одной и двух переменных).
5. Понятие определённого интеграла, которое также весьма тесно связано с геометрическими образами.



6. Понятие неопределённого интеграла и первообразной и рассмотрение методов интегрирования.
7. Формула Ньютона – Лейбница.
8. Рассмотрение важного аналитического навыка, на котором во многом основано прикладное использование определённого интеграла. Речь идёт об умении эффективно использовать символику Лейбница, что позволяет осознанно рассматривать соответствующие интегралы как пределы естественно формируемых сумм.
9. В данной статье особое значение будут иметь и широко использоваться идеи, связанные с принципом Кавальери. Дело в том, что при практическом применении этого принципа образное мышление часто важнее вычислительных навыков. При этом принцип Кавальери, будет предварительно доказан с помощью понятий интегрального исчисления.
10. Основные понятия теории геометрических преобразований плоскости и трёхмерного пространства. Этот пункт (как и следующий) связан с эффективным использованием принципа Кавальери. Важным примером является преобразование сжатия к прямой, которое позволяет получить формулу площади эллипса.
11. Элементарные понятия, связанные с топологическими преобразованиями геометрических объектов на плоскости и в трёхмерном пространстве. Эти преобразования также будут использоваться при решении задач, относящихся к принципу Кавальери. Примером одного из таких преобразований является преобразование пирамиды в конус, не меняющего площади поперечных сечений и объёма преобразуемых объектов.
12. Развитие понятия интеграла (кратные и криволинейные интегралы).

Перечисленные выше двенадцать пунктов можно рассматривать как те базовые области, системно соединив которые, можно научить студента с дефектами зрения осознанно и свободно работать с интегралами. В данной статье мы затронем только часть перечисленных вопросов, в первую очередь те, которые наиболее тесно связаны с принципом Кавальери, имеющим наглядный геометрический характер.

Дело в том, что при рассмотрении этой тематики речь идёт скорее не о разработке одной целостной системы заданий, а о целом ряде систем заданий, естественным образом дополняющих друг друга. Например, пункт 12 содержит очень большой круг весьма сложных вопросов, которые нужно рассматривать, так сказать, обособленно от более элементарных тем, связанных с остальными одиннадцатью пунктами.

Ниже авторы статьи демонстрируют не столько конечные результаты в виде готовых и чётко зафиксированных систем заданий, сколько особенности работы в этом направлении.

Важной особенностью предлагаемой методики является то обстоятельство, что при решении многих из соответствующих задач перед студентом в полной мере раскрывается смысл слов, Андрея Николаевича Колмогорова, давшего известное определение математики: «Математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира». Задачи, предлагаемые студенту, заставляют его одновременно размышлять о геометрических формах, характеризуе-



мых численными (точнее функциональными) соотношениями, и о топологических преобразованиях исходных форм в новые формы, подчинённые всё тем же числовым и функциональным отношениям.

Добавим, что некоторые из предлагаемых заданий можно с успехом предлагать и студентам, которые полноценно могут работать с чертежами, рисунками и прочей графической информацией. По этой причине некоторые задания будут дублироваться в графической форме (иногда по типу комиксов).

### 3. ЗАДАНИЯ, НАПРАВЛЕННЫЕ НА НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ РАЗВИТИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ВООБРАЖЕНИЯ

Круг используемых в данных темах заданий, прежде всего, связан с простейшими плоскими фигурами, трёхмерными телами и их поверхностями. При этом необходимо сделать следующее уточнение. В принципе почти любая задача геометрического характера в известном смысле связана с развитием пространственного воображения. Однако в рамках тифлопедагогики восприятие стандартной геометрической задачи может вызывать значительные затруднения. По этой причине ниже мы будем рассматривать вопросы, которые подготавливают учащихся с дефектами зрения к тому, чтобы они научились вербальную формулировку задачи разворачивать в полноценный чувственный образ, позволяющий понять условие задачи настолько, чтобы приступить к её решению.

Перейдём к рассмотрению некоторых типов задач, которые направлены на мысленное воспроизведение некоторых геометрических реалий. Именно решение таких, пусть и достаточно простых, задач позволяет дать начальный толчок к достаточно свободному мысленному манипулированию пространственными образами.

Первый рассматриваемый нами блок задач, связан с **разрезанием плоских фигур**. Вопросы в каждом случае имеют одинаковый характер – сколько существует различных вариантов, возникающих после разрезания исходной фигуры; сколько фигур получается в каждом из вариантов; какие фигуры при этом могут возникнуть. В этой связи вместо подробной формулировки задачи ограничимся только указанием вида фигуры и характера разреза. Приведём примеры вопросов и ответов, имея в виду, что форма ответов будет в дальнейшем учитываться при обсуждении реализации тестирующей программы, которую можно использовать при изучении соответствующих вопросов.

1. Треугольник разрезан по прямой, проходящей через его вершину.

Ответ: вариант один; в результате разрезания получится два треугольника.

2. Треугольник разрезан по произвольной прямой.

Ответ имеет вид: варианта два; в результате разрезания получится либо два треугольника, либо треугольник и четырёх угольник.

Приведём несколько примеров подобных задач, но уже в основном без ответов. При этом напомним, что в тифлопедагогике не следует бояться даже самых элементарных задач.



3. Треугольник разрезан по прямой, перпендикулярной стороне.
  4. Треугольник разрезан по прямой, параллельной стороне.
  5. По какой прямой можно отрезать от треугольника подобный ему треугольник?  
Ответ: по прямой, параллельной одной из сторон треугольника.
  6. Прямоугольник разрезан по прямой, проходящей через его центр.
  7. Четырёхугольник разрезан по произвольной прямой.
  8. Квадрат разрезан по двум его диагоналям.
  9. Выпуклый многоугольник разрезан по двум диагоналям
- Следующий блок задач, связан со **складыванием плоских фигур из других фигур**.

1. Какие фигуры можно получить при складывании двух равных равнобедренных прямоугольных треугольников.
2. Какие фигуры можно получить при складывании двух равных равнобедренных треугольников.
3. Какие фигуры можно получить при складывании двух равных прямоугольных треугольников.
4. Какие фигуры можно получить при складывании двух прямоугольных треугольников, имеющих по одному равному катету.
5. Какие фигуры можно получить при складывании двух равных треугольников.
6. Какие фигуры можно получить при складывании двух треугольников, имеющих по одной равной стороне.

Рассмотрим блок задач, связанный с **разрезанием исходной фигуры и последующим складыванием новой фигуры**. Этот блок особенно важен по той причине, что тесно связан с вычислением площадей плоских фигур.

1. Разрезать квадрат и из частей сложить два равных квадрата.
2. Разрезать два равных квадрата и из частей сложить один квадрат.

Отметим, что данная задача напрямую связана с задачей, которую Платон обсуждает в диалоге «Менон», а затем делает далеко идущие философские выводы [7].

Отметим здесь и ещё одну параллель с античной математикой. Речь идёт о задаче построения куба, имеющего объём в два раза больший, чем у исходного куба [8]. В дальнейшем мы вновь соприкоснёмся с двумя этими задачами.

3. Разрезать параллелограмм и сложить прямоугольник.
4. Разрезать трапецию и сложить прямоугольник.
5. Разрезать треугольник и сложить параллелограмм.

Блок задач, связанный с **изгибанием плоских фигур и рассмотрением выпуклых оболочек изогнутых фигур**.

Блоку задач должно предшествовать определение выпуклого множества, как множества  $M$  точек плоскости или трёхмерного пространства, обладающего тем свойством, что в случае, когда точки  $A$  и  $B$  принадлежат  $M$ , то и весь отрезок  $AB$  принадлежит множеству  $M$ .

Следующее определение выпуклой оболочки множества точек  $T$  состоит в том, что соответствующей выпуклой оболочкой является наименьшее из выпуклых множеств, содержащих все точки из  $T$ .



Первые задания по данной теме направлены на то, чтобы хорошо понять исходные определения.

1. Какова выпуклая оболочка двух точек  $A$  и  $B$ ?
2. Какова выпуклая оболочка трёх точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ ?
3. Какова выпуклая оболочка четырёх точек в пространстве?
4. Какова выпуклая оболочка четырёх точек на плоскости?
5. Какова выпуклая оболочка пяти точек в пространстве?

Далее можно предлагать задания, связанные с изгибанием плоских фигур.

6. Треугольник изогнут по прямой, проходящей через вершину. Какова выпуклая оболочка изогнутой фигуры.
7. Треугольник изогнут по произвольной прямой. Какова выпуклая оболочка изогнутой фигуры.

Важную роль играют задания, позволяющие понять общие методы построения выпуклых оболочек.

8. Какова выпуклая оболочка нескольких точек на плоскости?
9. Как построить выпуклая оболочка нескольких точек на плоскости?
10. Заданы плоский выпуклый многоугольник  $A_1A_2\dots A_n$  и точка  $A_0$ , не лежащая в его плоскости. Что является выпуклой оболочкой точек  $A_0, A_1, \dots, A_n$ ?
11. Какова выпуклая оболочка нескольких точек в пространстве?
12. Как построить выпуклая оболочка нескольких точек в пространстве?

Блок заданий, связанный с **развёртками многогранников и линейчатых поверхностей**.

1. Какую поверхность можно склеить из плоского прямоугольника?
2. Какую поверхность можно склеить из сектора круга?
3. Как найти кратчайший путь по поверхности куба между точками, лежащими на соседних гранях этого куба.
4. Как найти кратчайший путь по поверхности цилиндра между точками, лежащими на этом цилиндре?
5. Как найти кратчайший путь по поверхности конуса между точками, лежащими на этом конусе?

Блок заданий, связанный с **получением тел вращения**.

1. Плоский прямоугольник  $ABCD$  вращается вокруг стороны  $AB$ . Какую кривую описывает центр этого прямоугольника?
2. Плоский прямоугольник  $ABCD$  вращается вокруг стороны  $AB$ . Какую поверхность заметёт сторона  $CD$ ?
3. При тех же условиях какую поверхность заметёт сторона  $BC$ ?
4. В плоском прямоугольнике  $ABCD$  проведена диагональ  $AC$ . Какая поверхность будет заметена этой диагональю при вращении прямоугольника вокруг стороны  $AB$ ?
5. Внутри плоского прямоугольника со стороной  $AB$ , серединой которой является точка  $O$ , построена полуокружность с центром  $O$  и радиусом  $OA$ . Какая поверхность будет заметена полуокружностью при вращении прямоугольника вокруг стороны  $AB$ ?



Блок заданий, связанный с **разрезанием трёхмерных тел.**

1. Как разрезать выпуклую многогранную призму на несколько трёхгранных призм.
2. Как разрезать куб на несколько пирамид?
3. Как разрезать выпуклый многогранник на несколько пирамид?

Блок заданий, связанный со **сгибанием плоских фигур без разрезания и склейкой рёбер.**

1. Лист бумаги  $L$  с прямолинейным граничным отрезком  $AB$  согнут по сгибу  $OM$ , проходящему через внутреннюю точку  $O$  этого отрезка. Какую поверхность замечает отрезок  $OM$  при изменении угла сгиба?

Ответ. Конус с образующей  $OA$ .

2. Каково пересечение этого конуса с листом бумаги  $L$ ?

Ответ. Кроме линии  $OA$  ещё и линия, симметричная  $OA$  относительно линии сгиба  $OM$ .

3. Сделаны два сгиба  $OM$  и  $ON$ , проходящие через точку  $O$ . При каких условиях соответствующие конусы соприкасаются по одной образующей?

Ответ. Угол  $MON$  является прямым.

4. Когда соответствующие конусы имеют только общую вершину?

Ответ. Угол  $MON$  является тупым.

5. Когда соответствующие конусы пересекаются по образующим, лежащим вне листа бумаги  $L$ ?

Ответ. Угол  $MON$  является острым.

6. Сделаны два сгиба  $OM$  и  $ON$ , проходящие через точку  $O$ . При каких условиях возможно возникновение трёхгранного угла после склейки  $OA$  и  $OB$ ?

7. Задан плоский выпуклый многоугольник. Какие сгибы нужно сделать в надежде на склейку пирамиды?

Ответ. По линиям, соединяющим середины соседних сторон.

Назовём склейку рёбер, приводящую к возникновению подобия плоского конверта, вырожденной.

8. Из какого треугольника можно склеить невырожденную пирамиду?

9. Из какого треугольника можно склеить плоскую вырожденную пирамиду-конверт?

10. Из какого треугольника нельзя склеить пирамиду?

11. Каковы результаты склейки квадрата?

12. Каковы результаты склейки произвольного выпуклого четырёхугольника?

13. Склейка каких выпуклых четырёхугольников приводит к появлению «конвертов»?

14. Можно ли получить пирамиду из выпуклого многоугольника с числом углов более четырёх?

Блок заданий, связанный с **плоскими сечениями объёмных тел.**

В этом блоке следует максимально широко использовать материальные модели, с помощью которых можно осязательно изучать тела, как целостные объекты, так и плоские сечения соответствующих тел. В число соответствующих объектов следует включить призмы, пирамиды, цилиндры, конусы, параллелепипеды, антипризмы,



правильные многогранники. Что касается плоских сечений, то соответствующие модели могут иметь различную степень сложности.

Простейшими являются модели, в которых исходное тело распадается на меньшие тела, например, большая пирамида должна быть составлена из малой пирамиды и пирамиды усечённой. В качестве модели высокой сложности (она ещё не разработана) можно рассмотреть стержневую модель с наклонным плоским сечением цилиндра и шарами Данделена.

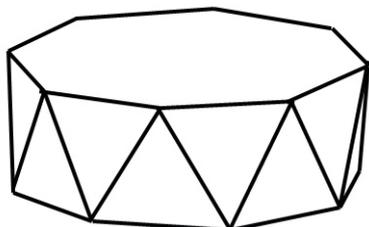


Рис. 1

Что касается правильных многогранников, то для осознанного понимания их структуры, следует использовать модели, которые показывают, как эти многогранники можно разлагать на пирамиды и антипризмы (рис. 1). В частности такой подход позволяет несколько иначе взглянуть на правильный тетраэдр (вырожденная антипризма, рис. 2), куб (две трёхгранных пирамиды и антипризма, рис. 3) и октаэдр (антипризма, рис. 4).

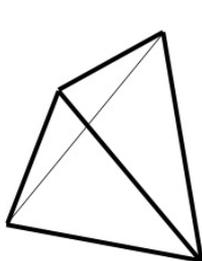


Рис. 2

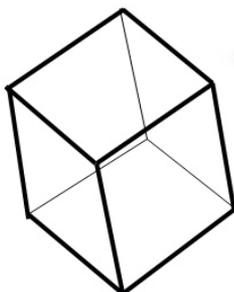


Рис. 3

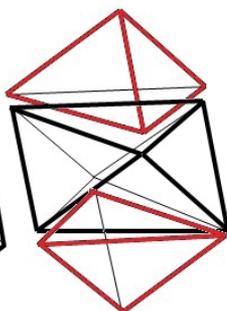
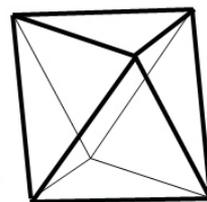


Рис. 4



В дальнейшем будут рассматриваться задания, связанные с определением объёма антипризм. По этой причине нужно рассмотреть вопрос о форме горизонтального сечения антипризм (рис. 5), используя осязательные модели.

Соответствующая тематика в значительной мере может быть привязана к вопросам тестирования уровня развития пространственного воображения у студентов с дефектами зрения.

Как известно, в настоящее время тестирование является распространённым методом оценки тех или иных аспектов качества учебного процесса.

При этом обычно результаты тестирования являются отчуждёнными от самого учебного процесса. Тестирование рассматривается как технология, позволяю-

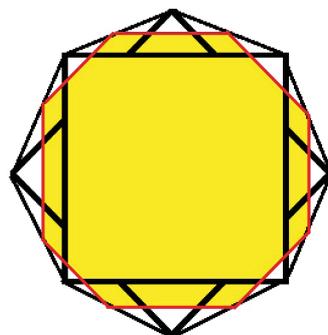


Рис. 5



щая оценить знания учащегося вне рамок полноценного общения учащегося и преподавателя.

Столь же часто по результатам тестирования определённые инстанции оценивают эффективность работы преподавателя. Эта оценка также является отчуждённой от человеческого содержания обучения, состоящего в передаче не только знаний, но и в формировании ряда психологических структур, определяющих характер развивающейся личности.

В нашем же случае предполагается, что цели тестирования таковы. Прежде всего, речь идёт о **самооценке студента** в плане развития у него пространственного воображения. Следующим шагом должно стать устранение пробелов, выявленных в ходе тестирования. Самостоятельная работа студента может успешно дополняться совместной работой нескольких студентов. Возможно и участие преподавателя.

Время тестирования неограниченно по той причине, что цель работы состоит в саморазвитии учащегося. Основой для создания интерфейса тестирующей программы должен стать своеобразный тезаурус, что позволяет пользователю давать многоуровневые ответы на каждый из вопросов, входящих в данную систему заданий.

Например, выше приведен вопрос: «По какой прямой можно отрезать от треугольника подобный ему треугольник?» и ответ на него: «По прямой, параллельной одной из сторон треугольника». Чтобы пользователь мог успешно ответить на соответствующий вопрос, в тезаурус необходимо включить термин, связанный с параллельностью.

Естественно, что детальная проработка принципов, положенных в основу соответствующей диалоговой программы, потребует значительных усилий.

#### 4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ, ПРИВОДЯЩИЕ К ПОЛУЧЕНИЮ ДОСТАТОЧНО СЛОЖНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Точно также как и при рассмотрении задач, связанных со **сгибанием плоских фигур без разрезания и склейкой рёбер**, где выстроена последовательность вопросов, помогающая разобраться в соответствующей проблематике, можно выстраивать последовательные системы заданий, приводящие к решению геометрических задач и доказательству теорем.

Начнём с рассмотрения теоремы Пифагора.

1. Дан квадрат со стороной  $a + b$ . Какова его площадь?
2. Дан прямоугольный треугольник с катетами  $a$  и  $b$ . Какова его площадь?
3. В квадрат со стороной  $a + b$  вложены без наложения друг на друга четыре прямоугольных треугольника с катетами  $a$  и  $b$ . Какова не покрытая ими площадь?
4. Можно ли в квадрат со стороной  $a + b$  вложить без наложения друг на друга четыре прямоугольных треугольников с катетами  $a$  и  $b$  так, чтобы их катеты полностью покрыли периметр этого квадрата?

Ответ. В каждый угол квадрата по кругу вкладываются треугольник за треугольником. При этом длина катетов при движении по периметру образует последовательность  $a, b, a, b, a, b, a, b$ .



5. Какова при этом форма непокрытой треугольниками области.
6. На основе этого факта сформулируйте теорему Пифагора.

Теорема Пифагора является важнейшим базовым фактом, позволяющим вводить метрику в многомерных евклидовых пространствах. По этой причине естественным продолжением соответствующей тематики могут стать соответствующие задания. Есть, однако, и иные варианты.

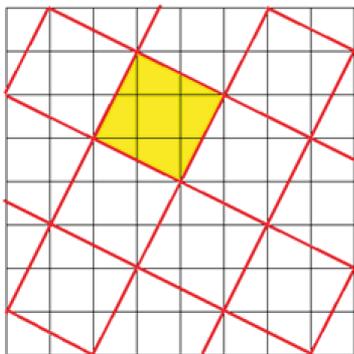


Рис. 6

Одним из них является построение квадратных сеток на основе уже построенной сетки из единичных квадратов.

*Задача.* На плоскости построена сетка из единичных квадратов. Построить сетку из квадратов площади 5 (рис. 6).

Примем один из узлов сетки единичных квадратов за начало системы координат  $O$ . Найти узловую точку  $A$  такую, что длина вектора  $OA$  равна  $\sqrt{5}$ , используя тот факт, что  $5 = 1^2 + 2^2$ .

Найти узловую точку  $C$  такую, что длина вектора  $OC$  равна  $\sqrt{5}$ , а сам этот вектор перпендикулярен вектору  $OA$ .

Найти координаты точки  $B$  такой, что  $OABC$  является квадратом.

Описать алгоритм, который позволяет проводить прямые, образующие искомую сетку.

Отметим, что столь простое построение сетки для квадратов площади, задаваемой натуральными числами иногда возможно, а иногда это построение является более сложным. Этот факт связан с тем, что не все натуральные числа представимы в виде суммы двух квадратов [9]. Такое представление возможно только в том случае, когда разложение этого числа на множители не содержит простых сомножителей вида  $4n + 3$ . Это обстоятельство необходимо иметь в виду по той причине, что оно для некоторых студентов, пусть и немногих, открывает путь к изучению новых разделов математики.

Рассмотрим задачу, сформулированную по мотивам вопроса из книги Кордемского [10]. Вопрос таков. В комнате обычной формы большой злой мяч хочет раздавить шарик от пинг-понга (рис. 7). Куда спрятаться малышу? Ответ ясен – прятаться нужно в угол. Перейдём к аналогичной геометрической задаче с более чёткой формулировкой.

*Задача.* В квадрате, в который вписана большая окружность, находится ещё и маленький кружок. Каково отношение радиусов, позволяющее избежать наложения кругов друг на друга? (рис. 8).

Развернём решение задачи в последовательность вопросов.

1. Каково положение центра большой окружности  $O$ ?



Рис. 7

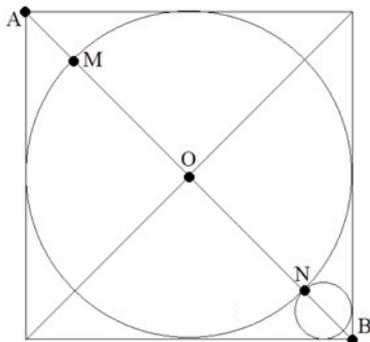


Рис. 8

2. Как связаны радиус большой окружности  $R$  и длина  $d$  диагонали  $AB$ ?
3. Как следует расположить малую окружность относительно большой, чтобы радиус  $r$  малой окружности имел максимальное значение?
4. Каковы расстояния между различными комбинациями точек  $A$ ,  $B$  (концы диагонали),  $M$  и  $N$  (точки пересечения большой окружности с диагональю  $AB$ )?
5. Есть ли у малой окружности отрезок, аналогичный одному из отрезков предыдущего вопроса?

Ответ. Речь идёт об отрезках  $MB$  и  $NB$ , кото-

рые рассматривались ранее. Их длины таковы:  $NB = \sqrt{2}R - R$ ,  $MB = \sqrt{2}R + R$ .

6. Каково отношение радиусов малой и большой окружности, получаемое из соображений подобия?

Ответ.  $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = 3 - 2\sqrt{2}$ .

Можно аналогичным образом рассмотреть и трёхмерный вариант задачи Кордемского.

Отметим, что подобный подход не только можно, но и нужно развивать при создании систем заданий, направленных на самый широкий круг математических теорий.

В частности, рассматриваемые далее задания, связанные с вычислением площадей и объёмов желательнo разворачивать в последовательность вопросов, позволяющую постепенно прийти к результату, например, несколько раз используя теорему Пифагора. Конечно, важную поддержку студентам с дефектами зрения должны оказывать осязательные модели.

## 5. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ И ОБЪЁМОВ

С этого момента мы приступаем к рассмотрению основной тематики данной статьи, то есть к вопросам, связанным с вычислением площадей и объёмов. Что касается вопросов, связанных с простейшими формулами нахождения площадей и объёмов, то здесь нужно подразумевать как минимум два аспекта. Один из них связан со **свободным освоением элементарных методов вычисления площадей**, а второй должен быть направлен на **овладение базовыми понятиями, лежащими в основании интегрального исчисления**. Но и в том, и в другом случае все формулы, позволяющие вычислять площади и объёмы, можно свести к вычислению площадей прямоугольников и прямоугольных параллелепипедов.

При этом, как это делается уже в школьном курсе геометрии, формула вычисления площади произвольного прямоугольника изначально обосновывается на примере



прямоугольников с натуральной длиной сторон. Здесь фактически даётся и исходное определение площади, как числа единичных квадратов, из которых сложена фигура. Формулу вычисления площади прямоугольника с натуральными длинами сторон вначале можно без доказательства на образном уровне перенести на любые прямоугольники и свободно ею пользоваться.

Имея это в виду, начнём обзор возможных заданий с рассмотрения вопросов, относящихся к **первому аспекту**, то есть с вывода формул планиметрии, направленных на вычисление площадей многоугольников. Как показывает опыт преподавания высшей математики, в современных условиях, начинать рассмотрение вопросов, связанных с вычислением площадей различных фигур, следует именно с простейших случаев, относящихся к планиметрии. С одной стороны это связано с определёнными пробелами в школьном математическом образовании. С другой стороны, если сконцентрировать внимание на проблемах тифлопедагогики, именно работа с плоскими геометрическими фигурами (как, впрочем, и с объёмными телами) позволяет развивать пространственное воображение и геометрическую интуицию студентов с дефектами зрения. С точки зрения авторов статьи здесь заключён один из важнейших моментов изучения математики соответствующей группой учащихся.

Вывод формул для вычисления площадей многоугольников основывается на ранее рассмотренных заданиях, направленных на разрезание фигур и комбинирование новых фигур из полученных частей.

1. С помощью минимального числа разрезов параллелограмма склеить из полученных частей прямоугольник. Получить формулу для вычисления площади параллелограмма.

Аналогичные задания можно сформулировать для треугольников и трапеций.

При этом можно рассматривать задания о вычислении площадей особых фигур.

2. Вычислить площадь правильного треугольника со стороной, имеющей длину  $a$ .

3. Вычислить площадь равнобедренного треугольника с основанием, имеющим длину  $a$ , и боковыми сторонами длины  $b$ .

Поскольку в ряде случаев необходимо вычислять площади, отправляясь не только от длин отрезков, но и от углов, следует рассмотреть и вопросы связанные с тригонометрическими функциями. Для этого нужно разработать соответствующий блок заданий, что выходит за рамки данной статьи. Здесь кстати проявляется одна из сложностей создания всеобъемлющих методических систем. Количество затрагиваемых вопросов нарастает подобно снежной лавине. При современном же состоянии образования необходимо начинать с элементарных вопросов, что мы и вынуждены отметить в очередной раз.

Не рассматривая заданий чисто тригонометрического характера, ограничимся несколькими задачами, связанными с использованием тригонометрии для вычисления площадей.

4. Вычислить площадь треугольника по длинам сторон  $a$  и  $b$  и углу  $\alpha$  между ними.

5. Вычислить площадь правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность радиуса  $r$ .

6. Вычислить площадь правильного  $n$ -угольника, описанного вокруг окружности радиуса  $r$ .



В случае, когда вычисления проводятся с помощью теоремы Пифагора, используемые осязательные модели, должны быть дополнены хорошо осязаемыми отрезками, связанными с соответствующими вычислениями. Например, высота равнобедренного треугольника в такой модели, должна быть выполнена либо в виде стержня, либо в виде желобка. Аналогичные соображения применимы и к моделям, поясняющим тригонометрические вычисления.

Отметим при этом, что использование характерных для планиметрии методов получения формул вычисления площадей, основанных на преобразованиях исследуемых фигур в изученные уже фигуры той же площади (имеется в виду разрезание плоских фигур и составлении из них прямоугольников), преследует ещё одну цель. Речь идёт о подготовке к использованию значительно более сложных преобразований, в том числе и топологического характера. При этом на соответствующие преобразования наложено следующее ограничение: площади исходной и конечной фигуры равны между собой.

В дальнейшем подобные преобразования будут нами применяться и для трёхмерных тел. Интересно, что Леонардо да Винчи во фрагменте «Книга, озаглавленная *О преобразованиях*, т.е. о преобразовании одного тела в другое без убавления или возрастания материи» рассматривает этот вопрос [11].

Мы уже активно пользовались формулой площади прямоугольника при выводе формул прочих фигур, обосновав её правильность на примере прямоугольников с натуральной длиной сторон. Но для подготовки рассуждений, связанных с введением понятия определённого интеграла, следует более подробно рассмотреть ситуации, относящиеся к вычислению площадей прямоугольников с любыми длинами сторон. В дальнейшем будет осуществлён переход к вычислению объёмов цилиндрических и призматических «блинчиков», в основании которых лежат криволинейные трапеции.

А сейчас вернёмся к вычислению площадей прямоугольников. Уже многократно отмечалось, что исходным видом фигур, на рассмотрении свойств которых основывается понятие площади, являются прямоугольники с длиной сторон, выражаемой натуральными числами. При кажущейся очевидности того факта, что прямоугольник с шириной  $n$  и высотой  $m$  имеет площадь  $n \cdot m$ , в сфере тифлопедагогики полезно иметь соответствующие осязательные модели.

Обобщение соответствующей формулы на случай, когда длины сторон прямоугольника являются рациональными числами, требует определённых усилий, но может быть безупречно обосновано логически на элементарном уровне. Использование модели осязаемого квадрата  $n \times n$  позволяет с помощью осязания рассмотреть вычисление площадей прямоугольников, имеющих рациональную длину сторон. При этом предполагается, что длина стороны квадрата равна единице, а, значит, эта сторона разбита на отрезки длины  $\frac{1}{n}$ . Здесь, кстати, можно отметить тот факт, что **одна и та же осязаемая модель может интерпретироваться различным образом.**

Конечно, и здесь осязательные модели играют вспомогательную роль, но, в очередной раз повторим, что в тифлопедагогике не следует пренебрегать возможностью чувственной проверки даже самых простых понятий и формул.



Что касается перехода от натуральных длин к дробным – это путь к работе со сколь угодно узкими прямоугольниками, что необходимо при переходе к успешному определению операции интегрирования.

Доказать, что площадь многоугольника с длиной сторон  $\frac{1}{n}$  и  $\frac{1}{m}$  равна  $\frac{1}{nm}$ .

Доказать, что площадь многоугольника с длиной сторон  $\frac{p}{n}$  и  $\frac{q}{m}$  равна  $\frac{pq}{nm}$ .

Важным моментом, связанным с образным восприятием площади, является чёткое понимание характера зависимости площади подобных фигур от

1. Сторона квадрата увеличена в два раза. Как изменится его площадь? Объяснить причины характера соответствующего изменения.
2. Сторона квадрата уменьшена в два раза. Как изменится его площадь?
3. Сторона квадрата увеличена в  $n$  раз ( $n$  – натуральное число). Как изменится его площадь?
4. Сторона квадрата уменьшена в  $n$  раз ( $n$  – натуральное число). Как изменится его площадь?
5. Сторона квадрата изменена в  $\lambda$  раз ( $\lambda$  – рациональное число). Как изменится его площадь? Объяснить причины характера соответствующего изменения.

Следует рассмотреть аналогичные задания, связанные с вычислением объёмов параллелепипедов. В качестве осязательных моделей можно использовать кубики и коробочки, в которые эти кубики можно вкладывать. При этом интерпретация этих моделей и в данном случае может быть различной, что позволяет от натуральных длин перейти к длинам рациональным.

## 6. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ТРАПЕЦИИ И МЕТОД ИСЧЕРПЫВАНИЯ

Перейдём к обсуждению **второго аспекта**, направленного на овладение понятиями, лежащими в основании интегрального исчисления. Это уместно по той причине, что подавляющее большинство формул (за исключением площадей многоугольников и объёмов прямоугольных параллелепипедов и призм) выводятся методами интегрального исчисления. Речь, например, идёт о площади кругов, секторов и сегментов. В случае же объёмов, как показывает третья проблема Гильберта, интегрирование необходимо практически повсеместно.

Поскольку целью рассматриваемых здесь заданий является подготовка к осознанной работе с интегралами, рассматриваемые фигуры и тела имеют такие формы, которые, в конечном счёте, можно интерпретировать как **криволинейные трапеции**. С геометрической точки зрения соответствующие плоские фигуры можно разрезать на сколь угодно узкие полоски, площадь которых можно приближать площадями прямоугольников. Рассматриваемые тела можно разрезать на цилиндрические или призматические «блинчики». Описание соответствующих форм можно дать также в рамках терминологии принципа Кавальери, что и будет в дальнейшем сделано.



В рамках данной тематики ярко проявляется одна из методических проблем, характерных именно для математики. Речь идёт о **компромиссе между строгостью доказательств**, которая может создать значительные сложности при восприятии учащимся того или иного раздела математики, и **опорой на интуицию и образы**, что облегчает освоение предмета, но нарушает логическое совершенство его последовательного построения.

Вывод формулы площади прямоугольника с вещественной длиной сторон в полной мере демонстрирует эту ситуацию. По всей видимости, необходимо разрабатывать методике разного характера, которые в крайних вариантах ориентируются на логику и интуицию. Нужны и методики, которые можно трактовать как промежуточные. В данном разделе мы будем обсуждать именно такую методику, основанную на методе исчерпывания.

Метод исчерпывания мы будем трактовать следующим образом. При вычислении площади фигуры  $F$  строится последовательность вложенных в  $F$  фигур  $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$  площади которых вычислимы и возрастают, а также последовательность объёмлющих  $F$  фигур  $W_1, W_2, \dots, W_n, \dots$  площади которых вычислимы и убывают. При этом разность площадей  $W_n - V_n$  может быть сделана сколь угодно малой. При рассмотрении конкретных ситуаций это позволяет получить формулу, предназначенную для вычисления площади фигуры  $F$ .

В качестве примера рассмотрим вывод формулы площади прямоугольника с вещественной длиной сторон  $\alpha$  и  $\beta$ .

Вещественное число трактуется как десятичная дробь (конечная, бесконечная периодическая или бесконечная непериодическая). Данная дробь может быть получена с помощью процедуры измерения отрезков  $\alpha$  и  $\beta$  с использованием единичного отрезка и его долей длины  $\frac{1}{10^m}$ .

Рассмотрим прямоугольник  $P$  с вещественными сторонами  $\alpha$  и  $\beta$ .

Для любых чисел  $\alpha$  и  $\beta$  могут быть построены последовательности приближений с недостатком и избытком ( $\gamma_m < \alpha < \delta_m, \lambda_m < \beta < \mu_m$ ).

Прямоугольник со сторонами  $\gamma_m$  и  $\delta_m$  может рассматриваться как прямоугольник, вложенный в  $P$ , а прямоугольник со сторонами  $\lambda_m$  и  $\mu_m$  может рассматриваться как прямоугольник, объёмлющий исходный прямоугольник  $P$ .

Площади вложенных ( $\gamma_m \delta_m$ ) и объёмлющих ( $\lambda_m \mu_m$ ) прямоугольников сколь угодно близко к произведению  $\alpha\beta$ .

Таким образом, площадь прямоугольника  $P$  с вещественными сторонами  $\alpha$  и  $\beta$  равна  $\alpha\beta$ .

Можно рассмотреть конкретный пример вычисления площади квадрата со стороной  $\sqrt{2}$ . Уже на примере рассуждений из платоновского диалога «Менон» известно, что эта площадь равна 2, однако вычисления показывают, каков характер постепенного приближения площадей, например вложенных квадратов.

Поскольку  $\sqrt{2} = 1,414213562$ , может быть получена возрастающая последовательность площадей:  $1^2 = 1$ ;  $1,4^2 = 1,96$ ;  $1,41^2 = 1,9881$ ;  $1,412^2 = 1,99996164$ ;  $1,4121^2 = 1,999989924$ ;  $1,41213^2 = 1,999998409$ ;  $1,412135^2 = 1,999999824 \dots$



Необходимость проведения подобных расчётов может быть подвергнута сомнению, поскольку речь идёт о «малонаучном мероприятии», но, видимо, принятие решения об использовании соответствующих вычислений следует предоставить преподавателю. Желательно при этом иметь в виду переформулированные слова Паскаля: «Предмет математики настолько сложен, что нельзя упускать случая сделать его немного более понятным, дополнив абстрактные рассуждения конкретными вычислениями».

Важнейший геометрический объект, связанный с операцией интегрирования – это криволинейная трапеция. Криволинейная трапеция в рамках математического анализа – это плоская фигура, ограниченная сверху графиком функции  $f(x)$ , снизу – осью абсцисс, слева – прямой  $x = a$  и, наконец, справа – прямой  $x = b$ . По поводу использования слова «сверху» поясним, что нацеливаясь на задачи вычисления площадей и объёмов, мы будем рассматривать только функции с неотрицательными значениями.

Приведём и следующую образную трактовку криволинейной трапеции, когда она рассматривается как одна из двух частей прямоугольника, разрезанного особым образом. График функции при этом воспринимается как пластический образ континуума или отрезок, деформируемый в кривую.

Фактически при этом даётся наглядное объяснение причин, по которым график функции является кривой. Само объяснение таково. Представим себе, что на оси абсцисс в декартовой плоскости расположен пластичный, легко деформируемый стержень. Ординаты всех его точек равны нулю. Стержень можно параллельно оси абсцисс переместить вверх на некоторую величину  $c$ . При этом ординаты всех его точек примут одинаковые значения  $c$ , уже неравные нулю. С помощью этой процедуры построен график функции  $y = c$ . Пусть далее нам дана функция  $y = f(x)$ . Теперь мы будем перемещать по вертикали не весь стержень целиком, а каждую его точку  $x$  сдвинем на своё особое расстояние  $y = f(x)$ . При этом стержень деформируется и предстанет в виде кривой.

Теперь попытаемся непосредственно определить криволинейную трапецию как разрезанный прямоугольник. Пусть нижней горизонтальной стороной разрезаемого прямоугольника является отрезок  $[a; b]$ . От некоторой точки прямой  $x = a$  начинаем резать прямоугольник до прямой  $x = b$ .

1. Каким свойством должен обладать характер разреза, чтобы в итоге получилась криволинейная трапеция.

*Ответ.* Если расстояние режущей точки от прямой  $x = a$  в момент времени  $t$  равно  $s = x(t)$ , то это строго возрастающая функция.

2. Доказать, что при любой зависимости  $y = y(t)$ , формулы  $s = x(t)$  и  $y = y(t)$  являются параметрическими уравнениями некоторой функции  $y = f(x)$ .

3. Любая система вертикальных разрезов исходного прямоугольника может послужить основой для вычисления площади криволинейной трапеции методом исчерпывания.

*Ответ.* Для каждой вертикальной полосы криволинейной трапеции может быть построен вложенный и объёмлющий прямоугольник.

Авторы статьи отдают себе отчёт в том, что для ряда преподавателей подобные рассуждения могут представляться не только ненужными, но и неуместными. Однако



они считают, что обсуждение, пусть и простых, математических образов в тифлопедагогике приближает учащегося к пониманию вопроса.

## 7. ПРИНЦИП КАВАЛЬЕРИ

Можно сказать, что криволинейная трапеция – это множество вертикальных отрезков длины  $f(x)$ , исходящих из каждой точки  $x$  горизонтального отрезка  $[a; b]$ . Это означает, что при таком определении легко усмотреть самую тесную связь с геометрическими структурами, рассматриваемыми в принципе Кавальери. К рассмотрению этого принципа мы и переходим.

При этом мы оставим без обсуждения пункты 4–7 исходной для нас программы. Речь идёт о следующих темах «Геометрические образы, изучаемые в аналитической геометрии (кривые и поверхности второго порядка) и математическом анализе (графики функций одной и двух переменных)»; «Понятие определённого интеграла, которое также весьма тесно связано с геометрическими образами»; «Понятие неопределённого интеграла и первообразной и рассмотрение методов интегрирования»; «Формула Ньютона – Лейбница».

Мы не будем останавливаться на этом круге вопросов не по той причине, что здесь не требуется разработки соответствующих заданий с уклоном на тифлопедагогику. Такая работа до сих пор необходима в рамках любой математической темы. Дело в том, что перечисленные выше вопросы носят вполне традиционный характер. Таким образом, здесь хотя бы ясно, о чём говорить. Вопрос только в том, как говорить об этом, чтобы сделать материал максимально доступным для студентов с дефектами зрения.

Использование же принципа Кавальери для современного этапа преподавания интегрального исчисления к числу обязательных тем не относится. В то же время здесь заключены интересные методические возможности. При этом мы будем использовать математические методы, которые следовало бы обсудить в пунктах 4–7.

В книге [12] приводятся сведения о итальянском математике Бонавентуре Кавальери (1598–1647). Будучи монахом, Кавальери активно занимался математикой. Им написаны книги «Геометрия, изложенная новым способом с помощью неделимых непрерывного» и «Шесть геометрических опытов».

В первой книге Кавальери описал общие методы вычисления объёмов тел, которые до него не рассматривались. Основным понятием геометрии Кавальери служат неделимые. Таковыми для плоской фигуры являются параллельные между собой отрезки, на которые разбивается данная фигура. Для тела в трёхмерном пространстве неделимыми являются плоские сечения тела, параллельные между собой.

В легендарном школьном учебнике геометрии А.П. Киселёва (1852–1940) принцип Кавальери формулируется следующим образом: «Объёмы двух тел или площади двух плоских фигур будут равны, когда равны между собой площади или длины всех соответствующих сечений, параллельных одной и той же плоскости или прямой». В терминологии Кавальери плоскость или прямая, задающая направление всех



сечений, называется регулой. Любую прямую, перпендикулярную регуле, назовём осью сравниваемых тел Кавальери (рис. 9).

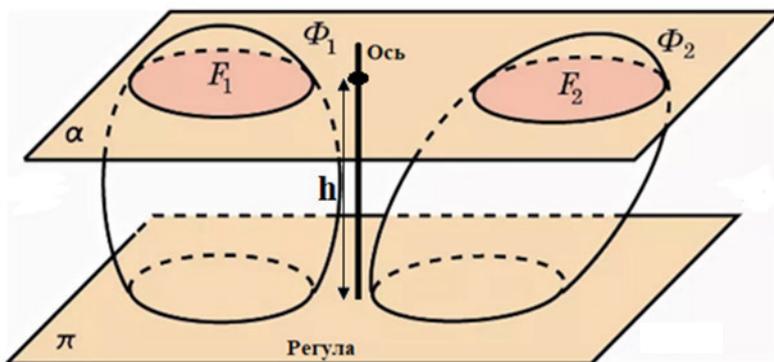


Рис. 9

Фактически при современном понимании сравнения двух площадей или объёмов по методу Кавальери каждой точке  $h$  числовой оси соответствуют функции  $m_1 = m_1(h)$  и  $m_2 = m_2(h)$ , задающая площади или длины «неделимых» (и то и другое можно назвать мерой) на высоте  $h$ .

Использование определённого интеграла позволяет доказать принцип Кавальери независимо от того, вычисляется ли площадь или объём. Итак, функции  $m_1 = m_1(h)$  и  $m_2 = m_2(h)$ , задают площади или длины «неделимых» (и то и другое можно назвать мерой) на высоте  $h$  ( $0 < h < H$ ). Для случая длин произведения вида  $f(x) \cdot dx$  являются площадями, а для случая площадей эти произведения являются объёмами.

Но и в том, и в другом случае  $\int_0^H m_1(h) dh = \int_0^H m_2(h) dh$ , что и доказывает утверждения, которые называются принципом Кавальери.

Важной особенностью принципа Кавальери является то обстоятельство, что общим вычислительным приёмом можно вычислить площади и объёмы различных геометрических объектов, например, объёмы пирамид и конусов. По этой причине связь между формой соответствующих объектов носит не геометрический, а топологический характер. При этом на топологические преобразования наложены ограничения, связанные с сохраняющимися числовыми соотношениями. Речь, естественно, идёт о неизменности меры «неделимых». Таким образом, **рассматривая те или иные плоские фигуры и объёмные тела, можно предварительно с помощью топологических преобразований перейти к некоторым каноническим формам** (как мы упоминали, в духе Леонардо да Винчи).

Как мы уже отмечали, при рассмотрении задач, решаемых с помощью принципа Кавальери, перед студентом в полной мере раскрывается связь, существующая между количественными отношениями и пространственными формами.

Итак, задачи на принцип Кавальери, предлагаемые студентам, должны заставить его одновременно размышлять о геометрических формах, характеризуемых функци-

ональными соотношениями, и о топологических преобразованиях исходных форм в новые формы, подчинённые тем же числовым и функциональным отношениям.

**Что касается вида канонических форм, то для плоских фигур** речь может идти о традиционной форме криволинейной трапеции, описанной ранее. **Для объёмных тел** речь может идти о телах, получаемых вращением графика функции вокруг оси абсцисс. Задачи на вычисление объёмов таких тел входят в курс математического анализа. Применительно к принципу Кавальери тело вращения образуется вращением вокруг соответствующей оси. «Неделимые» при этом являются кругами с соответствующими площадями. Так, например, усечённые пирамиды при таких преобразованиях должны переходить в усечённые конусы, а призмы – в цилиндры. Будем называть подобные тела **функциональными телами вращения (ФТВ)**. Слово «функциональные» указывает на неизменную функциональную зависимость площадей неделимых от координат точек оси.

На образном уровне можно уподобить преобразование объёмных геометрических структур Кавальери, характеризуемых осью и регулой, манипуляциями с пластилиновыми объектами. Прежде всего, речь идёт об упомянутом переходе от произвольных форм к телам вращения.

Ещё одним из видов задач, основанных на работе с каноническими формами, являются задания, связанные с делением плоских фигур и объёмных тел на части. Деление должно быть выполнено таким образом, чтобы полученные в результате составляющие исходного геометрического объекта имели заданные соотношения мер (площадей или объёмов).

**Деление может производиться как вдоль оси канонического тела Кавальери (назовём такое деление продольным), так и параллельно регуле этого тела (назовём такое деление поперечным).** Простейшим, фактически тривиальным, является поперечное деление цилиндра на  $n$  равных по объёму частей. В результате возникнет несколько цилиндров того же сечения, что и исходный цилиндр, а высоты которых равны высоте исходного цилиндра, делёной на  $n$ . Несмотря на простоту данной операции, она хорошо объясняет смысл более сложных задач на ту же тему, особенно студентам с дефектами зрения.

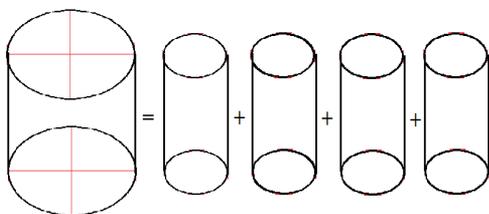


Рис. 10

Продольное деление цилиндра на равные по объёму части несколько сложнее. Дело в том, что, образно говоря, нужно не только расколоть чурбан на поленья равного объёма, но и затем преобразовать каждое полено в новый цилиндр, площадь сечения которого равна  $\frac{1}{n}$  сечения исходного

цилиндра. Символически деление продольное деление цилиндра можно изобразить в виде своеобразного геометрического равенства (рис. 10). Все эти тела можно назвать цилиндро- или призмopodobными.



Среди функциональных тел вращения выделим **веретёнообразные тела** или просто веретёна. Их специфика состоит в том, что на одном из концов оси ФТВ площадь сечения равна нулю. Примерами веретёнообразных ФТВ являются конус и шар. Для плоских фигур аналоги веретёнообразных тел можно назвать **криволинейными треугольниками**.

Если все неделимые ФТВ имеют площадь строго большую нуля, то из данного ФТВ можно вырезать цилиндр, такой что останется либо веретёнообразное тело, либо два веретёнообразных тела с остриями внутри оси. Примером такого разбиения ФТВ является продольное разбиение усечённого конуса на цилиндр и веретёнообразное тело (рис. 11).

Далее мы рассмотрим три блока задач, связанных с принципом Кавальери. Речь идёт о непосредственном вычислении площадей и объёмов с помощью операции интегрирования. При этом объём одного и того же тела можно вычислять различными способами в зависимости от выбора оси и регулы. Ещё два блока задач будут связаны с поперечным и продольным делением геометрических объектов.

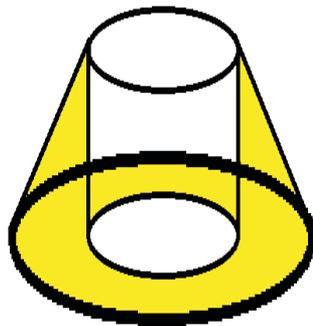


Рис. 11

## 8. ОБ ЭФФЕКТИВНОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СИМВОЛИКИ ЛЕЙБНИЦА, СВЯЗАННОЙ С ОПРЕДЕЛЁННЫМ ИНТЕГРАЛОМ

Решение задач, в которых требуется находить площади и объёмы, требует свободного владения операцией интегрирования. Чрезвычайно удачная символика Лейбница помогает студенту успешно освоить круг соответствующих вопросов. Перечислим несколько базовых положений, связанных с использованием интегрального исчисления.

1. Площадь криволинейной трапеции равна пределу суммы площадей  $f(x)\Delta x$  полосок ширины  $\Delta x$  при  $\Delta x$  стремящемся к нулю.
2. Предел суммы величин  $f(x)\Delta x$  на отрезке  $[a; b]$  при  $\Delta x$  стремящемся к нулю называется определённым интегралом и согласно обозначениям Лейбница обозначается через  $\int_a^b f(x) dx$ . Смысл этого обозначения прост: знак  $\int$  – стилизованная буква S, символизирующая сумму. Буквы  $a$  и  $b$  указывают отрезок, на котором задана величина  $f(x)$ . Они называются пределами интегрирования. Произведение  $f(x) \cdot dx$  выражает бесконечно малые суммируемые порции вычисляемой величины – длины, площади, объёма и т.д.
3. Первообразной функции  $f(x)$  называется такая функция  $F(x)$ , для которой производная  $F'(x)$  равна исходной функции  $f(x)$ . Первообразная имеет ещё одно название – неопределённый интеграл и обозначается через  $\int f(x) dx$ .

4. Первообразной функции  $f(x)$  является определённый интеграл  $\int_a^{\delta} f(\xi) d\xi$  с переменным верхним пределом интегрирования (то есть площадь криволинейной трапеции на отрезке  $[a; x]$ ).
5. Если известна хотя бы одна первообразная  $F_1(x)$  функции  $f(x)$ , то любая другая её первообразная  $F_2(x)$  отличается от  $F_1(x)$  на постоянную величину, то есть  $F_2(x) - F_1(x) = C$ .
6. Если  $F(x)$  является первообразной функции  $f(x)$ , верна формула Ньютона – Лейбница:  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .

Итак, интуитивно интеграл является пределом суммы бесконечно малых величин  $f(x)dx$ . При этом его можно использовать для вычисления не только площадей, но и других геометрических величин.  $\int_a^b f(x)dx$ .

Отметим, что величина  $f(x)$  в ряде задач может быть непосредственно задана аналитически, но при решении задач, имеющих чисто геометрическую постановку, необходимо получить соответствующее выражение для величины  $f(x)$  самостоятельно.

Для решения задач, состоящих в вычислении некоторой величины, с помощью определённого интеграла нужно представить эту величину, как сумму произведений вида  $f(x) \cdot dx$ .

*Пример.* Вычислить объём прямого кругового конуса с высотой  $H$  и радиусом основания  $R$ .

*Решение.* Конус можно разбить на бесконечно тонкие блинчики, которые можно рассматривать как цилиндры радиуса  $r$ , находящиеся на расстоянии  $h$  от вершины конуса. Из подобия треугольников получаем,

что  $r = h \cdot \frac{R}{H}$  (рис. 12). Тогда объём блинчика равен  $\pi r^2 dh = \pi h^2 \frac{R^2}{H^2} dh$ .

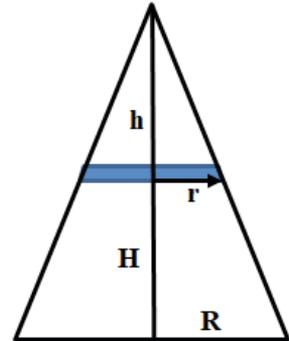


Рис. 12

Весь объём конуса есть сумма блинчиков по всей высоте, то есть от 0 до  $H$ . Итак,

$$V_{\text{конуса}} = \int_0^H \pi h^2 \frac{R^2}{H^2} dh = \pi \frac{R^2}{H^2} \cdot \frac{h^3}{3} \Big|_0^H = \pi \frac{R^2}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3} = \pi R^2 \cdot \frac{H}{3}.$$

Основываясь на принципе Кавальери, можно сделать следующий вывод: полученная формула верна и для наклонного кругового конуса.

На основе подобных соображений, сутью которых является зависимость величины  $r$  от  $h$  можно получить целый ряд формул для вычисления площадей и объёмов. При этом величина  $r$  может интерпретироваться различным образом.

Если считать, что рисунок 12 изображает равнобедренный треугольник с высотой  $H$  и основанием  $a = 2R$ , то площадь треугольника можно вычислить по формуле



$$S_{\text{triangle}} = \int_0^H 2rdh = \int_0^H 2h \frac{R}{H} dh = \int_0^H 2h \frac{a}{2H} dh = \frac{a}{H} \cdot \frac{H^2}{2} = \frac{aH}{2}.$$

Основываясь на принципе Кавальери, можно сделать вывод, что полученная формула верна и для любых треугольников, а не только для равнобедренных.

Вычислив объём прямого кругового конуса, можно аналогичным образом вычислять также и объёмы любых конусов. При этом конусом мы будем называть следующую геометрическую конструкцию. Пусть в трёхмерном пространстве заданы плоская область  $F$  (основание конуса) и точка  $V$  вне этой плоскости (вершина конуса). Конусом называется выпуклая оболочка плоской области  $F$  и точки  $V$ . В частности в случае, когда область  $F$  является многоугольником, конус представляет собой пирамиду. Расстояние от вершины конуса до плоскости основания называется высотой конуса.

1. Вычислить объём конуса в случае, когда площадь основания равна  $S$ , а высота конуса равна  $H$ .

*Решение.* Если высоту конуса рассматривать как ось конструкции Кавальери, а основание как регулу, то конус состоит из гомотетичных неделимых, площадь которых зависит от высоты сечения по формуле  $s = \frac{h^2}{H^2} S$ . Объём конуса равен  $\int_0^H \frac{h^2}{H^2} S dh = \frac{H \cdot S}{3}$ .

Рассмотренные задания показывают, что главной задачей при вычислении площадей и объёмов является определение функциональной зависимости между высотой и мерой неделимых, которая позволяет записать соответствующий интеграл, а затем и вычислить его. В ряде случаев эта функциональная зависимость дана непосредственно.

2. На отрезке  $[a; b]$  задана функция  $y = f(x)$ . Определить объём тела вращения, заштрихованного соответствующей криволинейной трапецией при вращении вокруг отрезка  $[a; b]$ .

*Решение.* Данная задача включается в набор обязательных заданий в рамках изучения интегрального исчисления. Она проста, но связана с достаточно эффектной геометрической конструкцией:  $V_{\text{тел}_v r} = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ .

3. Тело Кавальери, площади неделимых которого выражаются через значения их высот функциями  $S = S(h)$  преобразовано в функциональное тело вращения. Каков вид функции  $y = f(x)$ ?

*Ответ.* Функция задаётся формулой  $y = \sqrt{\frac{S(h)}{\pi}}$ .

В более сложных случаях можно использовать выражение используемых в задаче геометрических величин через параметр.

4. Выразить значение некоторой величины  $P$  через значения параметра  $t$  так, чтобы зависимость была линейной, а при  $t = 0$  значение  $P(0) = P_0$  и при  $t = 1$  значение  $P(1) = P_1$ .

*Решение.* Условия задачи позволяют определить параметры соответствующей линейной зависимости:  $P(t) = P_0 + (P_1 - P_0) \cdot t$ .

5. Рассмотрим конструкцию Кавальери с высотой  $H$  и мерой неделимых  $m(h)$ . Пусть высота неделимых  $h$  выражена как функция от параметра  $t$  ( $0 \leq h \leq 1$ ).

С учётом этого представления величин через параметр выразить меру конструкции Кавальери  $\int_0^H m(h) dh$ .

*Решение.* При изменении параметра  $t$  на величину  $dt$ , главная линейная часть соответствующего изменения функции  $h(t)$  равна  $h'(t)dt$ . Таким образом, искомая мера выражается с помощью интеграла  $\int_0^1 m(h(t))h'(t) dt$ .

Фактически выведена формула замены переменных:  $\int_0^H m(h) dh = \int_0^1 m(h(t))h'(t) dt$ .

И на этом этапе, когда уже используются методы интегрирования, желательно сочетать задания разного характера, а именно, те, где непосредственно используются уже выведенные формулы с теми, где результат достигается с помощью интегрирования.

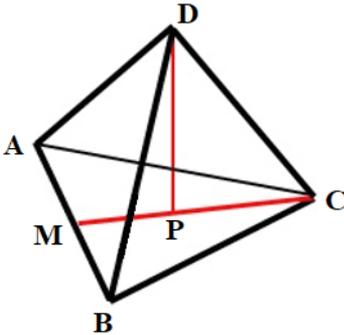


Рис. 13

- Вычислить основные линейные параметры правильного тетраэдра, длина стороны которого равна  $a$ . Речь идёт о величинах, которые позволяют определить объём тетраэдра.

*Решение.* Используя рис. 13, легко провести все вычисления. Весьма полезна была бы соответствующая рисунку 13 стержневая осязательная модель. Перейдём к расчётам.

$$AM = \frac{a}{2}, \quad MC = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}, \quad PC = \frac{2}{3}MC = \frac{\sqrt{3}a}{3}, \quad DP = \sqrt{a^2 - PC^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}a.$$

- Найти объём правильного тетраэдра, длина стороны которого равна  $a$ .

*Решение.* Используя результаты предыдущей задачи и формулу объёма пирамиды, получаем:

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot DP = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}a = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$

Перейдём ко второму варианту вычисления объёма правильного тетраэдра.

- В отношении правильного тетраэдра рассмотрим конструкцию Кавальери (рис. 14), осью которой является отрезок  $MN$ , соединяющий середины противоположных рёбер. Вычислить длину этой оси.

*Решение.* Проведём расчёты, ориентируясь на рис. 14. И здесь была бы полезна соответствующая рисунку 14 стержневая осязательная модель.

$$MD = \frac{\sqrt{3}a}{2}, \quad MN = \sqrt{MD^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}a}{2}.$$

- Найти объём правильного тетраэдра, рассматривая конструкцию Кавальери из предыдущего задания (рис. 15).

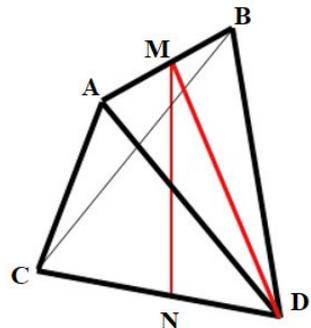


Рис. 14



*Решение.* Рассмотрим следующую динамическую модель. Сечение тетраэдра движется за время  $t$  (от 0 до 1) по всей высоте конструкции. Пусть  $NH = h = t \cdot \frac{\sqrt{2}a}{2}$ .

Тогда длина одной из сторон прямоугольного сечения, параллельной ребру  $AB$ , линейно зависит от  $t$  и имеет длину  $t \cdot a$ . Длина перпендикулярной стороны прямоугольного сечения, параллельной ребру  $CD$ , линейно зависит от  $1 - t$  и имеет длину  $(1-t) \cdot a$ .

По формуле из задачи 5 (замена переменной) получаем:

$$V_{\text{тетр}} = \frac{\sqrt{2}a^3}{2} \int_0^1 t(1-t) dt = \frac{\sqrt{2}a^3}{2} \left( \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3.$$

Без решения приведём сходные по характеру задачи. Напомним при этом, что цель решения соответствующих заданий состоит не только в освоении вычислительной техники, связанной с интегрированием, но и в развитии пространственного воображения студентов и их геометрической интуиции.

10. Вычислить объём антипризмы по схеме, которая была использована в задаче 9.
11. Найти объём октаэдра, рассматривая его как комбинацию двух четырёхугольных пирамид.
12. Найти объём октаэдра, рассматривая его как антипризму (рис. 4).
13. Найти объём куба, рассматривая его как комбинацию двух треугольных пирамид и антипризмы (рис. 3).

Теперь рассмотрим задачи иного характера, связанные с формулами вычисления площади равнобедренных прямоугольных треугольников, с объёмом четырёхугольных пирамид и интерпретацией площади некоторых криволинейных трапеций.

1. Существует пирамиды специального вида, объёмы которых определяются без интегрирования. Речь идёт о равных четырёхугольных пирамидах, на которые можно разбить куб. Описать характер этого разбиения.

*Решение.* Рассмотрим разбиение куба со стороной  $a$  на шесть четырёхугольных пирамид. Их основаниями являются грани куба, а вершиной – центр куба. Объём каждой из полученных пирамид равен одной шестой объёма куба.

*Определение.* Пусть в пространстве выбрана некоторая плоскость  $L$  и число  $\lambda > 0$ . Введём следующее преобразование, которое называется сжатием / растяжением к плоскости  $L$ .

Рассмотрим в пространстве точку  $M$ . Пусть точка  $N$  – основание перпендикуляра  $MN$ , опущенного на плоскость  $L$ . При сжатии / растяжении точка  $M$  переходит в точку  $M_1$  такую, что  $M$  и  $M_1$  лежат в одном полупространстве относительно  $L$  и длина отрезка  $M_1N$  равна длине отрезка  $MN$ , умноженной на  $\lambda$ .

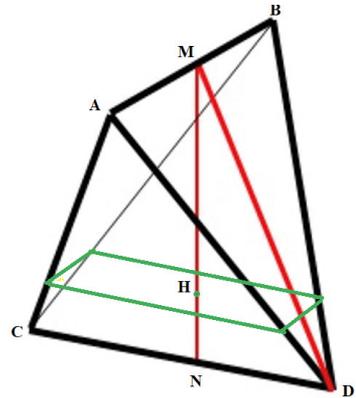


Рис. 15

При  $\lambda > 1$  речь идёт о растяжении, а при  $\lambda < 1$  речь идёт о сжатии.

Кратко говоря, при сжатии / растяжении все расстояния на прямых, перпендикулярных плоскости  $L$  умножаются на  $\lambda$ .

2. Дать определение сжатия / растяжения к прямой на плоскости.
3. Пирамида из задания 1 подвергнута растяжению в два раза от плоскости основания. Определить объём полученной пирамиды.

*Решение.* Исходная пирамида имеет высоту  $\frac{a}{2}$ . После растяжения пирамиды высота увеличится в два раза. Толщина блинчиков, составляющих пирамиду, также увеличивается в два раза. Таким образом, речь идёт об объёме четырёхугольной пирамиды высотой  $a$  с площадью основания  $a^2$ . Объём итоговой пирамиды равен  $\frac{a^3}{3}$ .

Практически результат получен без использования операции интегрирования. Тем самым намечен подход для пропедевтики операции интегрирования по отношению к линейным и квадратичным функциям с образной опорой на формулы вычисления площадей и объёмов.

Площадь криволинейной трапеции (треугольника) под графиком линейной функции может отныне интерпретироваться как интеграл  $\int_0^x h \cdot dh = \frac{x^2}{2}$ .

Площадь криволинейной трапеции под графиком параболы (рис. 16) может рассматриваться как объём четырёхугольной пирамиды и также интерпретироваться как интеграл  $\int_0^x h^2 \cdot dh = \frac{x^3}{3}$ .

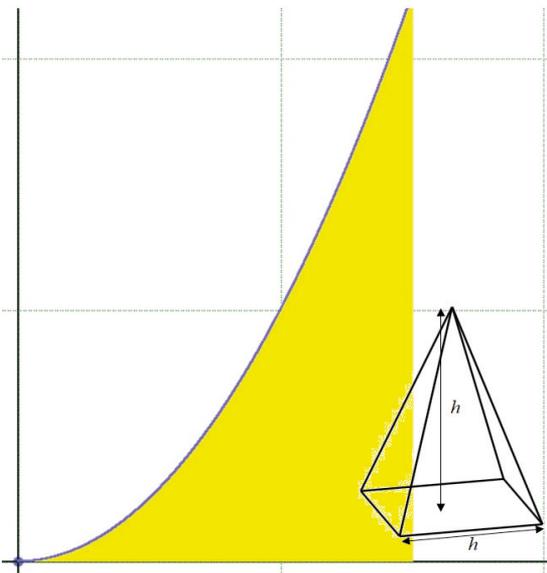


Рис. 16

Можно рассмотреть разбиение куба на шесть равных пирамид для достижения ещё одной цели. Речь идёт о выводе формулы объёма усечённой пирамиды с помощью разности кубов. Данная тема рассматривалась в статье Н.Я. Виленкина «О вычисления объёма усечённой пирамиды в Древнем Египте» [13].

Данная тема имеет не только историко-математический интерес, но и интерес методический, поскольку позволяет студенту хорошо разобраться в структуре довольно сложной формулы.

Сначала рассмотрим близкую по характеру, но более про-



стую поясняющую модель. Из большого квадрата со стороной  $a$  вырежем малый квадрат со стороной  $b$  (рис. 17) и разобьём оставшуюся фигуру на четыре трапеции. Их общая площадь равна

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 4 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a-b}{2}.$$

Заметив, что выражение  $\frac{a-b}{2}$  соответствует высоте трапеции, можно считать, что формула площади трапеции может быть получена с помощью формулы «разность квадратов».

Теперь рассмотрим аналогичную конструкцию для кубов (рис. 18). Из большого куба вырезан малый. Оставшаяся часть конструкции разбита на шесть равных усечённых пирамид. Их общий объём равен

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = 6 \cdot \frac{a-b}{2} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

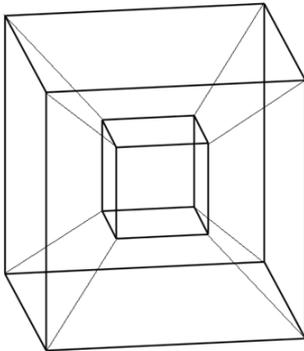


Рис. 18

Заметив, что выражение  $\frac{a-b}{2}$  соответствует высоте усечённой пирамиды, получаем формулу вычисления объёма усечённой пирамиды: «Объём усечённой пирамиды равен одной трети произведения высоты пирамиды на сумму площадей верхнего и нижнего оснований и среднего геометрического из произведения оснований усечённой пирамиды».

Формула разности кубов хорошо объясняет причины появления такого необычного слагаемого как среднее геометрическое из произведения оснований усечённой пирамиды. Кроме того, она же помогает запомнить соответствующую формулу, опираясь на знание фактов алгебраического характера. Наконец, принцип

Кавальери позволяет перенести эту формулу на общий случай усечённого конуса.

Продemonстрируем вывод этой формулы с помощью методов интегрального исчисления. В основу этого вывода положим формулу линейной зависимости радиуса усечённого конуса от высоты сечения  $h$ :  $r = r_0 + \frac{h}{H}(r_1 - r_0)$ .

$$V = \pi \int_0^H r^2 dh = \pi \int_0^H r_0^2 dh + 2\pi \int_0^H \frac{r_0(r_1 - r_0)}{H} h dh + \pi \int_0^H \frac{(r_1 - r_0)^2}{H^2} h^2 dh =$$

$$\pi \left( Hr_0^2 + \frac{r_0(r_1 - r_0)}{H} H^2 + \frac{(r_1 - r_0)^2}{H^2} H^3 \right) = \frac{\pi H}{3} (r_0^2 + r_0 r_1 + r_1^2).$$

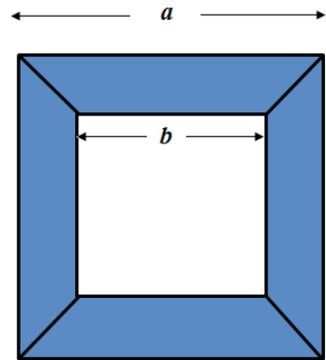


Рис. 17



В итоге получен тот же самый результат, но относительная сложность вывода затемняет причины, по которым получена именно такая формула.

## 9. ПЛОЩАДИ И ОБЪЁМЫ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТЕЛ

Выше уже рассматривались вопросы, связанные с вычислением площадей и объёмов подобных тел. Тем не менее, желательно обратиться к той же тематике более систематическим образом. В частности это вызвано тем, что в дальнейшем будут рассматриваться упомянутые ранее функциональные тела вращения.

Кроме того, определение площадей и объёмов криволинейных фигур предоставляет весьма широкие возможности рассмотрения вычислений самого разного уровня сложности. Несомненно, проведение таких вычислений должно помочь в развитии геометрической интуиции студента. Начнём с подхода, который был характерен для древней индусской математики времён Бхаскары (рис. 19), и вычислим площадь круга, разбитого на бесконечно узкие треугольные сектора с основаниями  $dl$  и высотой  $R$ .

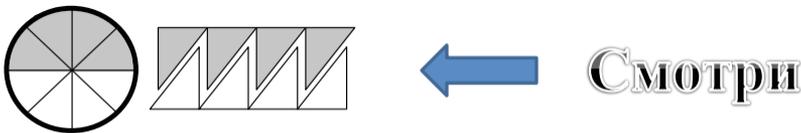


Рис. 19.

$$\text{Вычисление таково: } \int_0^{2\pi R} \frac{R}{2} dl = \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} dl = \frac{2\pi R^2}{2} = \pi R^2.$$

Разбиение полукруга на узкие трапеции приводит к тому же результату, но в результате значительно более сложных вычислений с заменой переменной (рис.20).

$$2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - h^2} dh = 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha d\alpha = R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\alpha d\alpha + R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha = \pi R^2$$

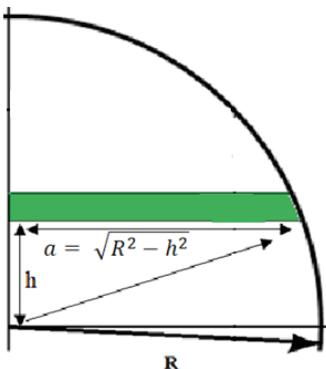


Рис. 20

При этом тригонометрическая замена переменных приводит хотя бы к частичной потере наглядности. Разбиение площади круга на узкие трапеции наглядно объясняет способ получения площади круга, но причины, по которым  $2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha d\alpha$  равен площади круга, не являются очевидными. Для прояснения ситуации следует обратиться к рассмотрению уравнения окружности в полярных координатах (рис. 21) и связанному с ним разбиению круга на треугольники с углами при вершине  $d\alpha$  и боковыми



сторонами длины  $2R \cos \alpha$ . Площадь такого треугольника равна  $2R^2 \cos^2 \alpha d\alpha$ , что объясняет ситуацию.

Желательно обратить внимание студентов на тот

факт, что с вычислением интеграла  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha d\alpha$  свя-

зано получение объёма тела вращения, образованного аркой косинусоиды, своеобразного «лимона» (рис. 22). Возможно, проявление внимания к таким «частным» совпадениям не в духе современной математики, нацеленной на максимальную степень обобщений. Однако, по крайней мере, следует различать педагогические цели от целей иного характера.

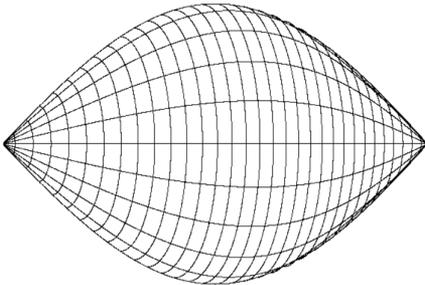


Рис. 22

Это особенно важно по той причине, что до сих пор далёк от решения вопрос о соотношении искусственного интеллекта и интеллекта естественного, присущего человеку с древнейших времён. Сколь угодно сложный аналог машины Тьюринга, лишён эмоциональной составляющей. Он даже обманывать людей в духе теста Тьюринга будет совершенно бесстрастно. В то же время психика человека вырастает из тонких ощущений и нюансов, о которых В.Я. Брюсов однажды сказал: «Есть тонкие властительные связи меж контуром и запахом цветка».

Можно вспомнить, что весьма немолодой Томас Гоббс, впервые познакомившись с теоремой Пифагора, воскликнул: «Этого не может быть!» Такое удивление является мощным стимулом, заставляющим увлечься предметом. Кроме того, вопреки мнению некоторых маститых математиков, здесь можно почувствовать непреходящую культурную важность математических фактов, которые известны тысячелетиями. Так или иначе, педагог должен максимально использовать аналогии и связи между различными фактами. Это может повысить интерес к изучению математики.

После рассмотрения вопросов, связанных с вычислением площади окружности следует рассмотреть задания, связанные с определением площадей секторов и сегментов. Здесь же естественным образом возникает круг вопросов, относящихся к нахождению площади боковых поверхностей конусов, в частности, усечённых.

Следует выделить и ещё одну дополнительную тему. Речь идёт о луночках Гиппократа (рис. 23). По всей видимости,

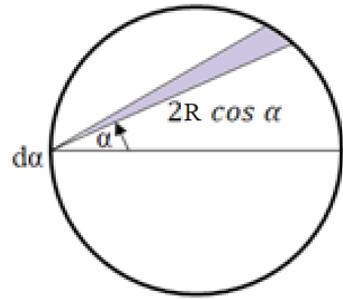


Рис. 21

Это особенно важно по той причине, что до сих пор далёк от решения вопрос о соотношении искусственного интеллекта и интеллекта естественного, присущего человеку с древнейших времён. Сколь угодно сложный аналог машины Тьюринга, лишён эмоциональной составляющей. Он даже обманывать людей в духе теста Тьюринга будет совершенно бесстрастно. В то же время психика человека вырастает из тонких ощущений и нюансов, о которых В.Я. Брюсов однажды сказал: «Есть тонкие властительные связи меж контуром и запахом цветка».

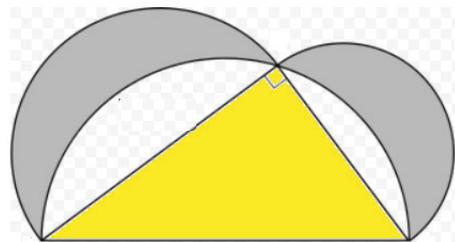


Рис. 23



использование соответствующих задач особенно уместно в рамках тифлопедагогики, поскольку в них соединяются наглядность и логическая стройность рассуждений, связанных с равенством площадей.

Переходя к вопросам вычисления объёмов, отметим, что вычисление объёма шара может быть обосновано тем же чертежом (рис. 20), который используется при вычислении площади круга. При этом сам процесс вычисления объёма шара оказывается более простым, чем процесс вычисления площади круга.

$$V_{ball} = \pi \int_{-R}^R (R^2 - h^2) dh = 2\pi R^3 - \frac{2R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Рассмотрев разбиение шара на бесконечно тонкие конусы с высотой  $R$  и основаниями площади  $dS_{ball}$ , покрывающими в совокупности поверхность шара, можно вычислить объём шара в духе Бхаскары:  $V_{ball} = \int_0^S \frac{R}{3} dS = \frac{R}{3} S$ . Это позволяет вычислить поверхность шара:  $S = 4\pi R^2$ .

Использование сжатия к прямой в двумерном случае и сжатия к плоскости в пространстве позволяет получить формулы для вычисления площадей эллипсов и объёмов эллипсоидов. Естественным продолжением этого круга вопросов могут стать системы заданий, связанные с вычислением площадей и объёмов фигур и тел, возникающих при рассмотрении кривых и поверхностей второго порядка. Подобные задачи во многом имеют стандартный характер. По этой причине мы ограничиваемся только упоминанием о них.

В книге [14] рассматривается задача о нахождении объёма цилиндрического отрезка (рис. 24). Особенно интересно то, что соответствующие вычисления производятся в двух вариантах, что в полной мере соответствует целям развития пространственного воображения студентов.

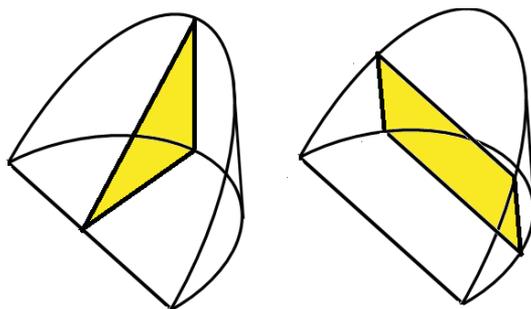


Рис. 24

Наконец, отметим ещё одну интересную линию получения объёмов и поверхностей, которая может быть рассмотрена при изучении более продвинутых методов вычисления. Речь идёт об использовании понятия центра тяжести. Отправляясь от дискретной системы материальных точек, для каждой из которых известна её масса и её координаты, с помощью использования интегралов можно перейти к вычислению координат центров тяжести кривых и поверхностей. В итоге можно получить



первую и вторую теоремы Паппа – Гюльдена, которая, в частности, позволяет получить формулы вычисления поверхности и объёма тора. Подробное изложение темы дано в книге [15].

## 10. ПОПЕРЕЧНОЕ ДЕЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ И ОБЪЁМОВ В СИСТЕМЕ КАВАЛЬЕРИ

Рассмотрим задания указанного вида различного уровня сложности. Как всегда будем отмечать темы, изучение которые может стать новым направлением изучения математических вопросов.

1. Разделить треугольник линией, параллельной основанию, на равные по площади части. Элементарное решение и решение с помощью интеграла.

*Элементарное решение.* Пусть в треугольнике  $ABC$  с высотой  $AH$  проведена линия  $MN$ , параллельная основанию  $BC$ . Таким образом, треугольник  $ABC$  разделен на две части, а именно на треугольник  $AMN$  с высотой  $AP$  и трапецию  $MNCB$ . Предположим, что эти части имеют равные площади. Из этого следует, что треугольник  $ABC$  имеет площадь в два раза больше, чем треугольник  $AMN$ . Поскольку треугольники  $ABC$  и  $AMN$  подобны, верна пропорция  $AP : AH = MN : BC = \lambda$ . Поскольку площадь треугольника  $ABC$  равна произведению  $AH$  на  $BC$ , а площадь треугольника  $AMN$  равна произведению  $AP$  на  $MN$ , получается, что отношение этих площадей с одной стороны равно одной второй, а с другой стороны оно равно  $\lambda^2$ . Таким образом,  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Этот результат можно истолковать так. Чтобы получить из исходного треугольника подобный ему с площадью в два раза больше, нужно увеличить высоту в  $\sqrt{2}$  раз.

2. Разделить треугольник линиями, параллельными основанию, на несколько равных по площади частей.

*Решение.* Аналогичным образом получаем, что для получения из исходного треугольника подобный ему с площадью в  $n$  раз больше, нужно увеличить высоту в  $\sqrt{n}$  раз. Из этого следует, что параллельные линии, удалённые от вершины угла на расстояния  $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n}$  отсекают от угла равные по площади трапеции.

3. Вывести с полным геометрическим обоснованием формулу функциональной зависимости длины линии, параллельной основанию трапеции, от высоты этой линии.

*Решение.* Пусть в трапеции  $ABCD$  с высотой  $1$  проведена линия  $MN$ , параллельная основанию  $CD$  на расстоянии  $h$  от основания  $AB$ . Кроме того, пусть  $AB = a$  и  $CD = b$  (рис. 25).

Тогда длина  $l$  отрезка  $MN$  линейно зависит от  $h$  и меняется от значения  $a$  до значения  $b$ . Формула, выражающая эту зависимость, имеет вид

$$l = a + h \cdot (b - a).$$

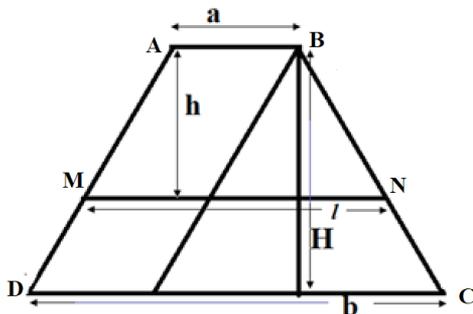


Рис. 25



Если же высота трапеции ABCD равна  $H$ , то формула приобретает вид

$$l = a + \frac{h}{H} \cdot (b - a).$$

4. Разделить трапецию линией, параллельной основанию, на равные по площади части.

*Решение.* Используя предыдущий результат, запишем площади трапеций ABNM и ABCD.

$$S_{ABNM} = h \cdot \frac{a+l}{2} = \frac{h \cdot a}{2} + \frac{h \cdot a}{2} + \frac{h^2}{2H} \cdot (b-a) = h \cdot a + \frac{h^2}{2H} \cdot (b-a),$$

$$S_{ABCD} = H \cdot \frac{a+b}{2}$$

Поскольку первая из площадей в два раза меньше второй, получаем равенство

$$h \cdot a + \frac{h^2}{2H} \cdot (b-a) = H \cdot \frac{a+b}{4},$$

которое переходит в квадратное уравнение

$$\frac{h^2}{2H} \cdot (b-a) + h \cdot a - H \cdot \frac{a+b}{4} = 0.$$

Дискриминант данного уравнения равен  $\frac{a^2 + b^2}{2}$ , а положительное значение высоты  $h$  вычисляется по формуле

$$h = H \cdot \frac{-a \pm \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}}{b-a}$$

Длина отрезка MN выражается по формуле

$$l = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Достаточно простая проверка показывает, что задача решена верно. Отметим также, что здесь можно найти, пусть и отдалённое, сходство с задачей, рассмотренной в диалоге «Менон».

5. Разделить трапецию линиями, параллельными основанию, на несколько равных по площади частей.

*Решение.* Используя аналогичные расчёты, приводящие к квадратному уравнению, можно разделить трапецию на две части, имеющие заданное отношение площадей. Это открывает путь к решению задачи 5. Например, при делении трапеции на три части линиями, параллельными основаниям, сначала следует разделить трапецию на части с отношением площадей 2:1 или 1:2. Затем большую из полученных частей нужно разделить на две равные части.

Тесно с данными задачами связана ещё одна задача: пристроить к нижней части трапеции расширяющую её часть той же площади. При этом заданы величины  $a$  и  $l$ , и нужно найти величину  $b$ .

6. Построить трапецию, поперечное деление которой на равные площади можно описать с помощью рациональных параметров.



*Решение.* При рассмотрении данной задачи следует использовать простейшие методы решения диофантовых уравнений [16]. Эта тематика, несомненно, может рассматриваться, как одно из новых направлений работы заинтересованного студента.

Формула  $l = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$  требует нахождения таких рациональных параметров  $a$  и  $b$ , для которых величина  $l$  также является рациональным. Таким образом, речь идёт о решении диофантова уравнения  $a^2 + b^2 = 2l^2$ . Данное уравнение имеет решение  $a = 1, b = 1, l = 1$ . Можно перейти к более простому уравнению  $x^2 + y^2 = 2$ , где  $x = \frac{a}{l}, y = \frac{b}{l}$ .

На кривой  $x^2 + y^2 = 2$  лежит точка  $(1; 1)$ . Проведём через эту точку прямую с рациональным тангенсом угла наклона  $k$ . Уравнение этой прямой имеет вид  $y = k(x - 1) + 1$ . Найдём координаты второй точки пересечения этой прямой с окружностью  $x^2 + y^2 = 2$ . Исключив переменную  $y$  из этих двух уравнений и используя, что квадратное уравнение уже имеет корень, равный единице, получим, что

$$x = \frac{k^2 - 2k - 1}{k^2 + 1}, y = k \cdot \left( \frac{k^2 - 2k - 1}{k^2 + 1} - 1 \right) + 1.$$

Положив, например,  $k = -3$ , получим  $x = 1,4$  и  $y = -0,2$ . Умножив величины на 10 и перейдя к положительному значению величины  $y$ , получим конкретный пример соответствующей трапеции (рис. 26). Этот пример позволяет построить осязаемую модель, позволяющую ощутить основные моменты, связанные с соответствующей задачей.

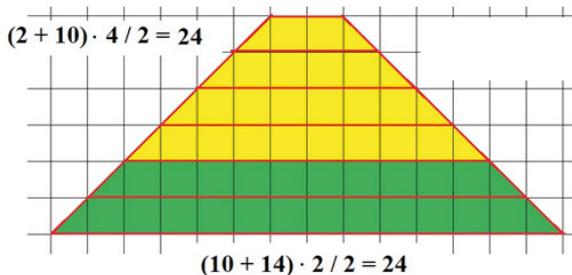


Рис. 26

7. Разделить конус плоскостью, параллельной основанию, на равные по объёму части.

*Решение.* По аналогии с первой задачей данного блока можно установить, что объём конуса растёт как куб какого-либо из линейных размеров, например высоты конуса. Таким образом, для увеличения объёма конуса в два раза его высоту следует увеличить в  $\sqrt[3]{2}$ . Исходя из этих соображений, можно провести и деление конуса на две равные по объёму части.

8. Разделить конус плоскостями, параллельными основанию, на несколько равных по объёму частей.

*Решение.* Высоты конусов с объёмами 1, 2, 3, ... образуют последовательность длин, относящихся друг к другу как  $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \dots$



9. Разделить усечённую четырёхгранную пирамиду плоскостью, параллельной основанию, на две равные по объёму части.

*Решение.* Рассмотрим рис. 25, несколько иначе интерпретируя его, а именно, считая, что на чертеже изображена усечённая пирамида в вертикальном разрезе. Используя те же самые обозначения, которые приведены на рис. 25, можно провести достаточно простые вычисления.

Поскольку  $\frac{h}{H} = \frac{l-a}{b-a}$ , уравнение, определяющее деление усечённой пирамиды пополам, то есть  $H \cdot (a^2 + ab + b^2) = 2h \cdot (a^2 + al + l^2)$  можно заменить на уравнение  $(b-a) \cdot (a^2 + ab + b^2) = 2 \cdot (l-a) \cdot (a^2 + al + l^2)$ . В итоге получаем уравнение  $l^3 = \frac{a^3 + b^3}{2}$ . Здесь просматривается аналогия с задачей удвоения кубического жертвенника в Дельфах. К сожалению, рациональных решений, кроме случая  $a = l = b$ , у этого диофантова уравнения нет [17].

Рассмотрим теперь задачи поперечного деления структур Кавальери, при решении которых как инструмент будут использоваться кубические уравнения. Этот круг заданий открывает путь к изучению алгебры многочленов. Возникающие при этом задания обычно приводят к кубическим уравнениям, у которых заданы конкретные числовые значения коэффициентов.

10. Вывести кубическое уравнение, предназначенное для поперечного деления усечённого конуса в заданном отношении.

*Решение.* Рассмотрим рис. 27. Радиус  $r$  сечения линейно зависит от высоты сечения  $h$  по формуле  $r = r_0 + \frac{h}{H_0}(r_1 - r_0)$ . Объём верхней части усечённого конуса, возникающей при поперечном делении на высоте  $H$  равен

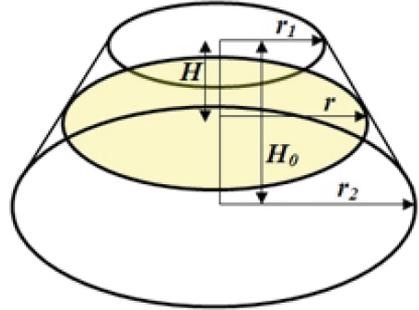


Рис. 27

$$V = \pi \int_0^H r^2 dh = \pi \int_0^H r_0^2 dh + 2\pi \int_0^H \frac{r_0(r_1 - r_0)}{H_0} h dh + \pi \int_0^H \frac{(r_1 - r_0)^2}{H_0^2} h^2 dh = \pi \left( \frac{(r_1 - r_0)^2}{3H_0^2} H^3 + \frac{r_0(r_1 - r_0)}{H_0} H^2 + r_0^2 H \right).$$

Объём неразделённого усечённого конуса равен

$$V_0 = \pi \frac{H_0}{3} (r_0^2 + r_0 r_1 + r_1^2).$$

Если нужно отсечь от этого объёма долю, определяемую параметром  $\lambda$ , высота  $H$  отсекаемой части определяется уравнением



$$\frac{(r_1 - r_0)^2}{H_0^2} H^3 + 3 \frac{r_0 (r_1 - r_0)}{H_0} H^2 + 3r_0^2 H - \lambda V_0 / \pi = 0.$$

11. Сформулировать и решить конкретную задачу деления усечённого конуса плоскостью, параллельными основанию, на две части, имеющие заданные отношения объёмов.

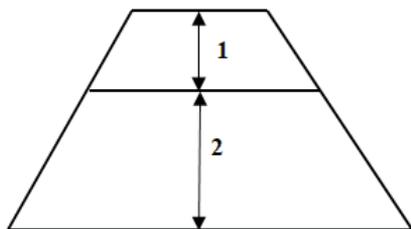


Рис. 28

*Решение.* Будем исходить из простых геометрических соображений. Пусть усечённый конус состоит из трёх уровней одинаковой высоты. Тогда верхний уровень гомотетичен двум нижним как единому целому (рис. 28).

Очевидно, что верхняя (отделяемая) часть конуса имеет объём в восемь раз меньше нижней, то есть от усечённого конуса должна быть отсечена его девятая часть ( $\lambda = \frac{1}{9}$ ).

Положим, что  $r_0 = 1$ ,  $r_1 = 4$ ,  $H_0 = 3$ , тогда  $V_0 = 63\pi$ , а кубическое уравнение принимает вид

$$H^3 + 3H^2 + 3H - 7 = 0.$$

Итак, к решению этого уравнения сводится следующая задача: отсечь сверху от усечённого конуса с параметрами  $r_0 = 1$ ,  $r_1 = 4$ ,  $H_0 = 3$  часть, составляющую по объёму одну девятую от общего объёма конуса.

Исходные данные при решении соответствующего уравнения подобраны так, что корень является целым числом ( $H = 1$ ). По этой причине поиск корня сводится к перебору делителей свободного члена.

12. Разделить полушарие плоскостью, параллельной основанию, на равные по объёму части.

*Решение.* Будем рассматривать полушарие радиуса единица. Оно имеет объём равный  $\frac{2}{3}$ . Полушарие нужно разделить на шаровой сегмент и шаровой пояс, объёмы которых равны  $\frac{1}{3}$ . При этом объём шарового пояса высоты  $H$  равен

$$\int_0^H (1 - h^2) dh = H - \frac{H^3}{3}.$$

В итоге для нахождения высоты шарового пояса получено кубическое уравнение  $H^3 - 3H + 1 = 0$ . Для его решения нужно использовать формулу Кардано [18]. Под знаком квадратного корня стоит выражение  $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$  ( $p = -3, q = 1$ ). Значение этой величины является отрицательным. Это означает, что кубическое уравнение является неприводимым (этот термин не связан с неприводимостью многочленов) [18]. В этом случае применение формулы Кардано затруднено. Тем не менее, в данном случае возможно получение обозримого результата.

Итак, формула Кардано для нахождения корней имеет вид



$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}} =$$
$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}} = \sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3}} + \sqrt[3]{\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i \cdot \sin(-\frac{2\pi}{3})}.$$

Поскольку кубические корни нужно извлекать из комплексных чисел в тригонометрической форме, это можно сделать без проблем. В результате корни кубического уравнения равны  $2 \cdot \cos \frac{2\pi}{9} = 1,53209$ ,  $2 \cdot \cos \frac{8\pi}{9} = -1,87938$ ,  $2 \cdot \cos \frac{14\pi}{9} = 0,347288$ . Таким образом, корни выражены с помощью тригонометрических функций. По смыслу задачи  $H = 2 \cdot \cos \frac{14\pi}{9}$ .

## 11. ПРОДОЛЬНОЕ ДЕЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ И ОБЪЁМОВ В СИСТЕМЕ КАВАЛЬЕРИ

Задания указанного вида также обладают различным уровнем сложности от тривиальных до очень сложных. О простейших заданиях уже говорилось выше. Речь идёт о своеобразной задаче, похожей на бытовую деятельность, связанную с колкой дров, то есть о продольном делении цилиндра на части, равные по объёму. Однако, как отмечалось, задача дополняется топологическим преобразованием «поленьев» в прямые круговые цилиндры.

Прежде чем рассматривать конкретные задачи на продольное деление, очертим некоторые особенности этих заданий, на которые следует обратить особое внимание. Вычисление площади и объёма структуры Кавальери с заданным направлением оси сводится к вычислению интеграла, и после такого сведения, в известном смысле, обесценивается. Благодаря этому задачи на продольное деление могут рассматриваться двояко: и как деление криволинейных трапеций и как деление объёмных тел. Однако постановка исходной задачи обязательно связана с рассмотрением геометрических и топологических аспектов вопроса. Таким образом, при решении соответствующих заданий возможен попеременный переход то к более абстрактной точке зрения (вычислительной), то к более конкретной (геометрической). Это очень удачно сочетается с исходной методической позицией, в равной степени направленной на освоение вычислительных навыков и на развитие геометрической интуиции.

Из вышесказанного следует, что один из видов задач имеет одну из следующих стандартных формулировок.

1. Структура Кавальери характеризуется заданной некоторой функцией меры, зависящей от положения неделимой относительно оси. Дать геометрическую интерпретацию этой структуры для случая площади и случая объёма. (В качестве примера можно рассмотреть вопрос, проиллюстрированный рисунком 16, о связи площади криволинейной трапеции, ограниченной параболой, и объёмом пирамиды).



- Структуру Кавальери, связанную определением площади интерпретировать как структуру вычисления объёма.
- Структуру Кавальери, связанную определением объёма интерпретировать как структуру вычисления площади.

Исходной структурой при рассмотрении той или иной задачи, как правило, удобнее брать криволинейную трапецию. Таким образом, начнём с рассмотрения задач, связанных с продольным делением криволинейных трапеций.

Отметим тот факт, что в отличие от задач поперечного деления, постановка которых однозначна, задачи продольного деления в целом неопределённые. Продемонстрируем это на примере. В качестве криволинейной трапеции используем прямоугольник (в этом случае функция, определяющая меру, является постоянной  $y = c$ ).

*Общая постановка задачи.* Провести продольное деление прямоугольника на две части равной площади.

Решение задачи может быть проведено бесконечным количеством способов. При этом для каждого решения  $y = f(x)$  должно выполняться только одно условие

$$\int_0^H f(x) dx = \int_0^H (c - f(x)) dx .$$

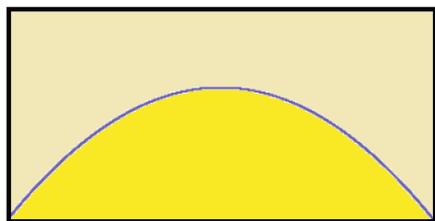


Рис. 29

Итак, задачу следует конкретизировать. Рассмотрим пример.

*Постановка конкретной задачи.* Отрезать от прямоугольника параболический сегмент, площадь которого равна половине площади прямоугольника (рис. 29).

*Решение.* Прямоугольник является областью на декартовой плоскости, определяемой неравенствами  $0 \leq x \leq H, 0 \leq y \leq c$ . Функция, определяющая сегмент параболы, определяется уравнением  $y = a \cdot (x - H) \cdot x$ .

Площадь сегмента равна  $S = a \int_0^H (x^2 - Hx) dx = a \frac{H^3}{3} - a \frac{H^3}{2} = -a \frac{H^3}{6} = \frac{cH}{2}$ . В итоге получаем, что  $a = -\frac{3c}{H^2}$ . Например, для случая квадрата, определяемого параметрами  $c = H = 1$  коэффициент  $a$  равен  $-3$ .

*Ещё одна поясняющая задача.* Отсечь от прямоугольника с параметрами  $c = R^2, H = 2R$  параболический сегмент, площадь которого равна двум третям площади прямоугольника. Дать интерпретацию, связанную с вычислением объёма.

*Решение.* Сразу начнём с пространственной интерпретации описанной ситуации. Прямоугольнику в пространстве соответствует цилиндр радиуса  $R$  и высоты  $2R$ . Умножим площадь на число  $\pi$ , чтобы работать именно с объёмом цилиндра. Для вычисления коэффициента  $a$  следует использовать уравнение  $\frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \pi R^3 = -a\pi \frac{4R^3}{3}$ .

Следовательно,  $a = -1$ . Тогда функция, задающая площадь неделимой, равна  $\pi \cdot (x - 2R) \cdot x$ . Сделаем замену переменной  $x = h + R$ . Значение переменной  $h$  является расстоянием по оси от её середины до точки пересечения оси с неделимой.

Теперь площадь неделимой выражается с помощью формулы  $\pi \cdot (R^2 - h^2)$ . Если соответствующим образом интерпретировать рис. 20, становится очевидным, что речь идёт о вычислении объёма шара.

Таким образом, в трёхмерном случае производится отсечение от цилиндра вписанного в него шара, то есть рассматривается знаменитый результат Архимеда, связанный с вычислением объёма шара. Более того, чертёж, иллюстрирующий данный результат, как известно, был размещён на могиле величайшего математика всех времён и народов (рис. 30).

После рассмотрения поясняющих задач перейдём к рассмотрению ряда заданий, начиная с весьма простых и постепенно переходя к более сложным. В очередной раз напомним, что в рамках тифлопедагогики уместны даже очень простые задачи.

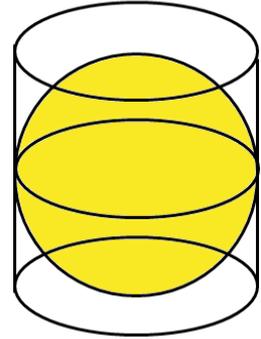


Рис. 30

1. Выполнить продольное деление треугольника на заданное количество равных по площади треугольников.
2. Выполнить продольное деление треугольника на заданное количество треугольников с заданным отношением площадей.
3. Выполнить продольное деление трапеции на заданное количество равных по площади трапеций.
4. Выполнить продольное деление трапеции на заданное количество трапеций с заданным отношением площадей.

*Пояснение.* Эти задачи следует решать методами элементарной геометрии, которые указывают, что нужно делить основания треугольников и трапеций в соответствующих отношениях. Ещё один возможный вариант подхода к этим задачам – использование криволинейных трапеций, ограниченных графиком линейной функции.

Аналогичные задачи могут быть рассмотрены в отношении трёхмерных структур.

5. Выполнить продольное деление конуса на заданное количество конусов с заданным отношением объёмов.
6. Выполнить продольное деление усечённого конуса на заданное количество конусов с заданным отношением объёмов.

*Пояснение.* В этих задачах студент должен начать с рассмотрения площадей оснований конусов, имеющих заданные отношения, а затем перейти к определению радиусов этих оснований.

Рассмотрим более сложные задачи, имеющие к тому же более общую постановку.

7. Выполнить продольное деление криволинейной трапеции на заданное количество криволинейных трапеций с заданным отношением площадей.

*Решение.* Задачу деления криволинейной трапеции на несколько областей можно последовательно свести к задаче деления криволинейной трапеции на две части с заданным отношением площадей. Пусть криволинейная трапеция ограничена сверху графиком функции  $y = f(x)$ . Нужно выполнить её продольное деление, при



котором площади частей будут относиться друг к другу как  $m$  к  $n$ . Очевидно, что график функции  $y = \frac{m}{m+n} f(x)$  решает эту задачу.

8. Плоская область ограничена графиками двух функций. Выполнить продольное деление области на заданное количество областей с заданным отношением площадей.

*Решение.* Используем криволинейную трапецию, ограниченную графиком разности соответствующих функций. Согласно принципу Кавальери топологическое преобразование исходной области в криволинейную трапецию сохраняет площадь, а, следовательно, позволяет перейти к условиям предыдущей задачи.

Перейдём к более сложным задачам, связанным с продольным делением прямоугольников, цилиндров и призм на две части, которые представляют собой криволинейные треугольники (см. выше).

9. Выполнить продольное деление прямоугольника на два криволинейных треугольника равной площади с помощью нелинейной функции.

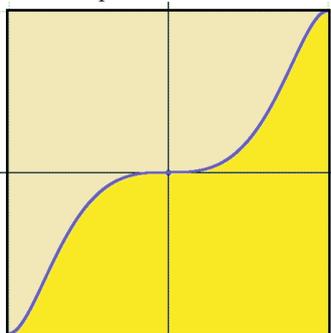


Рис. 31

*Пояснение.* Расположив прямоугольник так, чтобы его стороны были параллельны осям координат, а его центр совпадал с началом координат можно использовать для деления любую подходящую нечётную функцию (рис. 31). Подходящей же является функция, график которой проходит через противоположные углы прямоугольника и расположен *внутри* этого прямоугольника.

Пусть прямоугольник разбит на несколько областей непересекающимися внутри прямоугольника графиками более чем одной функции. Потребуем, чтобы эти функции уже не являлись нечётными, но их графики должны проходить через противоположные углы прямоугольника и быть расположены внутри этого прямоугольника. Тогда прямоугольник будет разбит на два криволинейных треугольника и на несколько плоских веретёнообразных областей (рис. 32).

10. Выполнить продольное деление прямоугольника на несколько криволинейных треугольников произвольной площади с помощью нелинейных функций.

*Пояснение.* Можно построить нижний график (функция  $y = f_1(x)$ ), который удовлетворяет условиям, налагаемым на функции. Затем над ним следует построить следующий график (функция  $y = f_1(x) + f_2(x)$ ) и так далее. Следует отметить, что в такой форме построение выглядит довольно кустарным. При этом требуется следить за правильным поведением функций, что требует определённых усилий в случае, когда функции задаются аналитически. Зато нарисовать графики от руки не представляет труда.

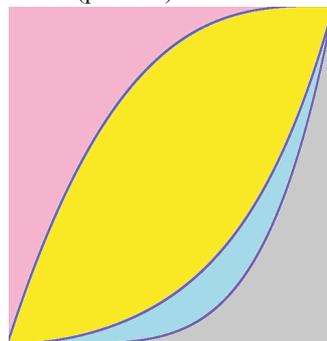


Рис. 32

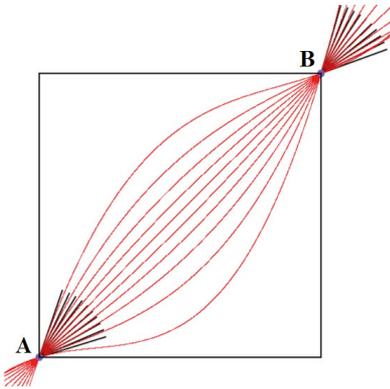


Рис. 33

Решить проблему с аналитическим представлением функций можно, например, с помощью кубических сплайнов (рис. 33). С одной стороны они задаются аналитически, но их поведение можно, хотя бы отчасти, предсказать на интуитивном уровне [19]. Именно это обстоятельство может стать важным направлением при изучении соответствующей тематики студентами с дефектами зрения.

Естественно, здесь необходима существенная проработка системы заданий, но в общих чертах основная идея может быть описана следующим образом. Если сплайн, проходящий через противоположные углы прямоугольника  $A$  и  $B$ , в точке  $A$  имеет касательную, наклонённую к оси абсцисс под углом  $\alpha$ , то в точке  $B$  касательная к нему должна быть наклонена под углом  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ . Для углов  $\alpha$  близких к нулю и прямому углу сплайны начинают выходить за пределы прямоугольника. Этот факт нужно исследовать особо, решая специально сформированные для этой цели задания.

Для деления прямоугольника на несколько областей можно использовать и многочлены степени  $n$ , имеющие вид  $C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ , где  $C_n^k$  – число сочетаний из  $n$  по  $k$ .  
 11. Выполнить продольное деление прямоугольника с помощью соответствующих многочленов. Доказать, что области, полученные в результате деления, имеют равные площади (рис. 34).

*Решение.* Положим, что  $F_k(x) = \sum_{i=0}^k C_n^i x^i (1-x)^{n-i}$ .

Очевидно, что  $F_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^n C_n^i x^i (1-x)^{n-i} = 1$ . Выбранные таким образом графики функций  $F_k(x)$  как раз и производят искомое деление прямоугольника. Более того, это деление выполнено вполне корректно, то есть графики проходят через угловые точки и не пересекаются во внутренних точках прямоугольника.

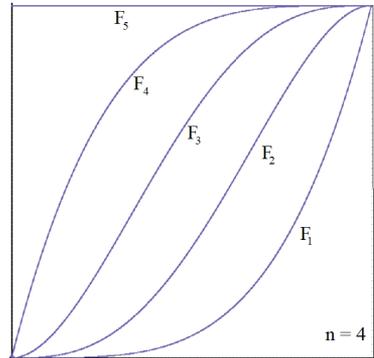


Рис. 34

Доказательство равенства площади соответствующих областей выполняется с помощью следующей цепочки вычислений. Площадь области между графиками  $F_k(x)$  и  $F_{k+1}(x)$  равна  $\int_0^1 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} dx$  (выбор отрезка  $[0; 1]$  не приводит к потере общности). Будем вычислять интеграл по частям. Положим, что  $dv = x^k dx$  и  $u = (1-x)^{n-k}$ . Тогда  $v = \frac{x^{k+1}}{k+1}$  и  $du = -(n-k)(1-x)^{n-k-1}$ .



$$\begin{aligned} \text{Далее } \int_0^1 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} dx &= u \cdot v \Big|_0^1 - \int_0^1 v du = \frac{n!}{k!(n-k)!} \int_0^1 \frac{x^{k+1}}{k+1} (n-k)(1-x)^{n-k-1} dx = \\ &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \int_0^1 x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} dx = \int_0^1 C_n^{k+1} x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} dx. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано равенство площадей двух соседних областей, а, значит, и площадей всех областей, на которые разделён прямоугольник. Следовательно, площадь каждой из областей равна  $\frac{1}{n+1}$ .

Соответствующая геометрическая конструкция позволяет обратиться к задачам теории вероятностей, поскольку область, разделённая на части, наводит на мысли о связи с геометрическими вероятностями [20]. Только что рассмотренная задача непосредственно приводит к следующему заданию.

12. Проводится серия из  $n$  испытаний по схеме Бернулли. Вероятность успешного исхода испытания выбирается перед проведением серии испытаний наугад. Найти вероятность того, что в результате испытаний выпадет ровно  $k$  успехов.

Продольное деление криволинейных трапеций более сложно, чем деление прямоугольников и позволяет рассмотреть большое количество соответствующих задач. При этом следует учитывать тот факт, что диагональная линия, с помощью которой разделена трапеция, должна находиться внутри трапеции. Это накладывает ограничения и на эту линию и на график функции, ограничивающий трапецию. По этой причине прежде чем ставить задачу деления трапеции, нужно предварительно эту трапецию построить.

13. Построить криволинейную трапецию и выполнить её продольное деление на два криволинейных треугольника равной площади.

*Решение.* Будем опираться на некоторые методы вычислительной математики [21]. Использовать будет интерполяционный многочлен Лагранжа и формула Симпсона, позволяющая определить площадь криволинейной трапеции. При этом в случае, когда криволинейная трапеция ограничена квадратичной функцией, формула Симпсона даёт точное значение площади.

Сначала построим интерполяционный многочлен, проходящий через точки  $(-1;3)$ ,  $(0;4)$ ,  $(1;2)$ . Тогда площадь криволинейной трапеции по формуле Симпсона

$$S = \frac{h}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{1}{3} \cdot (3 + 4 \cdot 4 + 2) = 7.$$

Разделим её на две части прямолинейной диагональю с уравнением  $y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ . После деления криволинейная трапеция будет разбита на две части, имеющие площади 4 и 3. Нужно искривить линию деления так, чтобы уравнивать площади.

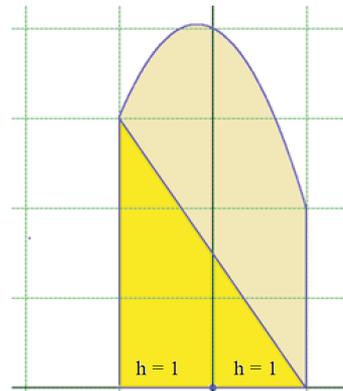


Рис. 35



Используем для этого параболический сегмент как на рис. 29. Его площадь должна равняться  $\frac{1}{2}$ , а уравнение параболы имеет вид  $k \cdot (1-x^2)$ . Таким образом,  $k \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = k \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{2k}{3} = \frac{1}{2}$ . Следовательно,  $k = \frac{3}{4}$ .

Теперь можно заменить прямую  $y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$  на параболу  $y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}$ . Эта замена решает задачу (рис. 36).

Перейдём теперь к задачам, связанным с вычислением объёмов. Эти задачи имеют три аспекта. Вычислительный аспект, как уже отмечалось, и в двумерном и в трёхмерном случае одинаков. Топологический и геометрический аспекты в задачах, связанных с вычислением объёмов, проявляются очень выпукло. Они помогают связать вычислительную технику с образным восприятием геометрических и топологических объектов. Начнём с рассмотрения геометрических объектов.

С топологической точки зрения в рамках принципа Кавальери нет разницы между параллелепипедом и прямым круговым цилиндром, имеющими одинаковую высоту и обладающими горизонтальными сечениями равной площади. Однако изучение результатов продольного деления этих геометрических тел даже при внешнем сходстве способа деления показывает, что требуются разные подходы.

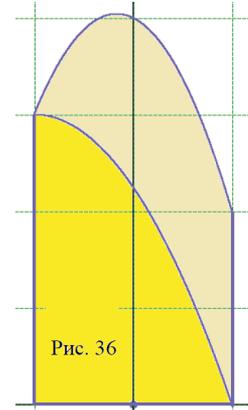


Рис. 36

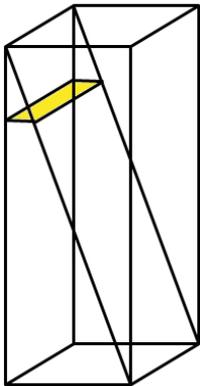


Рис. 37

Рассечём параллелепипед диагональной плоскостью (рис. 37). При этом горизонтальные сечения каждого из полученных клиньев линейно зависят от высоты, на которой расположены эти сечения. Это позволяет без труда получить формулу для вычисления объёма клина, а затем выполнить его топологическое преобразование в веретёнообразное тело, что и будет сделано в дальнейшем.

Если же плоскостью расцечь цилиндр, то горизонтальные сечения каждой из половинок являются сегментами, площадь которых вычисляется довольно сложным образом (рис. 38).

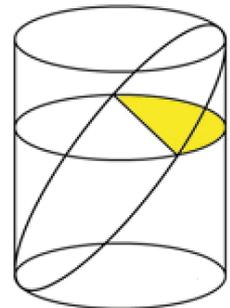


Рис. 38

Выполним продольное деление цилиндра на два равных по объёму веретёнообразных тела. При этом рассмотрим два варианта: сечение цилиндра плоскостью и деление, при котором горизонтальные сечения являются секторами с линейно растущими по мере изменения высоты сечений площадями (рис. 39).

14. Рассмотрим сечение цилиндра плоскостью и вычислим площади неделимых.

*Решение.* Как мы говорили выше, в этом случае горизонтальные сечения являются сегментами (рис. 40).

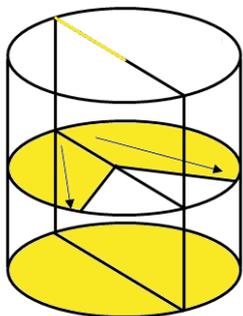


Рис. 39

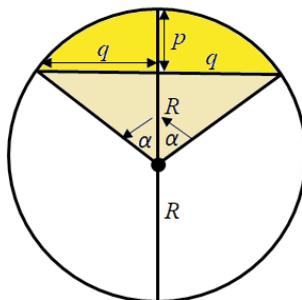


Рис. 40

Параметр  $p$ , задающий высоту сегмента линейно зависит от высоты сечения цилиндра. Кроме того задан радиус цилиндра  $R$ . С их помощью мы можем вычислить параметры, представленные на рисунке 40, то есть  $q$  и  $\alpha$ , а затем и площадь сегмента. Проведём соответствующие вычисления без комментариев:

$$\begin{aligned} (2R - p) \cdot p &= q^2, q = \sqrt{(2R - p) \cdot p}, \\ \sin \alpha &= \frac{q}{R}, \alpha = \arcsin \frac{q}{R}, S_{\text{sekt}} = \alpha R^2, \\ S_{\text{сегм}} &= \alpha R^2 - q \cdot (R - p) \\ &= R^2 \arcsin \frac{\sqrt{(2R - p) \cdot p}}{R} - (R - p) \cdot \sqrt{(2R - p) \cdot p}. \end{aligned}$$

Здесь можно ощутить, как простой геометрический способ деления цилиндра приводит весьма сложным формулам, выражающим зависимость площадей неделимых от высоты.

15. Преобразовать две дольки цилиндра, рассечённого плоскостью в функциональные тела вращения (ФТВ).

*Пояснение.* Поскольку речь идёт о топологических преобразованиях, то можно игнорировать ряд отличий между структурами Кавальери. Например, если площади неделимых двух структур пропорциональны, то топологически структуры эквивалентны. Таким образом, коэффициентом пропорциональности можно пренебрегать. Из этого следует, что корень квадратный из функции, вычисленной в предыдущем задании, даёт очертание ФТВ, являющегося веретёнообразным телом, в которое топологически преобразуется каждая половинка цилиндра.

Полученное разбиение можно представить в виде в графической форме (рис. 41). Студентам с дефектами зрения желательно представить соответствующие осязательные модели.

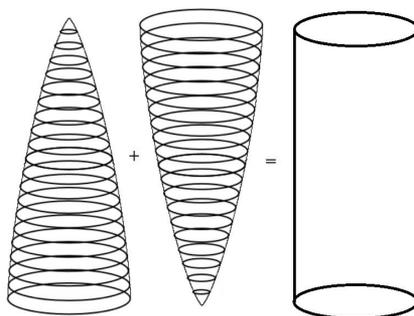


Рис. 41



Результатом разбиения цилиндра, проведённого в предыдущем задании, стали два тела, очень похожие на конусы, но, образно говоря, «более полные», чем конусы. Возможно, это обстоятельство может противоречить чьей-то геометрической, интуиции.

16. Вычесть из цилиндра два разнонаправленных конуса (рис. 42) и установить, какое тело получается в результате.

*Решение.* Задание можно записать в форме математического комикса. При этом следует учесть, что в соответствующих заданиях основания изображённых на схемах объектов одинаковы. Решение задания в данном случае не требует вычислений. Объём конуса равен трети объёма цилиндра. По этой причине после вычитания из цилиндра двух разнонаправленных конусов будет получено обоюдоострое «веретено» с таким же объёмом. Это тело, распределённое, при делении на две части и привело к «утолщению» конусов.

Изменив геометрическое условие задачи, можно получить интересный результат, позволяющий разделить исходный объект на вычислимые объёмы.

17. Вычесть из правильной четырёхгранной призмы две разнонаправленных пирамиды и установить, какое тело получается в результате.

*Решение.* Чертёж для призмы и двух пирамид, по сути, должен повторять рис. 42. По этой причине мы его не приводим. Площади сечений пирамид, проведённые на высоте  $h$ , пропорциональны  $h^2$  для одной пирамиды и  $(1-h)^2$  для противоположно направленной пирамиды. Таким образом, с вычислительной точки зрения речь идёт о разбиении прямоугольника многочленами (см. рис 34) для случая  $n = 2$ .

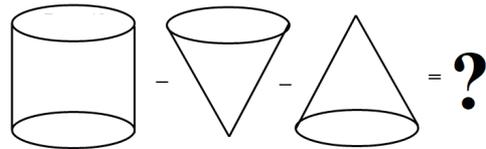


Рис. 42

Тело, которое останется после удаления пирамид, соответствует многочлену  $2 \cdot h \cdot (1-h)$ . Речь идёт о тетраэдре, который расположен особым образом по отношению к оси системы Кавальери (см. рис. 15).

Итак, нами получено разбиение параллелепипеда на две четырёхгранных пирамиды и тетраэдр. Все три объекта имеют одинаковые объёмы.

Вернёмся к рассмотрению клина, получаемого рассечением параллелепипеда диагональной плоскостью (см. рис. 37).

18. Преобразовать клин в ФТВ.

*Решение.* Как мы уже говорили, площади неделимых для клина линейно зависят от высоты. При преобразовании клина в ФТВ, как и ранее, используется корень квадратный из этой функции. Легко понять, что ФТВ является параболоидом вращения.

Рассмотрим теперь вместо параллелепипеда цилиндр. Если придумать способ, с помощью которого цилиндр будет разрезан на две равных по объёму части так, чтобы их неделимые линейно зависели от высоты, то цилиндр будет разбит на два противоположно расположенных параболоида вращения.

19. Придумать способ деления цилиндра, обеспечивающий линейный рост площадей сечения.



*Решение.* Фактически этот способ уже описан ранее. Деление цилиндра производится так, чтобы горизонтальные сечения являлись секторами с линейно растущими по мере изменения высоты сечений площадями (см. рис. 39).

Очевидно, что линейно расти должен угол сектора. Возможны различные варианты взаимного расположения секторов. Мы выберем вариант, при котором биссектрисы всех секторов образуют плоскость, проходящую через ось цилиндра.

Конструкция рассечения цилиндра на две равные доли в целом понятна, но представить себе рассекающую цилиндр поверхность не так уж просто. Естественно, что желательно наличие осязательной модели. Здесь же мы ограничимся рисунком, который даёт объёмное изображение сечения, а также его изображения в двух ракурсах (рис. 43).

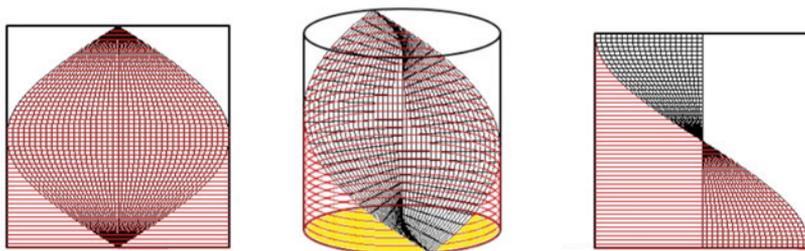


Рис. 43

Вернёмся к задаче Архимеда, связанной с вычислением объёма шара. На её примере сформулируем задание, которое, в конечном счёте, связано с продольным делением трёхмерных объектов. Задание кратко формулируется одной фразой или предлагается в виде рисунка (рис. 44). То же самое можно сказать и об ответе – либо фраза, либо рисунок (рис. 45).



Рис. 44

Рис. 45

20. Вычесть из цилиндра конус.

*Ответ.* Будет получена полусфера.

Если отказаться от условия равенства высоты цилиндра радиусу, то задача может быть переформулирована.

21. Вычесть из цилиндра половину эллипсоида вращения.

Сформулируем ещё несколько заданий подобного рода.

22. Вычесть из цилиндра усечённый конус.

23. Вычесть из усечённого конуса цилиндр того же радиуса, которое имеет малое основание конуса.

24. Вычесть из усечённого конуса того же радиуса, которое имеет малое основание конуса.

25. Разделить параболоид вращения на три веретёнообразных тела равного объёма.



*Пояснение.* Вычтешь из параболоида конус. Полученное обоюдоострое веретено имеет объём равный трети параболоида, а конус – две трети.

## 12. ВЫВОДЫ

Рассматривая в данной статье вопросы, связанные с изучением математики студентами с дефектами зрения, авторы исходили из того, что понимание учебного материала в значительной степени основывается на образном мышлении. Однако именно в области тифлопедагогики особенно затруднены пути развития этого вида мышления.

Одним из способов решения этой проблемы является использование осязательной предметности, но это только один из путей достижения поставленной педагогической задачи и притом не самый важный. Необходим системный подход, позволяющий соединить воедино различные направления и идеи, используемые при обучении математике. Авторы предполагают, что для эффективного осуществления такого системного подхода необходимо основываться на системах заданий, позволяющих студентам с дефектами зрения успешно осваивать различные разделы математики. Авторы считают, что основной педагогической целью разработки таких систем заданий является создание атмосферы целенаправленного размышления по вопросам, связанным с изучаемой темой.

Авторы демонстрируют в статье, сколь сложна и объёмна задача построения системы заданий даже в рамках одной достаточно конкретной темы. В статье как пример рассматриваются вопросы, относящиеся к интегральному исчислению. Кроме всего прочего следует отметить, что разработка заданий, связанных с тифлопедагогикой, нередко приводит к созданию задач с оригинальным содержанием, представляющих общий интерес, например, при изучении математического анализа.

Основной вывод, вытекающий из статьи, состоит в том, что в области тифлопедагогики заинтересованные педагоги могут увидеть перед собой непечатый край интересной и важной работы. Авторы надеются, что их статья послужит стимулом для включения в эту работу, хотя бы нескольких новых энтузиастов.

### *Литература*

1. *Степанов М.Е.* Из опыта работы в области тифлопедагогики. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. № 1, 2017.
2. *Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нгуен Ву Куанг.* Осязаемая предметность с компьютерной поддержкой. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. № 4, 2019.
3. *Степанов М.Е.* Образ силового поля как эвристическая модель в математике. Моделирование и анализ данных. Труды факультета информационных технологий МГППУ. Вып. 3., 2007.
4. *Степанов М.Е.* Некоторые вопросы методики преподавания высшей математики. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. № 1, 2017.
5. *Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М.* Пропедевтика решения экстремальных задач в школьном курсе математики. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. № 4, 2019.



6. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М. Роль образного мышления в научном мышлении. Моделирование и анализ данных. Том 10. № 2., 2020.
7. Платон. Собрание сочинений в 4 томах. Том 1. М.: Мысль, 1990.
8. Прасолов В.В. Три классические задачи на построение. М. Наука, 1992.
9. Бухштаб А.А. Теория чисел. М.: Просвещение, 1966.
10. Кордемский Б.А. Математическая смекалка. М.: Гос. изд. Техничко-теоретической лит., 1956.
11. Зубов В.П. Леонардо да Винчи. 1452–1519. М., Наука, 2008.
12. Никифоровский В.А. Путь к интегралу. М., Наука, 1985.
13. Историко-математические исследования. М.: Наука, 1985, Вып. 28.
14. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2. М.: Наука, 1966.
15. Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс. М.: Наука, 1987.
16. Башмакова И.Г. Диофант и диофантовы уравнения. М.: Наука, 1972.
17. Серпинский В. О решении уравнений в целых числах. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит. 1961.
18. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1968.
19. Степанов М.Е. Некоторые вопросы, связанные с интерполяционным многочленом Эрмита. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. № 1, 2014.
20. Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности. М.: Наука. 1972.
21. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966.



# A Systematic Approach to the Methodology of Typhlopedagogy on the Example of Mathematical Analysis Problems

***Yevgeny D. Kulanin\****

Moscow State University of Psychology & Education, Moscow, Russia  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>  
e-mail: [lucas03@mail.ru](mailto:lucas03@mail.ru)

***Mikhail E. Stepanov\*\****

Moscow State University of Psychology & Education, Moscow, Russia  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>  
e-mail: [mestepanov@yandex.ru](mailto:mestepanov@yandex.ru)

***Alexander D. Panfilov\*\*\****

Moscow State University of Psychology & Education, Moscow, Russia  
e-mail: [sp.999@bk.ru](mailto:sp.999@bk.ru)

***Ilya S. Potonyshv\*\*\*\****

Moscow State University of Psychology & Education, Moscow, Russia  
e-mail: [i-p99@mail.ru](mailto:i-p99@mail.ru)

The article discusses some of the problems that arise when working with students with visual defects. In particular, the authors discuss ways to improve the culture of mathematical thinking of students with visual defects. The authors rely on the experience of working at the Faculty of Information Technologies of Moscow State University of Psychology & Education.

## **For citation:**

Kulanin Y.D., Stepanov M.E., Panfilov A.D., Potonyshv I.S. A Systematic Approach to the Methodology of Typhlopedagogy on the Example of Mathematical Analysis Problems. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2022. Vol. 12, no. 2, pp. 34–82. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2022120203> (In Russ., abstr. in Engl.).

\****Yevgeny D. Kulanin***, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow state University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>, e-mail: [lucas03@mail.ru](mailto:lucas03@mail.ru)

\*\****Mikhail E. Stepanov***, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Moscow state University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: [mestepanov@yandex.ru](mailto:mestepanov@yandex.ru)

\*\*\****Alexander D. Panfilov***, Student, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, e-mail: [sp.999@bk.ru](mailto:sp.999@bk.ru)

\*\*\*\****Ilya S. Potonyshv***, Student, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, e-mail: [i-p99@mail.ru](mailto:i-p99@mail.ru)



**Keywords:** higher education, task system, purposeful thinking, typhlopedagogics, methods of teaching mathematics, Euclidean geometry, spatial imagination, mathematical analysis, analytical geometry, integral calculus, testing of the level of development.

### *References*

1. Stepanov M.E. From experience in the field of typhlopedagogics. Modeling and data analysis. Scientific journal. – No. 1, 2017.
2. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nguyen Vu Quang. Tangible objectivity with computer support. Modeling and data analysis. Scientific Journal. – No. 4, 2019.
3. Stepanov M.E. The image of a force field as a heuristic model in mathematics. Modeling and data analysis. Proceedings of the Faculty of Information Technologies of MGPPU. – Issue 3., 2007.
4. Stepanov M.E. Some questions of teaching methods of higher mathematics. Modeling and data analysis. Scientific journal. – No. 1, 2017.
5. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. Propaedeutics of solving extreme problems in the school course of mathematics. Modeling and data analysis. Scientific journal. No. 4, 2019.
6. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. The role of imaginative thinking in scientific thinking. Modeling and data analysis. Tom 10. № 2., 2020.
7. Plato. Collected works in 4 volumes. Volume 1. Moscow: Mysl, 1990.
8. Prasolov V.V. Three classical problems for construction. M. Nauka, 1992.
9. Bukhstab A.A. Theory of numbers. M.: Enlightenment, 1966.
10. Kordemsky B.A. Mathematical savvy. M.: State Publishing House. Technical and theoretical lit., 1956.
11. Zubov V.P. Leonardo da Vinci. 1452–1519. M., Nauka, 2008.
12. Nikifirovskiy V.A. The path to the integral. M., Nauka, 1985.
13. Historical and mathematical research. M.: Nauka, 1985, Issue 28.
14. Fichtenholz G.M. Course of differential and integral calculus. Volume 2. M.: Nauka, 1966.
15. Balk M.B., Boltvansky V.G. Geometry of masses. M.: Nauka, 1987.
16. Bashmakova I.G. Diophantine and Diophantine equations. M.: Nauka, 1972.
17. Serpinsky V. On solving equations in integers. M.: State ed. phys.-mat. lit. 1961. 18. Kurosh A.G. Course of Higher Algebra. Moscow: Nauka, 1968.
18. Kurosh A.G. Kurs vyssei algebrы. M.: Nauka, 1968.
19. Stepanov M.E. Some issues related to the Hermite interpolation polynomial. Modeling and data analysis. Scientific journal. – No. 1, 2014.
20. Kendall M., Moran P. Geometric probabilities. M.: Nauka. 1972.
21. Demidovich B.P., Maron I.A. Fundamentals of computational mathematics. Moscow: Nauka, 1966.

## Осязательные модели в аналитической геометрии

**Степанов М.Е.** \*

Московский государственный психолого-педагогический университет  
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>  
e-mail: [mestepanov@yandex.ru](mailto:mestepanov@yandex.ru)

**Воронина С.Н.** \*\*

Московский государственный психолого-педагогический университет  
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация  
e-mail: [Sofy2000@mail.ru](mailto:Sofy2000@mail.ru)

В статье обсуждаются некоторые проблемы, возникающие при работе со студентами, имеющими дефекты зрения. В частности, авторы обсуждают пути повышения культуры математического мышления студентов с дефектами зрения. Авторы опираются на опыт работы на факультете информационных технологий МГППУ.

**Ключевые слова:** высшее образование, тифлопедагогика, методика преподавания математики, осязательные модели, пространственное воображение, аналитическая геометрия, кривые второго порядка, эллипс, геометрические преобразования.

**Для цитаты:**

*Степанов М.Е., Воронина С.Н.* Осязательные модели в аналитической геометрии. // Моделирование и анализ данных. 2022. Том 12. № 2. С. 83–102. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2022120204>

### 1. ВВЕДЕНИЕ

На факультете информационных технологий МГППУ студентам с дефектами зрения преподаются различные разделы высшей математики. Естественно, что в такой ситуации ведётся активная деятельность, связанная с методической проработкой

\**Степанов Михаил Евграфович*, кандидат педагогических наук, доцент, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: [mestepanov@yandex.ru](mailto:mestepanov@yandex.ru)

\*\**Воронина Софья Николаевна*, студент, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), e-mail: [Sofy2000@mail.ru](mailto:Sofy2000@mail.ru)



некоторых вопросов тифлопедагогике. Примером являются статьи [1–3]. Данная статья также направлена на разработку некоторых проблем преподавания высшей математики в рамках тифлопедагогике.

В ходе изучения математических дисциплин студенты с дефектами зрения очень часто работают с разного рода математическими объектами. В большинстве случаев они бывают представлены в виде плоскочечатных изображений. В связи с этим незрячие студенты испытывают ряд определённых трудностей при прохождении учебного материала. Они не могут, например, рассмотреть рисунок, который прилагается к параграфу в учебнике или лекции. Словесного описания со стороны преподавателя, зрячего студента или какого-либо другого зрячего человека порой бывает недостаточно для понимания сути рисунка. Таким образом, незрячие студенты, в лучшем случае, понимают материал недостаточно чётко, в худшем случае, понимают его неправильно.

Возникают проблемы и при решении задач. Вышеописанная проблема с рассмотрением рисунков в этом случае тоже присутствует: Незрячие студенты, не имея возможности видеть и чётко понимать рисунок, данный к задаче, либо абсолютно не справляются с решением поставленной задачи, либо справляются, но не в полной мере, без должного понимания сути задачи и путей её решения.

Кроме того, проблема может возникнуть и непосредственно при решении задач. Фактически студент должен сам создать какой-либо рисунок для тех или иных целей. Например, если в ходе решения задачи от студентов требуется создать график или какой-либо другой рисунок, то велика вероятность того, что незрячие студенты не смогут этого сделать.

Не стоит отрицать, что существуют специальные приборы, предназначенные для черчения рельефных графиков. Но с ними тоже связано немало проблем: Во-первых, работа с ними занимает большое количество времени, что неприемлемо при работе в группе; Во-вторых, точность чертежей, созданных при помощи этих приборов, оставляет желать лучшего.

Осязательные модели способствуют решению если не всех, то многих из этих проблем. Они должны существенно улучшить качество обучения незрячих студентов. Благодаря им обучение незрячих студентов станет более простым и эффективным. При помощи этих моделей можно будет более наглядно показать незрячим студентам, как выглядят математические объекты. Это даст следующие преимущества: во-первых, модели сыграют важную роль при первом знакомстве с математическими объектами; во-вторых, модели помогут решить описанные выше проблемы при изучении теоретического материала и при решении задач. Модели позволят легко и быстро изобразить тот или иной рисунок. Будь то рисунок, связанный с изучаемой темой, или рисунок в условии задачи. Модели помогут также и непосредственно при решении. С их помощью можно будет свободно воспринимать математические объекты, формируя образы, необходимые для решения тех или иных задач.

Конкретно тематика статьи связана с вопросами аналитической геометрии. Основные идеи, положенные в её основу таковы. Прежде всего, метод координат является основой не только аналитической геометрии, но и практически всех разделов



классической математики. По этой причине глубокое понимание аналитической геометрии и свободное владение её методами позволяет открыть путь к освоению курса высшей математики в целом. Центральную роль при этом играют темы, связанные с изучением кривых второго порядка.

Аналитическая геометрия, как и другие разделы геометрии, основывается на об-разном восприятии многих понятий [4]. Естественно, что важной опорой в обучении этому предмету являются чертежи и рисунки, позволяющие воспринимать многие геометрические конструкции как целое. К сожалению, студенты, имеющие дефекты зрения, такой возможности лишены.

Заменой чертежей и рисунков могут стать осязательные модели, позволяющие де-тально разобраться с теми же геометрическими конструкциями путём осязательной работы с их материальными аналогами.

Авторы статьи работают над данной тематикой два года. За время работы при со-хранении общей цели работы несколько изменился её акцент. Причины этого изме-нения таковы. Первая модель, рассмотренная авторами, представляла собой матери-альный объект, играющий роль декартовой плоскости. К этой модели должны были прилагаться модели геометрических линий, в частности, прямых. Основной методи-ческой задачей при этом была разработка заданий, относящихся к аналитической гео-метрии и одновременно адаптированных к соответствующим осязательным моделям.

Работа была проделана, однако, возникла проблема, связанная с тем, что все ося-зательные модели остались лишь теоретическими проектами. Изготовление этих моделей требовало привлечения специалиста, поскольку разработчики проекта не имели возможности самостоятельно выполнить данную работу. Следует отметить, что упомянутые модели не являются слишком сложными объектами. Возможно ку-старное их изготовление. Но для этого во-первых необходимы определённые мате-риальные затраты, пусть и небольшие. Речь идёт о материалах и наличии инструмен-тов. Главная же проблема связана с тем, что указанные работы требуют довольно значительного времени.

Именно по этой причине на следующем этапе работы авторы приняли решение о том, что осязаемые модели, кроме всего прочего, должны удовлетворять следу-ющему дополнительному требованию: **их изготовление может быть проведено в бытовых условиях без значительных материальных затрат с использованием инструментов и материалов, которые можно найти в любом доме.**

Таким образом, данная работа разделилась на два блока, которые с педагогиче-ской и методической точки зрения едины, но которые разделены в технологическом отношении. Ниже будут изложены результаты, полученные на обоих этапах работы. При этом результаты второго из этих этапов будут, в первую очередь, содержать описание технологий, направленных на самостоятельное изготовление соответствую-щих осязательных моделей. При этом процесс их изготовления будет довольно подробно описан, а иногда и проиллюстрирован. Это, несомненно, может помочь ли-цам, пожелавшим самостоятельно воспроизвести, а затем и использовать эти модели. Кроме того, авторы хотят отметить, что предлагаемые ими модели и технологии их изготовления могут быть модифицированы и усовершенствованы пользователями.



## **2. О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ СТАДИЯХ РАЗРАБОТКИ ОСЯЗАТЕЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ**

Прежде чем говорить о разработанных авторами статьи осязательных моделях, опишем основные стадии разработки таких моделей. Как отмечалось выше, некоторые стадии по ряду обстоятельств могут быть пропущены. Обычно это относится к стадии изготовления рабочей модели. Однако полноценная работа над созданием осязательных моделей должна осуществляться без подобных лакун. Это, конечно же, требует достаточно серьёзной технологической поддержки.

- Последовательный обзор избранной для методической проработки математической темы и выделение понятий и разделов, которые должны быть проиллюстрированы с помощью осязательных моделей.
- Изобретение осязательных моделей, дающих возможность изменить или расширить возможности традиционной методики преподавания.
- Разработка технологии изготовления соответствующей осязательной модели.
- Изготовление осязательной модели с фиксацией всех технологических стадий.
- Анализ исходного технологического плана и сравнение его с реальным процессом изготовления осязательной модели.
- Улучшение технологии изготовления соответствующей осязательной модели с учётом уже проделанной работы.
- Эксперименты с осязательной моделью с целью проверки её пригодности для обучения студентов с дефектами зрения.
- Создание текста инструкции, предназначенной для студентов с дефектами зрения, осваивающих данную осязательную модель.
- Создание аудиофайла соответствующей инструкции, позволяющего студентам с дефектами зрения освоить данную осязательную модель без посторонней помощи.
- Разработка системы заданий, при решении которых можно использовать данную осязательную модель.
- Проведение педагогических экспериментов, позволяющих улучшить систему заданий по изучаемой математической теме.

Естественно, что изучение целостного математического курса охватывает сразу несколько более узких тем и соответственно требует использования нескольких осязательных моделей. В свою очередь здесь могут возникнуть дополнительные проблемы, связанные с методической проработкой данного курса.

## **3. ОСЯЗАТЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДЕКАРТОВОЙ ПЛОСКОСТИ И ПРЯМЫХ**

В данной работе будут рассмотрены модели декартовой плоскости и двух прямых. Они помогут при решении ряда задач, связанных с графиками линейных функций. Подробнее эти задачи будут рассмотрены ниже.

Модель декартовой плоскости имеет одну особенность: При рассмотрении разных функций студенты нередко сталкиваются с дробными координатами; модель



не предоставляет возможности работы с ними. С помощью модели можно работать только с целочисленными координатами.

Несмотря на эту особенность, модель внесёт значительный вклад в развитие обучения незрячих студентов: она поможет как студентам при изучении материала, так и преподавателям при объяснении материала незрячим студентам.

Приступим к описанию осязаемой модели декартовой плоскости.

Моделью декартовой плоскости является квадратный лист толстой фанеры. Сначала он покрывается сеткой квадратов 20 на 20. В узлах сетки в листе фанеры просверливаются сквозные отверстия (рис. 1). При работе с моделью они будут играть роль точек на координатной плоскости. Узел  $(10; 10)$  считается началом системы координат. На листе фанеры намечаются оси координат, например, с помощью неглубокого пропиливания.

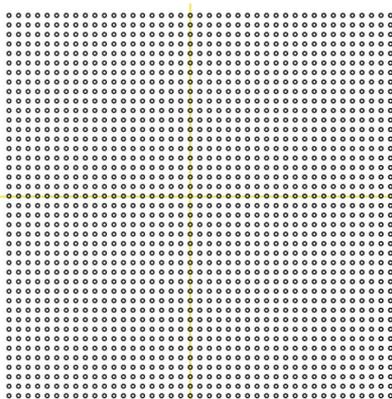


Рис. 1

Сквозные отверстия будут играть роль точек на координатной плоскости, и, как мы увидим далее, в эти отверстия будут вставляться стерженьки, к которым будут прикреплены спицы, моделирующие прямые линии. По этой причине для удобства работы с моделью её следует снабдить ножками (рис. 2). Это позволит без проблем закреплять на модели декартовой плоскости те же самые прямые, а в принципе и модели других линий, изучаемых в аналитической геометрии.

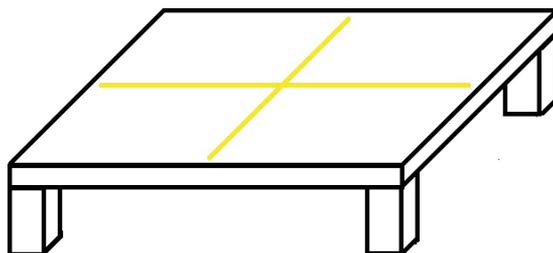


Рис. 2

Перейдём к рассмотрению моделей прямых. Моделью прямой является спица, на которую надеты два стерженька (рис. 3), которые могут свободно скользить вдоль спицы. Стерженьки позволяют зафиксировать положение двух точек на прямой. Отметим, что модель прямой, в отличие от модели декартовой плоскости, была реализована. Роль собственно прямой играла вязальная спица, а стерженьки были изготовлены из скрепок.

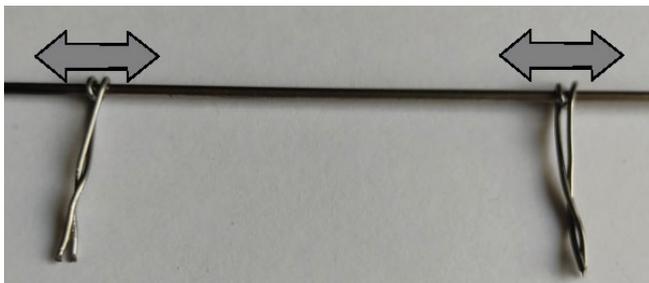


Рис. 3

Подобная модель прямой может быть прикреплена к модели декартовой плоскости с помощью вставки стерженьков в отверстия. После этого положение прямой на плоскости можно осязать. И, в том числе, можно на ощупь определить координаты двух точек, задающих положение прямой.

Естественно, при рассмотрении задач аналитической геометрии, связанных со взаимном положением прямых, следует использовать по крайней мере хотя бы ещё одну такую же модель прямой. Ясно, что конструкции соответствующих моделей позволяют рассматривать, например, пересекающиеся прямые.

Была разработана система заданий. **Первая группа задач, связана с вопросами, относящимися к одной прямой.** Уравнения прямой при этом задаются конкретными параметрами.

Соответствующие задачи можно сформулировать в общем виде, но при этом предполагается, что значения параметров являются целыми числами, соотносящимися с размерами и возможностями модели. Кроме общей формулировки каждое задание сначала будет решаться при конкретных значениях параметров, иногда выбранных так, чтобы сделать вычисления максимально простыми.

Задачи с определённой точки зрения являются весьма простыми, но не следует забывать, что речь идёт о методических разработках в области тифлопедагогики. После рассмотрения ряда заданий мы вернёмся к обсуждению данной темы.

1. С помощью параметров  $k$  и  $b$  задано уравнение прямой  $y = kx + b$ . Прикрепить модель прямой к модели плоскости так, чтобы уравнение прямой соответствовало заданным параметрам.

*Решение.* Пусть  $k = 3$  и  $b = 2$ . Для выполнения задания сначала нужно определить две точки, через которые проходит заданная прямая. Это делается с помощью подстановки в уравнение целочисленных значений аргумента и нахождения соответствующее значение функции.



Например, пусть  $x = 0$ . Подставим это значение в функцию  $y = 3x + 2$ , находим значение  $y = 2$ . Одна из двух точек найдена.

Теперь найдём вторую точку. Пусть  $x = 1$ . Подставим это значение в функцию и найдём значение  $y = 5$ . Вторая точка тоже найдена.

Таким образом, прямая проходит через точки  $(0; 2)$  и  $(1; 5)$ . После нахождения координат точек необходимо на модели плоскости найти отверстия, соответствующие этим точкам, а затем прикрепить прямую к плоскости, вставив стерженьки в нужные отверстия. *Задача решена.*

2. Прямая прикреплена к плоскости. Получить её уравнение.

*Решение.* Сначала необходимо определить, через какие точки проходит прямая, то есть найти отверстия на модели плоскости, в которые вставлены стерженьки прямой. Например, пусть прямая проходит через точки  $(1; 1)$  и  $(2; 2)$ . На этом основании нужно составить систему из двух уравнений, каждое из которых имеет вид  $y = kx + b$ . Поскольку  $y$  – ординаты точек,  $x$  – абсциссы точек, а  $k$  и  $b$  – неизвестные коэффициенты. Система уравнений в нашем случае принимает вид

$$\begin{cases} 1 = k + b \\ 2 = 2k + b \end{cases}$$

Решая систему, получаем, что  $k = 1$  и  $b = 0$ . Таким образом, уравнение прямой имеет вид  $y = x$ . *Задача решена*, но студент может, используя осязание, дополнительно убедиться, что именно эта формула описывает прямую. Для этого достаточно сравнить абсциссы и ординаты точек прямой и убедиться, что они равны.

3. Пусть параметры  $k$  и  $b$  задают уравнение прямой. Кроме того дана точка  $(x_j; y_j)$ .

Прикрепить прямую, проходящую через эту точку, параллельно исходной прямой.

*Решение.* Пусть  $k = 0$ ,  $b = 1$ ,  $x_j = 0$ ,  $y_j = -1$ . Такие исходные данные могут показаться слишком простыми, но в области тифлопедагогики нужно рассматривать разнообразные варианты, в том числе и случай горизонтальной прямой.

Чтобы точно определить место расположения искомой прямой, нужно найти ещё одну точку, через которую она проходит. Для этого, в свою очередь нужно вывести уравнение искомой прямой.

Пусть  $k_1$  – угловой коэффициент искомой прямой,  $b_1$  – свободный коэффициент в уравнении искомой прямой. Тогда уравнение этой прямой примет вид  $y = k_1x + b_1$ . Известно, что у параллельных прямых угловые коэффициенты равны. В нашем примере  $k_1 = k = 0$ .

Чтобы найти коэффициент  $b_1$ , подставим в уравнение  $y = k_1x + b_1$  координаты точки  $(x_j; y_j)$ , данные в условии. В итоге получаем, что  $b_1 = -1$ . Таким образом, уравнение искомой прямой принимает вид  $y = -1$ .

Теперь приступим непосредственно к поиску второй точки, через которую проходит прямая. Положим  $x = 1$ . Подставим это значение в уравнение и получим вполне ожидаемое значение ординаты:  $y = -1$ .

Итак, прямая проходит через точки  $(0; -1)$  и  $(1; -1)$ . Теперь нужно найти на модели плоскости отверстия, соответствующие вышеуказанным точкам, и вставить в них стерженьки прямой. *Задача решена.*



4. Заданы параметры  $k$  и  $b$ , задающие уравнение прямой и точка  $(x_j; y_j)$ . Прикрепить прямую, проходящую через эту точку, перпендикулярно исходной прямой.

*Решение.* Пусть  $k = 1$ ,  $b = 0$ ,  $x_1 = -1$ ,  $y_1 = 1$ . Сначала выведем уравнение искомой прямой. Пусть  $k_1$  – угловой коэффициент искомой прямой,  $b_1$  – свободный коэффициент в уравнении искомой прямой. Тогда уравнение искомой прямой примет вид  $y = k_1x + b_1$ . Известно, что для перпендикулярных прямых  $k_1 = -\frac{1}{k}$ . В нашем примере  $k_1 = -1$ .

Теперь найдём коэффициент  $b_1$ . Подставим в координаты данной в условии точки в уравнение  $y = k_1x + b_1$  и установим, что  $b_1 = 0$ . Коэффициенты найдены, а, значит, уравнение искомой прямой имеет вид  $y = -x$ .

Теперь найдём вторую точку, через которую проходит прямая. Пусть  $x = 1$ . Подставим это значение в уравнение прямой и получим, что  $y = -1$ . Итак, прямая проходит через точки  $(-1; 1)$  и  $(1; -1)$ . Наконец, необходимо найти на модели плоскости отверстия, соответствующие указанным выше точкам и вставить в них стерженьки прямой. *Задача решена.*

5. Даны координаты двух точек  $(x_j; y_j)$  и  $(x_2; y_2)$ . Прикрепить прямую и получить её уравнение.

*Решение.* Пусть  $x_1 = 2$ ,  $y_1 = -2$ ,  $x_2 = 1$ ,  $y_2 = -1$ . Чтобы прикрепить прямую, найдём на модели плоскости отверстия, соответствующие точкам, данным в условии, и вставим в них стерженьки прямой.

Теперь выведем уравнение прямой. Составим систему уравнений вида

$$\begin{cases} y_1 = k \cdot x_1 + b \\ y_2 = k \cdot x_2 + b \end{cases}$$

Подставим в систему конкретные координаты точек. Система примет вид.

$$\begin{cases} -2 = k \cdot 2 + b \\ -1 = k + b \end{cases}$$

Решаем систему и получаем, что коэффициент  $k = -1$  и коэффициент  $b = 0$ . Уравнение прямой имеет вид  $y = -x$ . *Задача решена.*

Можно предположить, что столь подробное рассмотрение столь простых задач, может вызвать определённые возражения со стороны педагогов-математиков. Тем не менее, авторы статьи считают, что тексты, описывающие ход решения, полезны для студентов с дефектами зрения. Более того, эти тексты желательно перевести в аудио-файлы, чтобы, пользуясь ими, студент мог разбираться в соответствующих вопросах без посторонней помощи.

Одним из общих положений педагогической науки является утверждение о том, что построение учебного курса должно определяться целями, которые ставит перед собой преподаватель. При изучении математики часто неявно предполагается, что целью является создание условий для максимального развития математических способностей талантливых студентов. При этом студенты, испытывающие затруднения, как бы выносятся за скобки. В тифлопедагогике такой подход недопустим. Здесь нужно



подать учащемуся руку и подвести его к должной степени понимания материала. Возможно, что так следовало бы поступать в отношении всех учащихся вообще. Но это вопрос к общей структуре и общества в целом, и системы образования. Каждый человек уникален, но его уникальность иногда становится препятствием в учёбе. Если общество настроено на максимальное развитие каждого своего члена, оно должно учитывать это обстоятельство. Но тут речь идёт о построении совершенно иного мира.

Естественно, что от задач с простыми и удобными для вычислений данными следует постепенно переходить к более сложным в вычислительном плане задачам. Кроме того, в предлагаемой методике имеется специфическая сторона, связанная с прикреплением модели прямой к модели плоскости. При достижении достаточной степени понимания проблематики студенту следует отойти от использования осязательных моделей и решить все задачи в общем виде.

Имея всё сказанное в виду, **перейдём к заданиям, связанным с двумя прямыми.**

1. Даны уравнения двух прямых  $y = k_1x + b_1$  и  $y = k_2x + b_2$ . Прикрепить соответствующие прямые к плоскости и найти решение системы уравнений.

*Решение.* При использовании осязательных моделей следует так подобрать уравнения, чтобы система имела целочисленное решение. Этим будет обеспечена возможность осязательного определения решения.

Пусть  $k_1 = 1, b_1 = 0, k_2 = -1, b_2 = 2$ . Решив систему уравнений, найдём координаты точки пересечения прямых:  $x = 1, y = 1$ .

Теперь следует прикрепить прямые к плоскости и убедиться, что они пересекаются в найденной точке. Найдём для каждой прямой по две точки, через которые они проходят. Точку  $(1; 1)$  использовать нельзя, потому что в одно отверстие на плоскости нельзя вставить стерженьки двух прямых.

Начнём с прямой  $y = x$ . Пусть  $x = 0$ . Подставим это значение в уравнение прямой и найдём, что  $y = 0$ . Одна точка найдена.

Пусть  $x = 2$ . Подставим это значение в уравнение и найдём, что  $y = 2$ . Вторая точка найдена.

Теперь найдём две точки, лежащие на прямой  $y = -x + 2$ . В частности речь может идти о точках  $(0; 2)$  и  $(2; 0)$ .

Все необходимые точки найдены. Вставим стерженьки первой прямой в отверстия на плоскости, соответствующие точкам  $(0; 0)$  и  $(2; 2)$ , а стерженьки второй прямой в отверстия, соответствующие точкам  $(0; 2)$  и  $(2; 0)$ .

Найдя их точку пересечения, можем убедиться, что это точка  $(1; 1)$ . Таким образом, система была решена правильно. *Задача решена.*

2. Пусть параметры  $k$  и  $b$  задают уравнение прямой. Кроме того дана точка  $(x_j; y_j)$ . Прикрепить к плоскости исходную прямую, а также прямую, проходящую через заданную точку, перпендикулярно исходной прямой. Найти координаты точки пересечения двух прямых.

*Решение.* Пусть  $k = 1, b = 0, x_1 = -1$  и  $y_1 = 1$ . Чтобы прикрепить исходную прямую, нужно найти две точки, через которые проходит исходная прямая. Такими точками могут быть, например, точки  $(1; 1)$  и  $(-1; -1)$ . Закрепляем первую из прямых в указанных точках на плоскости.



Теперь выведем уравнение перпендикулярной прямой.

Пусть  $k_1$  – угловой коэффициент искомой прямой,  $b_1$  – свободный коэффициент в уравнении искомой прямой. Итак, уравнение искомой прямой имеет вид  $y = k_1x + b_1$ .

Для перпендикулярных прямых верно выражение  $k_1 = -\frac{1}{k} = -1$ .

Теперь найдём коэффициент  $b_1$ . Для этого подставим координаты заданной в условии точки в уравнение  $y = -x + b_1$ . В итоге получаем, что  $b_1 = 0$ .

Коэффициенты найдены. Уравнение перпендикулярной прямой имеет вид  $y = -x$ .

Теперь найдём вторую точку, через которую проходит перпендикулярная прямая. Это не должна быть точка пересечения. Пусть  $x = 1$ . Подставим это значение в уравнение прямой и получим, что  $y = -1$ .

Прямая проходит через точки  $(-1; 1)$  и  $(1; -1)$ . Найдём на модели плоскости отверстия, соответствующие указанным выше точкам, и вставим в них стерженьки перпендикулярной прямой.

Осталось найти точку пересечения прямых. Это можно сделать двумя способами: во-первых, найти её на построенной модели; во-вторых найти её путём решения системы уравнений. Используем оба варианта.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$$

Убедимся, что решениями являются  $x = 0, y = 0$ . Значит, прямые пересекаются в точке  $(0; 0)$ . С помощью модели осязательно убедимся, что это действительно так. *Задача решена.*

Что касается вопросов, относящихся к моделям декартовой плоскости и прямым, мы ограничимся вышеперечисленными задачами и перейдём к осязательным моделям эллипса. Но ещё в описательном порядке дадим краткие сведения о некоторых моделях, которые не были рассмотрены авторами, поскольку у них отсутствовала материальная модель декартовой плоскости. А это значит, что все задания, связанные с этой моделью можно рассматривать только в умозрительном порядке.

Речь идёт о прямоугольных треугольниках с целочисленной длиной сторон, в вершинах которых расположены стерженьки, позволяющие прикреплять эти треугольники к модели декартовой плоскости. Такие треугольники можно использовать при выводе формулы расстояния между точками на плоскости. Кроме того, поворот такого треугольника на прямой угол позволяет вывести формулу, связывающую угловые коэффициенты перпендикулярных прямых. Возможны и другие многочисленные варианты моделей и их использования.

#### 4. ОСЯЗАТЕЛЬНЫЕ МОДЕЛИ, СВЯЗАННЫЕ С ИЗУЧЕНИЕМ ЭЛЛИПСОВ

В этом разделе статьи мы будем говорить об осязательных моделях, изготовление которых может быть проведено в бытовых условиях без значительных материальных

затрат с использованием инструментов и материалов, доступных в любом домашнем хозяйстве. Здесь неявно просматривается аналогия с известным принципом, утверждающим, что спасение определённой группы людей – дело рук самих этих людей.

Работа над каждой из этих моделей распадается на несколько этапов.

1. Изобретение осязательной модели.
2. Описание осязательной модели (фактически описание изобретения). В нашем случае все модели, связаны с изучением эллипсов.
3. Описание технологии создания соответствующей модели.
4. Описание методики использования этой модели.
5. Разработка системы заданий, основанных на использовании этой модели.

### **Осязательная модель для изучения определения эллипса (модель 1)**

Причины разработки модели, связанной с определением эллипса, совершенно очевидны. Дело в том, что стандартным методическим приёмом введения эллипса в курс аналитической геометрии является использование рисунка, на котором изображён процесс построения эллипса с помощью плоскости-картонки, фокусов-гвоздиков, нерастяжимой нити и карандаша (рис. 4).

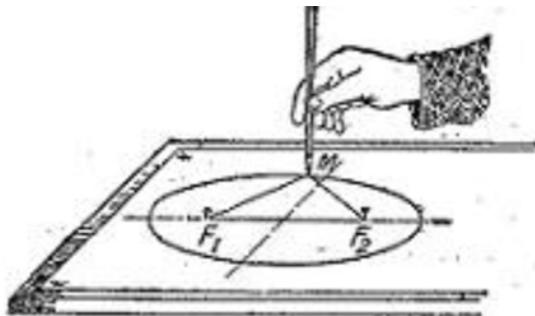


Рис. 4

Прежде всего, использование соответствующего рисунка подчёркивает тот факт, что рассмотрение образов, как минимум, полезно. С другой стороны ясно, что в работе со студентами с дефектами зрения использование рисунка невозможно. Именно по этой причине желательно было изобретение осязательной модели. Основная проблема состояла в том, чтобы построить модель, которая позволили бы перемещать нить с бусинкой по границе вырезанного эллипса. При этом вычерчивание эллипса заменяется его ощупыванием.

В итоге такая модель была не только спроектирована, но и реализована с помощью вполне доступных материалов. Приведём инструкцию её изготовления по пунктам и проиллюстрируем процесс создания модели. При этом авторы статьи выражают благодарность Николаю Владимировичу Воронину, который и проделал соответствующие работы.

#### **Порядок создание модели**

1. Приготовить материалы (рис. 5).

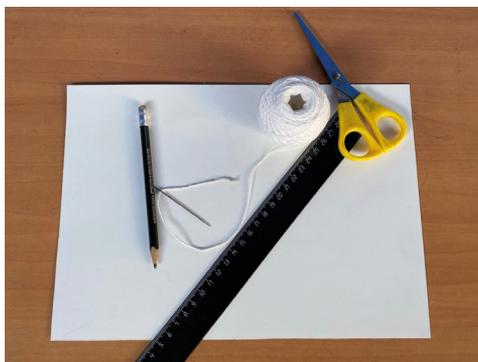


Рис. 5

2. На листе картона провести две перпендикулярных прямых (рис. 6).

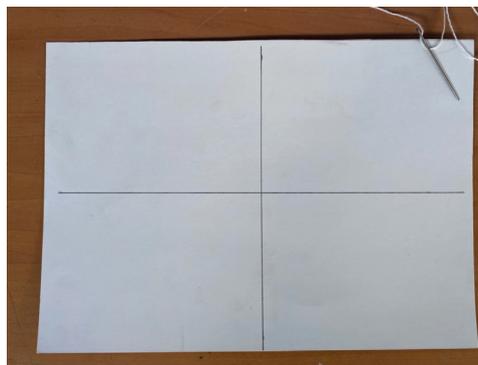


Рис. 6

3. На горизонтальной прямой на расстоянии 8 сантиметров и слева и справа от точки пересечения выделить фокусы  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  и сделать в этих точках проколы шилом.
4. На вертикальной прямой на расстоянии 6 сантиметров и сверху и снизу от точки пересечения выделить две точки  $B_1$  и  $B_2$  (рис. 7).

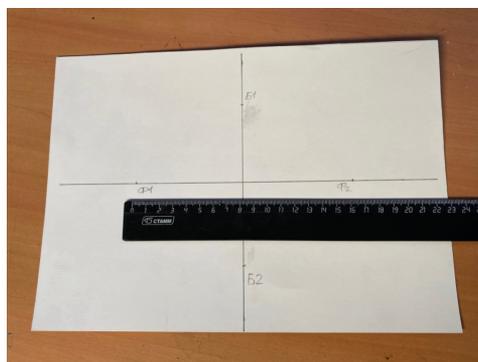


Рис. 7

5. Продеть через отверстия  $\Phi 1$  и  $\Phi 2$  суровую нитку. Натянуть её, удерживая в точке  $B1$ . Завязать нить натянутой с тыльной стороны листа картона (рис. 8).

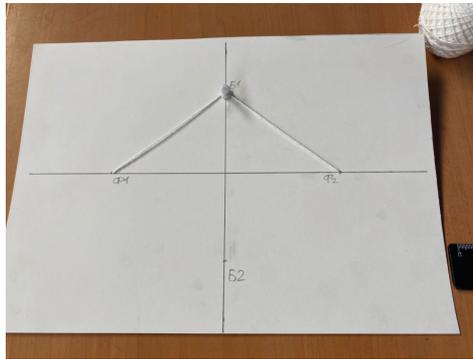


Рис. 8

6. Используя нить, очертить эллипс карандашом (рис. 9).

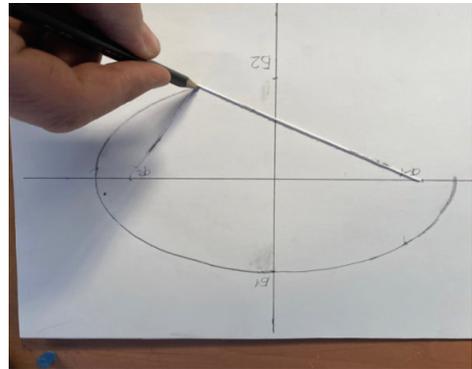
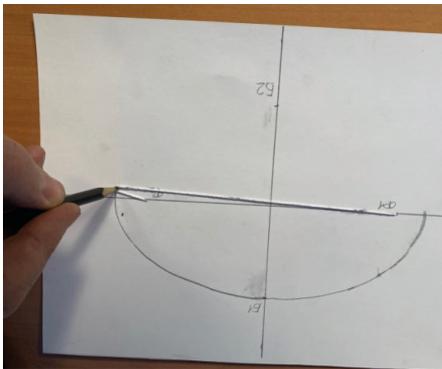


Рис. 9

7. Вырезать эллипс по линии (рис. 10).

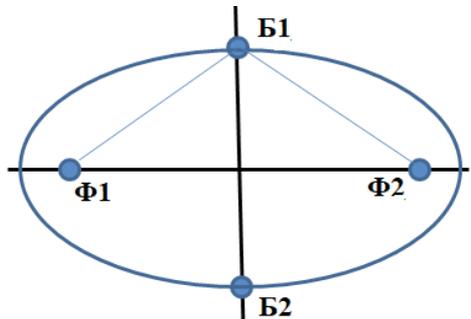
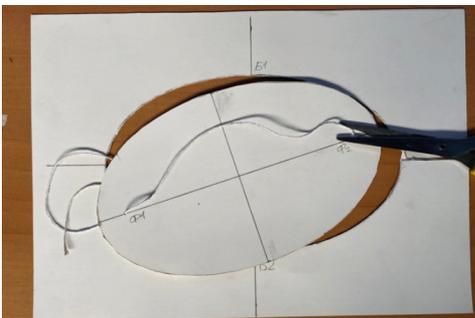


Рис. 10

8. Суровую нитку срезать (рис. 11).



Рис. 11

9. Сквозь бусинку продеть две суровых нитки (рис. 12).

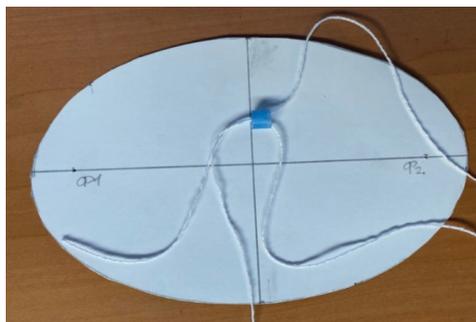


Рис. 12

10. Расположить бусинку на границе эллипса.

11. Продеть одну нитку через  $\Phi 1$  и  $\Phi 2$  с лицевой стороны и завязать с тыльной стороны в натянутом состоянии.

12. Продеть вторую нитку через  $\Phi 1$  и  $\Phi 2$  с тыльной стороны и завязать с лицевой стороны в натянутом состоянии (рис. 13).

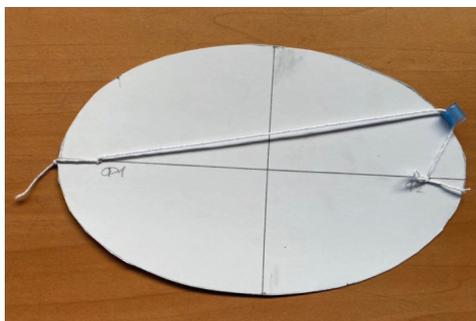


Рис. 13

13. Модель готова. Нити с двух сторон картонного эллипса держат бусинку на его границе, но так, что вдоль границы можно её перемещать.

Отметим, что в ходе создания модели возможны модификации технологии. Так в данном случае бусинка была удачно заменена на обрезок пластмассовой трубочки, что хорошо видно на фотографиях. Возможны и более существенные изменения модели. Например, изготовить её можно из более прочных, чем картон, материалов.

Но уже и на данном этапе модель можно использовать на занятиях по аналитической геометрии. Она достаточно успешно может заменить рисунок для студентов с дефектами зрения.

### Осязательная модель для изучения параметров эллипса (модель 2)

#### Порядок создание второй модели

1. Построить и вырезать эллипс с параметрами предыдущей модели, например, вырезать новый эллипс по контуру предыдущей модели.
2. Далее нужно осязательно выделить фокусы и основные расстояния на модели (рис. 14).

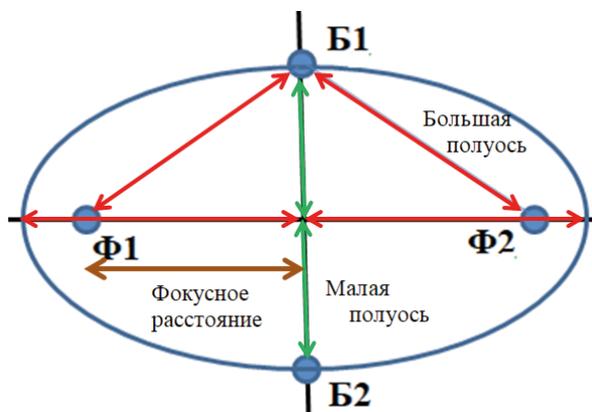


Рис 14

3. Для выделения фокусов можно наклеить или пришить маленькие пуговички.
4. Расстояния нужно выделять так, чтобы их можно было осязательно измерить. Для этого нужно нарезать узких полосок и через каждый сантиметр вдоль каждой полоски степлером закрепить скобки. Затем полоски следует наклеить на модель эллипса.

Возможно, полезно наклеить в некоторых местах поясняющие тексты на брайле.

Например: «Фокус 1». Или: «Уравнение эллипса  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ ».

Большая полуось имеет длину 10 см, малая полуось – 6 см, фокусное расстояние – 8 см.

Отметим, что при реализации материального варианта данной модели выяснилось, что предполагалось наклеить на картонный эллипс слишком много измерительных

полосок. В результате возникла идея, состоящая в том, чтобы заменить одну модель по теме «Параметры эллипса» двумя или более её вариантами. На одном варианте можно с помощью осязания определить длину большей полуоси эллипса и расстояние между фокусами. На другом варианте модели, представляющей точно такой же картонный эллипс можно с помощью осязания определить длину меньшей полуоси эллипса. Приведём фотографию первого из вариантов модели (рис. 15).

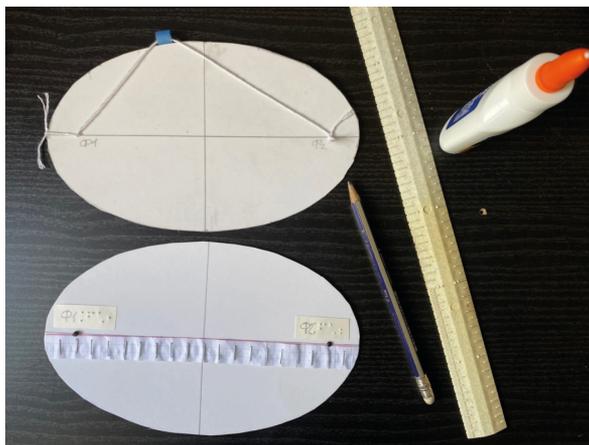


Рис. 15

Обратим внимание читателя на тот факт, что на модель наклеены брайлевские буквы, отмечающие фокусы эллипса.

Кроме того, при создании модели возникли технические проблемы, связанные с изготовлением «линеек» с помощью степлера. Была разработана другая технология, основанная на использовании скотча (рис. 16).

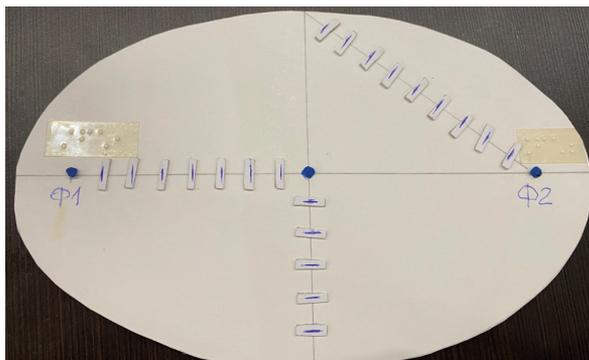


Рис. 16

Ситуация, связанная с доработкой и переработкой моделей, характерна для предлагаемого в статье проекта.

### Эллипс – сжатая окружность (модель 3)

#### Порядок создание третьей модели.

1. На первом листе картона провести две перпендикулярных прямых.
2. Провести окружность радиуса 10 сантиметров с центром в точке пересечения этих прямых.
3. Вырезать окружность.
4. На втором листе картона провести две перпендикулярных прямых.
5. На вертикальной прямой на расстоянии 5 сантиметров и сверху и снизу от точки пересечения выделить две точки B1 и B2.
6. На горизонтальной прямой сделать засечки Ф1 и Ф2 циркулем из центра B1 радиусом 10 сантиметров.
7. Продеть через отверстия Ф1 и Ф2 суровую нитку. Натянуть её, удерживая в точке B1. Завязать нить натянутой с тыльной стороны листа картона.
8. Используя нить, очертить эллипс карандашом.
9. Вырезать эллипс по линии.
10. Суровую нитку срезать.
11. Наклеить на окружность эллипс (рис. 17).

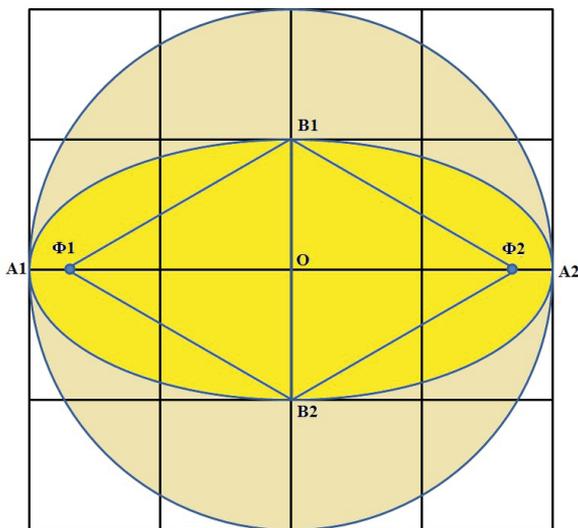


Рис. 17

12. Наклеить вертикальные полоски с насечками от границы круга до горизонтального диаметра, с помощью которых на ощупь можно убедиться, что высота круга всюду ровно в два раза больше высоты эллипса.

### Сопряжённые диаметры (модель 4)

#### Порядок создание четвёртой модели

1. Провести все работы, как это было сделано в предыдущей модели, с пункта 1 до пункта 11. Вертикальные полоски наклеивать не нужно.



2. Провести два перпендикулярных диаметра окружности  $AB$  и  $CD$ .
3. Провести от окружности до эллипса вертикальные отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  и  $DD_1$ .
4. Провести сопряжённые диаметры  $A_1B_1$  и  $C_1D_1$ .
5. Прошив суровыми нитями, сделать отрезки  $AB$ ,  $CD$ ,  $A_1B_1$ ,  $C_1D_1$ ,  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  и  $DD_1$  осязаемыми (рис. 18).

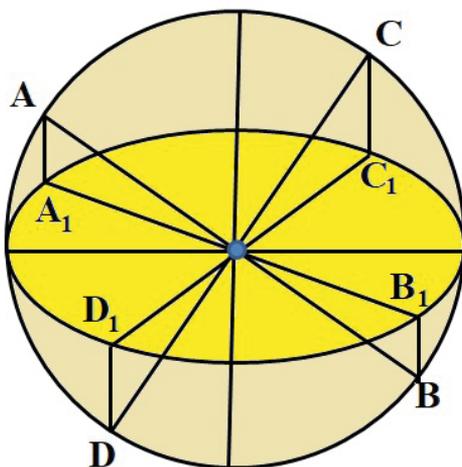


Рис. 18

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная статья посвящена разработке осязательных моделей предназначенных для обучения математике студентов с дефектами зрения. Более конкретно речь идёт об изучении аналитической геометрии.

Авторами разработано несколько осязательных моделей математических объектов, связанных с тематикой аналитической геометрии. Разработка каждой модели включала в себя изобретение модели, а также создание технологической карты, описывающей процесс реализации модели, как материального объекта. В принципе возможно и промышленное изготовление соответствующих моделей по типу традиционных линеек и лекал.

Однако в ходе работы постепенно был сделан акцент на разработку осязательных моделей, которые можно изготовить в домашних условиях. В статье приведены фотографии, фиксирующие этапы создания подобных моделей.

Авторы планируют продолжить свою работу и надеются, что их деятельность вызовет интерес у преподавателей высшей математики и студентов, изучающих математику.



### *Литература*

1. *Степанов М.Е.* Из опыта работы в области тифлопедагогики // Моделирование и анализ данных. 2017. Том 7. № 1. С. 42–53.
2. *Куланин Е.Д., Нгуен В.К., Степанов М.Е.* Осязаемая предметность с компьютерной поддержкой // Моделирование и анализ данных. 2019. Том 9. № 4. С. 145–156. doi:10.17759/mda.2019090412
3. *Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Панфилов А.Д., Потоньшиев И.С.* Системный подход к методике тифлопедагогики на примере задач математического анализа // Моделирование и анализ данных. 2022. Том 12. № 2.
4. *Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М.* Роль образного мышления в научном мышлении // Моделирование и анализ данных. 2020. Том 10. № 2. С. 110–128. doi:10.17759/mda.2020100209



## Tactile Models in Analytical Geometry

**Mikhail E. Stepanov\*\***

Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>

e-mail: [mestepanov@yandex.ru](mailto:mestepanov@yandex.ru)

**Sofya N. Voronina\*\***

Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia

e-mail: [Sofy2000@mail.ru](mailto:Sofy2000@mail.ru)

The article discusses some of the problems that arise when working with students with visual defects. In particular, the authors discuss ways to improve the culture of mathematical thinking of students with visual defects. The authors rely on the experience of working at the Faculty of Information Technologies of Moscow State University of Psychology & Education.

**Keywords:** higher education, typhlopedagogy, mathematics teaching methods, tactile models, spatial imagination, analytic geometry, second-order curves, ellipse, geometric transformations.

### For citation:

Stepanov M.E., Voronina S.N. Tactile Models in Analytical Geometry. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2022. Vol. 12, no. 2, pp. 83–102. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2022120204> (In Russ.,abstr. in Engl.).

### References

1. Stepanov M.E. Iz opyta raboty v oblasti tiflopedagogiki // Modelirovanie i analiz dannykh. 2017. Tom 7. № 1. p. 42–53.
2. Kulanin Y.D., Nguen V.K., Stepanov M.E. Osyazaemaya predmetnost' s komp'yuternoi podderzhkoi // Modelirovanie i analiz dannykh. 2019. Tom 9. № 4. p. 145–156. doi:10.17759/mda.2019090412
3. Kulanin Y.D., Stepanov M.E., Panfilov A.D., Potonyshev I.S. A Systematic Approach to the Methodology of Typhlopedagogy on the Example of Mathematical Analysis Problems. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2022. Vol. 12, no. 2, (In Russ.,abstr. in Engl.) (in print)
4. Kulanin Y.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. Rol' obraznogo myshleniya v nauchnom myshlenii // Modelirovanie i analiz dannykh. 2020. Tom 10. № 2. p. 110–128. doi:10.17759/mda.2020100209

\***Mikhail E. Stepanov**, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Moscow state University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: [mestepanov@yandex.ru](mailto:mestepanov@yandex.ru)

\*\***Sofya N. Voronina**, Student, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, e-mail: [Sofy2000@mail.ru](mailto:Sofy2000@mail.ru)



## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 004.89

# Использование самообучающегося алгоритма с элементами искусственного интеллекта на основе цепей Маркова для корректировки семантического ядра сайтов научного и коммерческого направления

**Колотовкин И.С.\***

Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6126-4849>

mail: [is@kolotovkin.pro](mailto:is@kolotovkin.pro)

В статье рассматривается эффективное использование программного средства с элементами искусственного интеллекта с опорой на цепи Маркова. На основе богатого личного опыта автора проводится описание типовых проблем, в данной сфере возникающих. В данной статье описаны только рекомендации по применению алгоритма.

**Ключевые слова:** семантическое ядро, цепи Маркова, ключевые фразы, искусственный интеллект.

### Для цитаты:

*Колотовкин И.С.* Использование самообучающегося алгоритма с элементами искусственного интеллекта на основе цепей Маркова для корректировки семантического ядра сайтов научного и коммерческого направления. 2022. Том 12. № 2. С. 103–109. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2022120205>

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Создание сайтов высокого уровня как правило опирается на расчет и оптимизацию семантического ядра. Семантическое ядро – это перечень основных ключевых фраз, используемых посетителями интернета при поиске необходимой им информации.

\**Колотовкин Игорь Сергеевич*, аспирант, преподаватель, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6126-4849>, e-mail: [is@kolotovkin.pro](mailto:is@kolotovkin.pro)



Оптимальный выбор таких поисковых запросов, которые позволят обеспечить сайту максимум посещаемости при минимуме затрат, дело сложное и часто в достаточной мере субъективное. Тем не менее использование в процессе формирования семантического ядра искусственного интеллекта возможно и, при умелом, подходе весьма эффективно.

О достоинствах и недостатках применения средств программирования при создании семантического ядра были представлены ранее в исследованиях информационного контента пользователями в Сети Интернет [1], семантического ядра информационного средства сети Интернет [2], а также в докладе о задачах кластеризации запросов при составлении семантического ядра [3] на XVII Всероссийской научной конференции «Нейрокомпьютеры и их применение».

Но, когда семантическое ядро уже создано и сайт успешно функционирует, можно ли считать работу с семантическим ядром завершённой? Нет, если сайт предполагает развитие и расширение своей сферы деятельности. Что это означает? Владельцы коммерческого продающего сайта могут расширить ассортимент предлагаемой покупателям продукции. А это означает необходимость сбора ключевых фраз по этим новым товарам.

Еще важнее и сложнее оказывается задача, если сайт содержит научную информацию, так как наука каждый день расширяет горизонты познаваемого, появляются новые экспериментальные данные, гипотезы и теории, которые требуют освещения в научных кругах. А значит появляются новые в запросе фразы, на которые должен правильно реагировать сайт.

Именно здесь в полной мере было бы разумно использование самообучающегося алгоритма с элементами искусственного интеллекта на основе цепей Маркова.

## 2. ОТ НЕДОСТАТКОВ К ДОСТОИНСТВАМ

Если при создании семантического ядра мы указывали значимые недостатки использования искусственного интеллекта, то почему же при работе с уже имеющимся ядром, можно говорить о том, что достоинства перевешивают эти недостатки? Потому что:

- 1) длительность процесса;
- 2) длительность процесса;
- 3) длительность процесса.

Может показаться, что приведенном выше списке есть какая-то ошибка. Нет, в данном списке нет ошибки. Рассмотрим эти три пункта подробнее.

### Пункт первый

**Длительность** процесса, как временной показатель существования необходимости работы с семантическим ядром.

Успешный сайт может существовать годами. И если мы хотим, чтобы человек вел работу по постоянной регулировке семантического ядра, необходимо выделить отдельную рабочую единицу – специалиста, который в безостановочном режиме будет



фактически проводить постоянное создание нового семантического ядра. В ускоренном формате, но процессы при этом точно такие же. Это, безусловно, неэкономично и в конечном счете неэффективно.

Компьютер же может выполнять все те же действия параллельно с другими функциями, практически не используя ценных ресурсов, так как современные компьютеры достаточно мощные. Таким образом экономятся финансы и трудозатраты при не слишком значительной потере в качестве. Этой потерей качества в данном случае можно пренебречь.

То есть недостатки искусственного интеллекта перед человеческим разумом в творческом процессе при ограниченном времени работы становятся его преимуществом при использовании в длительном рутинном функционировании.

#### Пункт второй

**Длительность** процесса, как временные трудозатраты.

В этом случае мы имеем в виду отрицательную длительность. А именно значительно большие затраты времени на корректировку ядра в том случае, если работает человек. Даже учитывая возможность использования оператором неких компьютерных программ, сбор, обработка, проверка и формирование кластера запросов при работе человека значительно превышают по времени те же самые действия, производимые компьютером.

А поскольку (особенно в отношении научных сайтов) объемы новой информации весьма велики, человек просто физически может не успевать обрабатывать все происходящие изменения.

К тому же появление новых знаний влечет за собой вхождение в научный обиход новых терминов, понятий, фразеологических оборотов. Если специалист, работающий с сайтом, с ними не знаком, он может отбраковывать их или неправильно классифицировать. А изучение всех новаций потребует от него опять-таки дополнительных затрат времени.

Таким образом быстрота работы искусственного интеллекта является его несомненным достоинством.

#### Пункт третий

**Длительность** процесса, как фактор, позволяющий эффективно внедрять самообучающийся искусственный интеллект.

Поскольку при создании семантического ядра мы имеем дело с конкретным объемом информации и ограниченным временем на его формирование, а после переходим к другому сайту, возможно весьма далекому по тематике, то полноценное использование самообучающегося искусственного интеллекта весьма затруднено – времени на обучение может просто не хватить для формирования достаточно высокого качества работы. Что можно считать значимым и трудно преодолимым недостатком.

При ведении же определенного сайта, наличествует достаточный временной ресурс, позволяющий искусственному интеллекту постоянно совершенствоваться в поиске и обработке запросов конкретного направления. Это дает возможность не только более эффективно использовать его, но и активно повышать качество производимых



действий. Чем нивелируем и относительный минус (недостаток), указанный в первом пункте. А это уже неоспоримое достоинство. В табл. 1 приведены сравнительные показатели для человека (специалиста) и компьютера с ИИ.

Таблица 1

**Примерные\* затраты времени, труда и качество результата**

Показатели в зависимости от сложности сайта	Исполнитель	
	Человек	Компьютер (самообучающийся ИИ**)
Временные затраты	8–24 часа	1–4 часа
Работа специалиста	Требуется постоянно	Не требуется (за исключением установки процесса)
Скорость работы	Возможно замедление, зависящее от человеческого фактора	Ускорение процесса при использовании самообучающегося ИИ
Масштабируемость (увеличение необходимого объема работы)	Требуется найти и обучить дополнительного специалиста	Требуется увеличить мощность используемого компьютера (купить более мощный/дополнительный)
Возможность ошибки	Возможны (постоянно действующий человеческий фактор)	Возможны (недочеты программного обеспечения) – с течением времени сводятся к нулю
Качество работы	Высокое/достаточное	Приемлемое/повышающееся со временем до достаточного

\* – эмпирические данные по результатам работы с разработчиками семантического ядра и программным обеспечением разного уровня.

\*\* – искусственный интеллект.

### 3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ САМООБУЧАЮЩЕГОСЯ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА НА ОСНОВЕ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

При систематизации интернет запросов для корректировки семантического ядра самообучающийся искусственный интеллект может эффективно использовать в работе цепи Маркова.

С одной стороны Марковские цепи [4] удобны в поиске новых запросов, сходных с уже существующими при общей известной сфере их направленности. При чем отсутствие «памяти» помогает не зависеть от ранее использованного контента, что позволяет работать с большими массивами информации абсолютно свободно.

Это важно особенно для научных сайтов, где поток новой информации не должен зависеть от уже существующих в сети материалов по определенной теме.

С другой стороны Марковские цепи помогают ранжировать выбранные запросы, исходя из их теоретической посещаемости, основанной на прогнозировании вероят-

ностных переходов между страницами сайта. Это качество просто необходимо для коммерческих сайтов, где на основе активности посещений страницы распределяется информационный контент.

На рис. 1 представлены поведенческие факторы с учетом Марковской цепи.

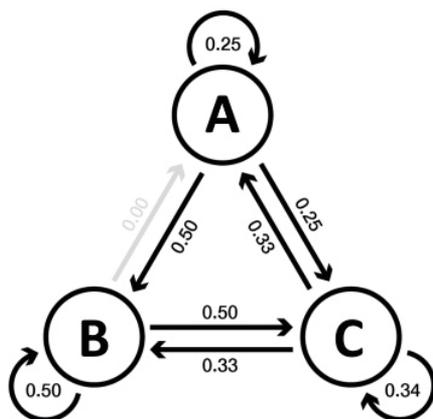


Рис. 1. Поведенческие факторы ранжирования ключевых фраз

На рис.1 приняты следующие обозначения:

- A – Посетитель не приходит на сайт по поисковой выдаче;
- B – Посетитель заходит на сайт по поисковой выдаче;
- C – Посетитель переходит на другую страницу сайта по ссылке на первой посещенной странице.

При начальной вероятности зайти и не зайти на сайт в первый раз равной 0,5.

В целом как одна, так и другая возможность, предоставляемая цепями Маркова, полезна и актуальна для всех сайтов вне зависимости от их направленности.

С другой стороны, самообучающийся искусственный интеллект позволяет сам, по своей сущности, а именно вне «задействования» Марковских цепей, использовать отсутствующую в этом методе прогнозирования «память», т.е. формировать релевантный прогноз не только на основании текущего события, но и уже накопленных ранее данных.

То есть, если при использовании исключительно Марковской цепи, появляется возможность свободно собирать ключевые фразы не зависимо от их веса посещаемости, то самообучающийся искусственный интеллект вне данного метода способен осуществлять ранжирование ключевых фраз по их эффективности относительно друг друга.

Таким образом именно взаимодействие двух начал – самообучающегося алгоритма и искусственного интеллекта на основе цепей Маркова, позволяет успешно использовать компьютерные программы для сбора, обработки, классификации ключевых фраз на постоянно действующей основе. Что в значительной мере повышает качество прогнозирования, а значит и качество семантического ядра. А так же



предоставляет возможность экономить денежные средства, расходуемые на обслуживание, рекламу и дополнительную раскрутку длительно функционирующего сайта.

#### 4. ВЫВОД

Длительно существующие сайты небезосновательно требуют для поддержания своей эффективности постоянной корректировки семантического ядра.

Использование труда человека при долговременной работе с семантическим ядром такого сайта на сегодняшний день можно считать более затратным по финансам и времени, чем использование информационных технологий, а значит, в конечном итоге, и не достаточно эффективным.

Использование программного средства с элементами искусственного интеллекта при корректировке семантического ядра действующих сайтов научного и коммерческого направления является экономически выгодным и весьма эффективным решением, так как исключает человеческий фактор и как риск ошибок при оптимизации ключевых фраз, и как более затратный вариант процесса при равнозначном, а в дальнейшем и меньшем качестве результата.

При этом основанное на цепях Маркова программное обеспечение, собирающее первоначальную базу данных поисковых запросов, используемое в этой работе повышает её результативность и «действенность» относительно существующих на данный момент программ.

Таким образом можно полагать, что необходимо разрабатывать программные средства с элементами искусственного интеллекта с опорой на цепи Маркова для оптимизации работы по корректировке действующих сайтов научного и коммерческого направлений.

#### *Литература*

1. Рыков А.С. Методы системного анализа: Многокритериальная и нечеткая оптимизация, моделирование и экспертные оценки. – М.: Экономика, 1999.
2. Search Engine Optimization (SEO) Secrets / Danny Dover, Erik Dafforn. – Indianapolis: John Wiley & Sons Limited, 2011.
3. Колотовкин И.С., Кулик С.Д., Шевченко А.А. Нейронные сети в задачах кластеризации запросов при составлении семантического ядра // Тезисы докладов. XVII Всероссийская научная конференция «Нейрокомпьютеры и их применение» НКП-2019. Москва, 19 марта 2019 г. – М.: ФГБОУ ВО МГППУ, 2019. – С.262–263.
4. Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. II: Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения. – М.: МЦНМО, 2009.



# Using a Self-Learning Algorithm with Elements of Artificial Intelligence Based on Markov Chains to Correct the Semantic Core of Scientific and Commercial Sites

**Igor S. Kolotovkin\***

Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE)

Moscow, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6126-4849>

mail: [is@kolotovkin.pro](mailto:is@kolotovkin.pro)

The article discusses the effective use of a software tool with elements of artificial intelligence based on Markov chains. Based on the rich personal experience of the author, a description of typical problems arising in this area is given. This article describes only recommendations for using the algorithm.

Keywords: semantic core, Markov chains, key phrases, artificial intelligence.

## **For citation:**

Kolotovkin I.S. Using a Self-Learning Algorithm with Elements of Artificial Intelligence Based on Markov Chains to Correct the Semantic Core of Scientific and Commercial Sites. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2022. Vol. 12, no. 2, pp. 103–109. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2022120205> (In Russ., abstr. in Engl.).

## **References**

1. Rykov A.S. Methods of system analysis: Multicriteria and fuzzy optimization, modeling and expert evaluations. – M.: Economics, 1999.
2. Search Engine Optimization (SEO) Secrets / Danny Dover, Erik Dafforn. – Indianapolis: John Wiley & Sons Limited, 2011.
3. Kolotovkin I.S., Kulik S.D., Shevchenko A.A., Neural networks in the problems of query clustering when compiling a semantic core // Abstracts. XVII All-Russian Scientific Conference “Neurocomputers and their applications” NKP-2019. Moscow, March 19, 2019 – M.: FGBOU VO MGPPU, 2019. – P. 262–263.
4. Kelbert M. Ya., Sukhov Yu. M. Probability and statistics in examples and problems. Vol. II: Markov chains as a starting point for the theory of random processes and their applications. – M.: MTSNMO, 2009.

\***Igor S. Kolotovkin**, Post-Graduate Student, Lecturer, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6126-4849>, e-mail: [is@kolotovkin.pro](mailto:is@kolotovkin.pro)

**Моделирование и анализ данных 2022. Том 12. № 2.**  
Научный журнал

Издаётся с 2011 года

Учредитель  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Московский государственный психолого-педагогический университет»

Адрес редколлегии:  
г. Москва, ул. Сретенка, 29, факультет информационных технологий  
Тел.: +7 (499) 167-66-74  
E-mail: mad.mgppu@gmail.com

Журнал зарегистрирован в Государственном комитете РФ по печати.  
Свидетельство о регистрации средств массовой информации  
ПИ № ФС77-52058 от 7 декабря 2012 года

ISSN: 2219-3758  
ISSN: 2311-9454 (online)

Подписано в печать: 30.06.2022.  
Формат: 70\*90/16. Бумага офсетная.  
Гарнитура Times. Печать цифровая.  
Усл. печ. п. 7,1. Усл.-изд. л. 6,9.  
Тираж 500 экз.