1

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

2017

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ 2017

ISSN 2219-3758

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ • 2017 • №1

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ

MODELLING AND DATA ANALYSIS

Издаётся с 2011 года

Учредитель
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный психолого-педагогический университет»

Адрес редколлегии:
г. Москва, ул. Сретенка, 29, факультет информационных технологий
Тел.: +7 (499) 167-66-74
E-mail: mad.mgppu@gmail.com

Журнал зарегистрирован в Государственном комитете РФ по печати.
Свидетельство о регистрации средств массовой информации
ПИ № ФС77-52058 от 7 декабря 2012 года

ISSN 2219-3758

Правила оформления рукописей, направляемых в редакцию журнала, высылаются по запросу по электронной почте.

СОДЕРЖАНИЕ
CONTENTS

УДК 004.942

ВЫБОР И ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОВ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ДАННЫХ КЛАВИАТУРНОГО ПОЧЕРКА

Н.Е. Юрьева

В данной работе проведён анализ методов визуализации данных клавиатурного почерка, описан ряд методов представляющих наибольший интерес с точки зрения прикладной области и обосновано их применение. Даётся описание разработанного веб-приложения предназначенного для сбора и предварительного анализа данных клавиатурного почерк.

This study presents an analysis of keyboard handwriting data visualization methods, the number of methods that are most suitable for application area are described, and their application is justified. The description of the developed web application intended for collection and preliminary analysis of the keyboard handwriting data is given.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА
Визуализация данных, клавиатурный почерк, веб-приложение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Всё более важное место в жизни человека занимают информационные технологии, а использование компьютера для решения повседневных и профессиональных задач стало нормой. В подавляющем большинстве случаев, для реализации человеко-машинного взаимодействия, в случае компьютерных систем, используется клавиатура и мышь. Набор текстов на компьютере постепенно вытесняет классический рукописный способ выполнения текстов. Так же как и в «классической форме почерка» [1,2] неизбежно в процессе печати текста находят своё отражение многие особенности личности человека или свойства, присущие группам лиц. У каждого человека проявляется свой уникальный “почерк” – набор динамических характеристик печати. Индивидуальность пользователя проявляется в скорости набора символов, привычке использовать основную или дополнительную часть клавиатуры, характере «сдвоенных» и «строенных» нажатий клавиш, в излюбленных приемах управления компьютером и т. д. [4,3]

Методы оценки этих параметров по данным клавиатурного почерка вызывают всё больший интерес, по мере распространения электронных средств ввода.

Актуальность данной темы обусловлена двумя основными факторами – востребованностью исследований в области клавиатурного почерка и низким уровнем их программно-технического обеспечения.

В рамках данной работы, через создание тонкого клиента, решается одна из подзадач программно-технического обеспечения, а именно визуализация сырых экспериментальных данных. Стоит отметить, что даже незначительный набор методов визуализации, интегрированный в систему сбора данных о динамических характеристиках набора текста, способствует интенсификации проведения исследований и повышает привлекательность инструмента для конечного пользователя (исследователя).

2. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ И ПЕРВИЧНЫЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ ИССЛЕДОВАНИЯ

В данном разделе будут подробно рассмотрены и описаны выбранные автором методы визуализации и обосновано их применение в задачах исследования клавиатурного почерка.

2.1 Тепловая карта

Тепловая карта — это графическое представление данных, где дополнительные переменные отображаются при помощи цвета. С помощью тепловой карты можно понять, какие зоны, например, сайта, используются чаще всего, или как в данном случае – какие клавиши чаще всего нажимал респондент во время исследования [5].

Преимущества подобного средства представления данных, трудно переоценить, так как тепловые карты просты для восприятия, но при этом часто позволяют делать достаточно точные выводы о динамике развития сложных процессов.

В данной работе тепловые карты используются для представления информации о среднем времени, затраченном пользователем на поиск символа при вводе текста. Можно описать несколько гипотез общего вида, предварительная проверка которых возможна с использованием подобной визуализации:

- Гипотеза о сходстве/различии в динамике набора текста группами испытуемых, имеющими различные уровни фактора, рассматриваемого в исследовании. При этом наличие различий не подчиняющихся линейному закону (группа А набирает служебные символы быстрее группы Б, при отсутствии различий в динамике набора печатных символов) будет легко дифференцироваться от случая линейных различий (группа А набирает текст, медленнее группы Б).
- Гипотеза о наличии/отсутствии влияния контролируемого внешнего фактора на динамику набора текста заданным испытуемым.

2.2 Столбчатая диаграмма

Столбчатая диаграмма позволяет легко определить не только наличие различий в выполненных по некоторому параметру измерениях, но и дать достаточно точную оценку отношения этих измерений друг к другу. Хотя, на первый взгляд, тепловая карта решает аналогичную задачу, на самом деле она обеспечивает более простое, в субъективном плане, сопоставление векторов данных, но даёт меньшее представление об их относительных различиях. В то время как тепловая карта для сопоставления значений параметра требует операций в терминах отношений между градациями цвета, столбчатая диаграмма позволяет перейти к отношениям высот. Такая задача имеет значительно более простое умозрительное решение. Среди примеров использования в контексте предметной области можно назвать:

- Уточнение и детализация интерпретаций выполненных с использованием тепловых карт.
- Поиск выбросов и артефактов в исходных данных.
- Оценка сходств различий в динамике ввода текста, для заданной пары (небольшой группы) символов.

2.3 Линейная диаграмма

Линейные диаграммы используются для характеристики вариации, динамики и взаимосвязи.

Данный вид диаграмм применяется для графического представления зависимости значений двух переменных. Одним из наиболее частых случаев применения линейной диаграммы можно считать отображение динамики измеряемого показателя во времени или сравнение динамики развития нескольких процессов, характеристики которых измерялись одномоментно (в таком случае в одной области построения отображается несколько кривых/ломанных). Очевидно, что такая форма представления данных позволяет со значительной точностью установить наличие корреляции между парой значений, а так же дать общую характеристику отображаемому процессу.

В разработанном модуле по оси абсцисс на подобном графике располагаются символы текста введённого пользователем, от первого до последнего, а по оси ординат абсолютное время, затраченное на его поиск на клавиатуре. Анализ графика позволяет дать предварительный ответ на следующие общие вопросы:

– Существует ли временный эффект научения (ускоряется ли набор по мере работы) и, при существовании такого эффекта, существуют ли индивидуальные/групповые различия в его проявлении.

– Проявляется ли эффект утомления (замедление набора) и если да, то для каких групп пользователей и в какой степени.

– Существуют ли символьные группы (биграммы, триграммы, целые слова), для которых значительно выражено изменение динамики набора по отношению к остальному тексту.

2.4 Базовые статистики

Помимо визуализации данных исследования, модуль осуществляет вычисление простейших статистик для каждого респондента и позволяет экспортировать их прямым копированием таблицы из окна браузера в большинство современных табличных редакторов. В значительном числе случаев (в частности, проверке гипотез о групповых сходствах/различиях), сырые данные не представляют практического интереса. Система предоставляет данные о мерах центральной тенденции (медиане и математическом ожидании), а так же стандартном отклонении для времени ввода символов и времени ввода слов. Дополнительно в данной таблице хранятся данные об абсолютном количестве операций редактирования (использования клавиши backspace) и количестве случаев прерывания ввода (превышения интервала между вводом символов). Эти данные после копирования могут быть произвольно обработаны в стандартных статистических пакетах, а также использованы для настройки обучаемых структур, например, в качестве входов нейронной сети, выходом которой будет метка группы («высокий уровень стресса»/«низкий уровень стресса» и т.п.)

В заключении данного раздела хотелось бы отметить, что спектр гипотез, предварительная проверка которых возможна, в частности, за счёт реализованных средств визуализации достаточно широк и перекрывает значительный процент конкретных задач. А проведение пилотажного исследования от сбора данных до интерпретации требует от пользователя минимального набора действий. С технической точки зрения, ему необходимо отправить ссылку на форму ввода (размещённую в сети интернет) и инструкцию группе респондентов, а затем ознакомиться с описанными графиками. С практической точки зрения, продумывание дизайна эксперимента, всё ещё остаётся ключевой задачей, не поддающейся автоматизации в общем виде.

3. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Реализацию разработанного в рамках данной работы проекта можно разделить на несколько независимых подзадач: построение тепловых карт скорости набора клавиш, построение столбчатых диаграмм времени поиска символа, построение графика динамики набора текста, формирование таблицы базовых статистик. Для решения каждой из этих подзадач требуется разработка кода клиентской и серверной части [6].

Модуль построения первичных статистик на основании собранных экспериментальных данных, формирует сводную таблицу, содержащую набор статистических показателей для каждого респондента, принимавшего участие в исследовании клавиатурного почерка (рис.3.1)

Имя	Отчество	Фамилия	Возраст	Пол	Медиана ввода симв. (мс).	Ср. инт. ввода симв. (мс).	Ст. отк. ввода симв. (мс).	Медиана ввода слов (мс).	Ср. инт. ввода слов (мс).	Ст. отк. ввода слов (мс.)	Прерыв.	Backsp.
Поликсения	Ильинична	Шварц	69	Мужской	180	232	173.63	360	568	447.28	0	0
Анна	Михайловна	Карлина	22	Женский	270	435	642.42	1552	1747	1471.79	2	3
Иван	Иванович	Иванов	56	Мужской	202	330	497.09	1619	1858	1434.24	0	0
Петр	Петрович	Петров	18	Мужской	180	306	283.76	1733	2010	1434.92	1	0
Евгения	Германовна	Кузьмина	50	Женский	216	301	316.01	1890	2014	1749.79	0	2

Рис.3.1 Пример результатов работы модуля построения таблицы первичных статистических данных

Модуль визуализации тепловой карты состоит из двух взаимосвязанных частей – клиентской и серверной (рис.3.2). Клиентская часть отвечает за взаимодействие с пользователем, обработку его запросов и визуальное отображение информации, а серверная за выполнение вычислительных функций и работу с базой данных.

Рис.3.2 Графическая модель клавиатуры с нанесённой тепловой картой

Пример работы модуля формирования столбчатой диаграммы показан на рис.3.3, а пример работы модуля формирующего диаграмму динамики работы текста на рис.3.4

Рис.3.3 Пример диаграммы нормированных временных интервалов

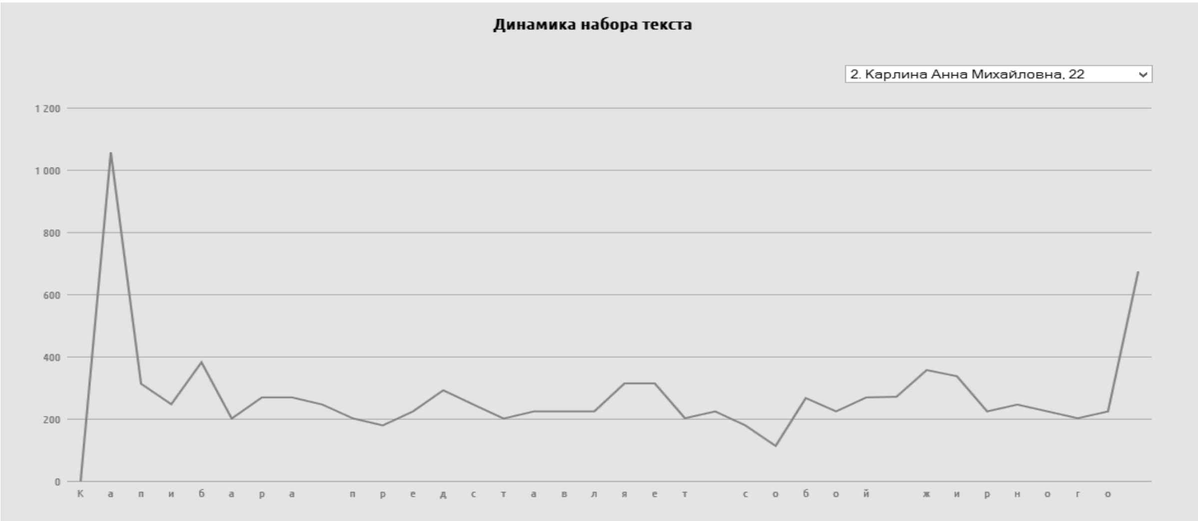


Рис.3.4 Диаграмма динамики набора текста

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Реализованные методы визуализации и первичного анализа в совокупности с системой сбора экспериментальных данных позволяют провести пилотажное исследование в рамках единой системы, при этом на плечи исследователя ложатся стандартные, слабо формализуемые задачи - постановка гипотезы, написание инструкции для респондентов и их отбор.

Собранные в автоматическом режиме данные визуализируются системой для последующей интерпретации, при этом требования к уровню технической грамотности исследователя ограничиваются умением пользоваться одним из нескольких браузеров. При необходимости, недоступные через веб интерфейс сырые данные всегда могут быть выгружены для осуществления дальнейшей обработки стандартными пакетами и принятия окончательного, статистически обоснованного решения об отвержении или принятии выдвинутой гипотезы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юрьева Н. Е. Поддержка принятия решений при построении психологического портрета личности на основе нейросетевого распознавания почерка: диссертация кандидата технических наук: 05.13.01 / Юрьева Наталия Евгеньевна; [Место защиты: Нижегор. гос. техн. ун-т им Р.Е. Алексеева]. - Москва, 2013. - 171 с.
2. Гунько Н.Е. Подход к решению задачи составления психологического портрета человека по почерку - Нейрокомпьютеры: разработка и применение, №2, 2012, с. 54-62.
3. Брюхомицкий Ю. Клавиатурная идентификация личности. - Издательство: «LAP LAMBERT Academic Publishing», 2012 г. -321с.
4. Биометрическая аутентификация пользователя по клавиатурному почерку. Анализ динамики нажатия клавиш. [Электронный ресурс] // Образовательный сайт fullref.ru. – 2009.
5. Желязны Д. Говори на языке диаграмм. Пособие по визуальным коммуникациям. – Москва: Манн, Иванов и Фербер, 2010. – 260 с.
6. Адам Т., Дэвид С. PHP. Рецепты программирования. – 3-е издание. – Санкт-Петербург : Питер, 2015. – 784 с.

Работа поступила 16.07.2017г.

УДК 159.93

СЕТЕВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПСИХОЛОГИЧЕСКИХ КОНСТРУКТОВ

С.Л. Артеменков

Представлен обзор современных зарубежных работ по сетевому анализу и моделированию психологических конструктов. Рассмотрен ряд проблем измерения в психометрии, понятия конструкта и номологической сети, рефлективная, формирующая и сетевая интерпретации психологических измерений. Представлены общие характеристики и особенности современных моделей психологических измерений, рассматривающих конструкты в виде сети измеряемых переменных и фокусирующихся на анализе сетевой структуры и сетевой динамики. Показана связь сетевых психометрических моделей, получивших широкое развитие в клинической психологии, с дифференциальной и динамической психологией, а также теорией динамических систем. Отмечено, что эта теория может служить основой для дальнейшего развития экспериментальной психологии в направлении обоснования использования бифуркационных психологических экспериментов.

The review of modern foreign works on network analysis and modeling of psychological constructs is presented. A number of measurement problems in psychometry, concepts of construct and nomological network, reflective, formative and network interpretation of psychological measurements are considered. General characteristics and features of modern models of psychological measurements that consider constructs in the form of a network of measured variables and focusing on the analysis of network structure and network dynamics are presented. The connection of network psychometric models, which have been widely developed in clinical psychology, with differential and dynamical psychology, as well as the theory of dynamical systems, is shown. It is noted that this theory can serve as a basis for the further development of experimental psychology in the direction of substantiating the use of bifurcation psychological experiments.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА
Психометрия, психологические конструкты, номологическая сеть, рефлективная модель, формирующая модель, сетевой анализ, сложные системы, динамическая система, латентные сетевые модели, бифуркационный эксперимент.

1. ВВЕДЕНИЕ

Научный подход в любой области науки отличает наличие способов и методов постановки и решения задач с целью получения новых знаний, обобщения и углубления понимания совокупности фактов и теорий. Базой для этого являются данные наблюдений и экспериментов, которые превращаясь в факты, служат основой для выдвижения гипотез и построения теорий, на основании которых объясняются дальнейшие факты и формулируются выводы и предположения. Полученные прогнозы проверяются новыми экспериментами, которые «являются средством проверки каузальных гипотез» [18, с. 39].

Основной стороной научного метода, независимо от вида науки, является требование объективности, исключающее субъективный подход толкования результатов. Развитие научной психологии тоже идет по этому пути несмотря на, по существу, субъективный характер психической деятельности. Основанные на интроспекции субъективные методы анализа теперь часто относят скорее к области искусства, чем к науке.

Превращение психологии в объективную науку представляет собой сложно выполнимую задачу. Например, по Б.М. Теплову «Предметом психологии является психика человека в ее обусловленности объективными условиями существования и той объективной деятельностью, которая составляет содержание жизни человека» [28, с. 287]. Вместе с тем научные исследования в психологии, предмет которой часто определяют понятием психики, связаны со многими парадоксами [26] и сложными процессами и явлениями [3; 5; 6].

В экспериментальной процедуре, направленной на установление некоторой закономерности «осуществляется манипулирование переменными и наблюдаются эффекты, производимые этим воздействием на другие переменные» [30, с. 168]. В простейшем случае проверяется наличие причинно-следственной связи между независимой и зависимой переменными при выполнении ряда условий связанными с тем, чтобы причина по времени предшествовала эффекту, осуществлялся контроль влияния других переменных и учет возможных ошибок в том числе для отсутствия правдоподобного альтернативного объяснения эффекта. Причинная зависимость при этом может проявляться в статистической связи и выражаться в виде некоторой функциональной зависимости между независимой и зависимой переменными, получающими численные значения. Эта функциональная зависимость выступает затем в качестве формальной модели реального процесса, который подвергается исследованию.

Для получения численных значений переменных, используемых в экспериментальной процедуре, применяются методы измерения, представляющие собой приемы и способы получения результата измерений путем использования соответствующих принципов, средств и процедур измерений. С измеряемым объектом соотносятся числовые или символьные значения, позволяющие представлять его свойства или качества в некоторой формальной системе. При этом важно, что «числовой результат измерения представляет существенные характеристики объекта измерения и, следовательно, позволяет делать осмысленные выводы о его свойствах» [14, с. 8].

С. Стивенс предложил в числах видеть только те свойства, которые отражают реальные отношения между эмпирическими объектами. В формализованном виде эта идея превратилась в представление о том, что измерение - это процедура, с помощью которой измеряемые объекты рассматриваются как носители определённых отношений, отражаемые в соответствующих семействах шкал, допускающих различные группы преобразований. При этом процедуры психологических измерений оказывают сильное влияние на значение измеряемой величины.

Другой важной характеристикой психологических измерений является многомерность измеряемых величин, т. е. предполагаемое наличие большого числа переменных и существенная их зависимость от большого числа параметров. При этом в отличие от наблюдаемых переменных концептуальные психологические переменные представляют собой по сути конструкты с латентными и взаимосвязанными свойствами.

Для исследования психологических конструктов приходится прибегать к особым методам их моделирования, включающим совокупные и комплексные методы проведения измерений и специальные методы математической обработки результатов измерений. Эти методы нельзя считать достаточно эффективными (в частности, в отношении установления причинно-следственных отношений) и в настоящее время они продолжают активно развиваться.

В данной работе представлен обзор современных работ, относящихся к вопросам сетевого моделирования и измерения психологических конструктов, а также к развитию экспериментального метода в психологии с учетом использования методологии динамических систем и бифуркационного подхода к экспериментированию.

2. ПРОБЛЕМЫ ИЗМЕРЕНИЯ В ПСИХОЛОГИИ

В психологических измерениях в связи со сложностью психической реальности с особой остротой встает онтологическая проблема, связанная с существование объекта измерения и стабильностью его свойств. В психологии, фактически, измеряют «воображаемые объекты» - в частности, образы, которые не являются постоянными и являются производными от многих различных процессов жизнедеятельности. Методологическая проблема измерений здесь проявляется в вопросах о существовании соразмерности и соизмеримости свойств объекта и числового или другого множества. Понятно, что психика, рассматриваемая как открытая сложная система, является и сложно измеряемой.

«Сегодня многие исследователи измерением называют не сравнение объекта измерения с эталоном, а отображение структуры объекта измерения в какое-то формальное множество» [15, с. 101]. Чтобы это отображение состоялось на практике надо осуществить взаимодействие с человеком в определенных условиях, сама организация которого представляет собой не что иное, как специализированный психологический эксперимент [15]. В частности, при воздействии стимула человек не является только пассивным отражателем и предпринимает некоторые «измерительные действия». Способ оценки стимула зависит от этих действий. Они, в свою очередь, зависят от организации стимульной реальности и от решаемой задачи. В результате в психологическом эксперименте при измерении, так или иначе, осуществляется «измерение измерителя» [13].

При этом человек, как «измеритель», может сам достаточно хорошо оценивать самые разные свойства окружающего мира, например, используя свое восприятие. Однако механизмы такой оценки являются непростыми и во многом остаются неясными [10-12; 20]. Например, в исследованиях восприятия, посвященных зрительной оценке величин и соотнесению размеров реальных объектов [21], было установлено, что сенсорные процессы связаны с существенными нелинейными преобразованиями и сосуществованием различных способов восприятия, а также с большой вариативностью и интерференцией этих способов при многократном их повторении. В частности, в следствие эффекта уменьшения нефиксированного объекта видимая величина периферийных объектов в сцене постоянно подвергается явному искажению в зависимости от переключения точек фиксации взора [22; 84]. При восприятии размеров объектов этот эффект обусловливает образование гибкого взаимного переключения константного и аконстантного способов восприятия [21]. Процесс зрительной оценки величин физических объектов, оказывается при этом функционально гибким и парадоксальным образом в зависимости от задачи может обеспечивать достаточную точность и достоверность результирующих оценок. Фактически, это происходит на основе целого ряда «искажений» и образования анизотропных отношений [12; 20; 21].

С системной точки зрения психологические измерения связаны с процессами, происходящими в открытых сложных системах [3-6]. Особые ограничения, которые накладываются на системы и методы измерений, здесь нельзя считать автоматически выполняющимися. Вводимые ограничения требуется проверять на практике. В частности, одной из проблем измерений в психологии является проблема обобщения измерений, проведенных на небольшой группе испытуемых, на большую группу людей. Как правило при этом прибегают к помощи методов теории вероятностей и математической статистики. Однако, теория вероятностей во многих случаях может быть только иллюзией решения проблемы, в частности, постольку, поскольку эта теория относится к однородным повторяющимся явлениям, а психические явления являются сложными и часто уникальными по самой своей сути. В результате преувеличение объяснительных возможностей теории вероятностей может приводить к тому, что психологически более сложное и во многом адекватное поведение может трактоваться как ошибочное на том основании, что оно не соответствует результатам, следующим из теории вероятностей для простых событий [7; 8; 32].

В отличие от особых свойств, которые отличают члены класса друг от друга, общие (родовые) свойства принадлежат всем членам данного класса. Сложность систем работает против возможности осуществлять обобщения и в конкретных условиях приводит к порождению новых, часто уникальных качеств организации целого [3-6]. В частности, эмерджентность или «проявление» предполагает возможность самоорганизации и образования интегральных системных качеств и свойств, специфичных именно для системы в целом и не выводимых из известных свойств ее элементов и способов их соединения. Известно также, что процессы в по-настоящему сложных системах нельзя полностью моделировать в существующих компьютерах, основанных на машине Тьюринга [3; 5].

Как было отмечено ранее количество взаимосвязанных факторов, которые следует принимать во внимание при проведении психологических исследований, в принципе чрезвычайно велико. Не меньшим остается и количество факторов, принципиально не поддающихся контролю в процессе экспериментов. Принципиальным является также вопрос о возможности выделения конкретных концептуальных переменных или факторов в качестве оснований для психологических процессов и явлений. Измеряемые психологические переменные обычно относятся к описанию процессов на уровне функционирования и взаимодействия психических продуктов в иерархии их «проявлений». Процессы порождения этих продуктов при этом остаются скрытыми и не могут быть описаны или объяснены через функционирование [3; 5].

3. ПОНЯТИЯ КОНСТРУКТА И НОМОЛОГИЧЕСКОЙ СЕТИ

Психологический инструменты (тесты) призваны измерять определенные психологические качества, свойства, черты, особенности, признаки и т. п. Согласно классической теории: психологическое тестирование является разновидностью процедуры измерения свойств объекта. Вводя понятие «свойство», обычно выделяют класс психических сущностей, которые этим свойством обладают. Свойства классифицируются по наличию некоторой интенсивности и ее изменениям.

Для того чтобы определить степень обоснованности измерения психологического свойства недостаточно ограничиться представлением о свойстве как таковом. Необходимо знать, что будет происходить при любых отклонениях от заданного свойства, его преобразованиях и его отношениях с другими свойствами. Нужно иметь представление о том более широком контексте, который включает в себя данное свойство. Этот контекст включает как знание об определенной психической реальности, так и событийную модель содержания поведенческих событий.

В психометрии такой более широкий контекст предполагает понятие конструкта, что позволяет в целом структурировать исследуемую реальность, представляемую в виде достаточно сложной модельной системы [47; 82]. Конструкт определяется посредством указания так называемой номологической сети (см. рисунок 1), определяющей закономерные взаимосвязи конструкта с другими сущностями. «Лучшим конструктом является тот, вокруг которого мы можем построить наибольшее количество умозаключений самым прямым образом» [47, с. 288].

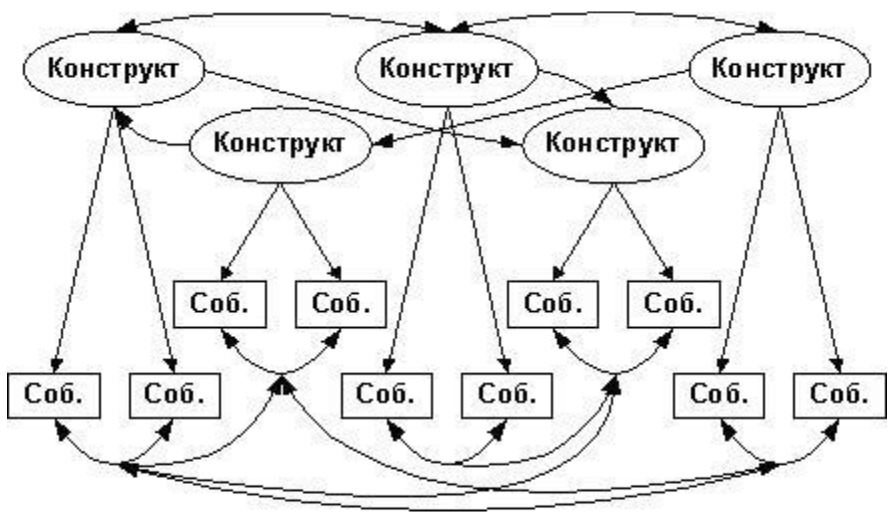


Рис. 1. Общий вид номологической сети, определяющей взаимосвязи между конструктами и связанными с ними событиями [91].

Номологическая сеть дает представление о понятиях (конструктах), составляющих интерес исследования, о их наблюдаемых проявлениях (событиях) и совокупности (горизонтальных и вертикальных) взаимосвязей между ними. Определить конструкт – это значит указать каким закономерностям (взаимосвязям) он подчиняется. Закономерности могут относиться как к наблюдаемым, так и теоретическим элементам. Отношения между элементами должны подчиняться «правилам», которые могут быть причинными или статистическими. Конструкт только тогда допустим, когда по крайней мере некоторые из закономерностей, для которых он является предметом, включают наблюдаемые события. Если это не так, то мы можем определить самосогласованную сеть понятий, которые не имеют отношения к реальному миру и довольно много таких сетей было и может быть определено.

Разработка номологической сети конструкта, фактически, представляет собой изучение и уточнению знания о конструкте. Развитие представлений о конструкте связано с добавлением новых отношений, или между уже существующими элементами сети, или между этими элементами и новыми элементами вне сети. В классическом понимании это развитие в целом и составляет основную задачу психометрии как науки.

При этом, с одной стороны, следуя Оккаму, не нужно множить сущее без необходимости, а с другой, согласно Эйнштейну, не следует делать вещи проще самого простого. Для идентификации отдельных средств, «играющих ту же роль в той же сети», предлагается руководствоваться информационным принципом: если нечто не производит различия, то оно и не имеет отличия.

Идея номологической сети расширяет обычный контекст измерения психологических качеств и свойств, которые в результате измерений представляются не отдельными размерностями, а входят в некоторое пространство взаимосвязанных латентных факторов. Выделение отдельного конструкта зависит от предпосылок конкретной теории. В свою очередь, возможности проверки теории зависят от ясного определения конструкта – это включает как обозначение того, чем конструкт является, так и того, чем он не является.

Для проектирования номологической сети психологу, с одной стороны, необходимо определить поведение, связанное с конструктом (включая внутренний опыт самоотчета), а, с другой стороны, определить другие конструкты, которые могут быть связаны с данным конструктом и не должны быть полностью отделены от него. В целом такая работа связана важным понятием конструктивной валидности, которое лежит в основе практически любого исследования с использованием латентных измерений. Если психологический тест или эксперимент не имеет конструктивной валидности, то его результаты будет трудно достоверно интерпретировать. Поэтому неудивительно, что понятие конструктивной валидности более полувека находится в центре теоретического и практического внимания многих исследователей, особенно в личностной, клинической, образовательной и организационной психологии, где существом многих исследований является диагностика индивидуальных различий, относящихся к различным гипотетическим конструктам [1; 82].

Несмотря на важность концепции валидности, не существует простого способа для количественной оценки той степени, в которой измерение конструкта является обоснованным и достоверным. В любом случае приходится прибегать к помощи сравнений с другими определениями, критериями или измерениями заданного конструкта. Исследователи обычно устанавливают конструктивную валидность, представляя корреляции между конструктом и рядом других измерений, которые теоретически должны быть связаны с ним (конвергентная валидность) или независимы от него (дискриминантная валидность).

4. РЕФЛЕКТИВНАЯ И ФОРМИРУЮЩАЯ МОДЕЛИ ИЗМЕРЕНИЙ

С каузальной точки зрения в номологической сети в первую очередь реализуется так называемая рефлективная теоретическая модель измерений. Эта модель соответствует тому, как многие теоретики в психологии думают о связи психологических конструктов и наблюдаемых событий. Латентный фактор (конструкт) является причиной появления реальных признаков, которые могут быть измерены на практике [38; 65]. Так, например, конструкт нейротизма в опроснике NEO-PI-R, представленный на рисунке 2, рассматривается в качестве общей причины наблюдаемых оценок 1-48, что отражается направлением стрелок [88]. Толщина стрелок отражает факторную нагрузку. Признаки во многом взаимозаменяемы и корреляции между ними предполагаются близкими.

Концептуальная идея рефлективных моделей часто используется в клинической психологии в качестве плана реалистичной картины психического расстройства и его симптомов. Психическое расстройство считается фактором, вызывающим его наблюдаемые симптомы (например, депрессия вызывает усталость и мысли о самоубийстве). Подобным же образом, конструкты личности, такие как нейротизм, можно рассматривать как общую причину наблюдаемого нейротического поведения, связанного с чувством неуверенности и беспокойством о том, что что-то происходит не так [53]. Набор индикаторов, с помощью которых измеряются наблюдаемые последствия действия причинных факторов, можно затем использовать для того, чтобы делать выводы об индивидуальных различиях в конструктах [52].

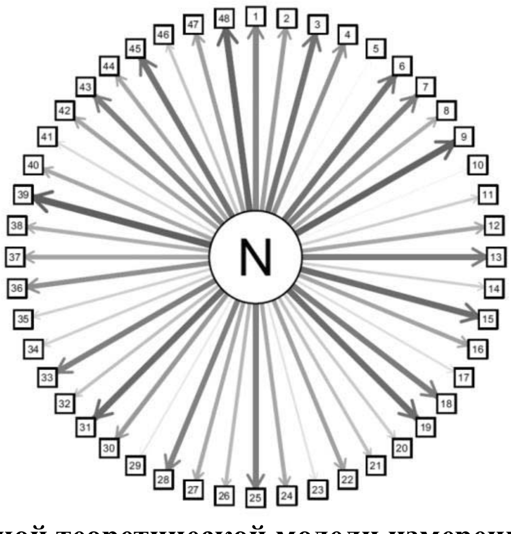


Рис. 2. Пример рефлективной теоретической модели измерений конструкта нейротизма (из работы [88]).

Таким образом, в рефлективных моделях латентная переменная центрального фактора функционирует аналогично незаметной общей причине [83]), а наблюдаемые переменные (например, оценки заданий или частей теста) моделируются как функция общей латентной переменной и дисперсии ошибки выполнения конкретного задания. Известно, что рефлективные модели широко представлены в качестве «моделей измерений» в современной теории тестов [79]. Примерами являются модели IRT Раша (1960), Бирнбаума (1968) и политомическая модель Самеджимы (1969), общие модели факторов [64; 68], модели латентного класса [69] и латентные профильные модели [35; 76].

В точной рефлективной модели наблюдаемые корреляции между индикаторами, по сути, являются ложными. Наблюдаемые индикаторы должны коррелировать, но они делают это только потому, что у них есть причина, а именно исходный конструкт. Такое представление имеет смысл в случае уподобления ситуации измерения, например, измерению физической температуры разными термометрами. Любая корреляция между показаниями термометров обусловлена тем, что они измеряют одно и то же, а именно температуру одного и того же объекта в одинаковых условиях. Прямой причинно-следственной связи между измерениями термометров нет, поскольку функционирование одного термометра непосредственно не вызывает показания температуры на другом термометре. Таким образом, можно рассматривать корреляции между термометрами как сугубо ложные, и это действительно разумное предположение о моделях, которые стремятся уловить идею о том, что отношение между реализуемыми событиями и конкретным конструктом или фактором является только одним из валидных измерений этого конструкта.

На практике факторные модели часто являются более сложными, что, в частности, имеет место при учете влияния многих конструктов на наблюдаемые переменные. Такого рода модели широко применяются в современном факторном анализе, а также в методах структурного моделирования [17; 24; 25; 29]. В психологической перспективе латентные факторы, определяемые при помощи факторного анализа, представляют собой психологические конструкты, в то время как со стороны метода, они не причинные факторы, а только описательные понятия, неправильная трактовка которых может приводить к принципиальным искажениям в интерпретациях [16].

В формирующей теоретической модели измерений наоборот признаки все вместе определяют нейротизм как отдельный фактор (см. рисунок 3). Задания 1-48 на рисунке 3 вместе образуют общий фактор нейротизма в опроснике NEO-PI-R. Стрелки направлены в обратную сторону и их толщина отражает вклад каждой из измеряемых переменных (в частности, связанных с оценками тестовых заданий) в общий конструкт.

В формирующих моделях общий конструкт является составным фактором и определяется как функция от наблюдаемых переменных. Для построения оптимальных факторных функций используют анализ главных компонентов и методы кластеризации. Введение остаточной дисперсии позволяет превратить составной фактор в латентный. Составной фактор действует аналогично общему эффекту [83], и его обусловленность наблюдаемыми переменными индуцирует ковариацию среди этих переменных, даже если они были безусловно независимыми.

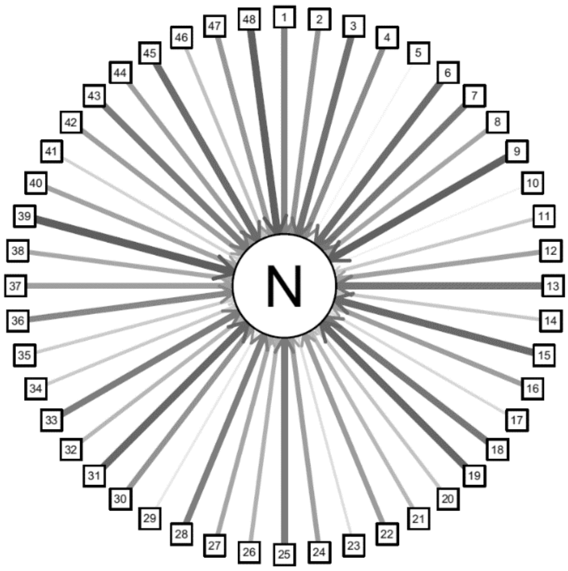


Рис. 3. Пример формирующей теоретической модели измерений (из работы [88]).

В формирующей модели наблюдаемые признаки не являются взаимозаменяемыми, потому что они фиксируют различные аспекты общего конструкта. В примере с нейротизмом это означает, что «чувство неуверенности» и «беспокойство о том, что что-то происходит не так», представляют различные аспекты конструкта «нейротизм». Таким образом, удаление признака потенциально может повлиять на формирование конструкта [39; 53]. Кроме того, здесь нет априорного предположения о том, как признаки должны коррелировать между собой, т.е. значения корреляций между ними могут быть самыми разными.

На практике обе модели измерения вызывают многие вопросы и дискуссии [61], в том числе связанные с выбором модели [36; 51]. При использовании для определения взаимосвязи между переменными статистических методов вычисления корреляций, выбор направления причинности в модели измерений оказывается довольно трудным [53]. Поэтому для исследования каузальных связей необходимо использовать специальные методы [23]. Часто при проведении измерений невозможно показать реальные процессы, определяющие причинные отношения в модели. В частности, это связано с тем, что, как правило, в психометрических моделях время не представлено в явном виде и динамика процессов не раскрывается.

Следует также учитывать, что реальные отношения между измеряемыми переменными могут находиться в сложной зависимости. Каузальные отношения между наблюдаемыми признаками, вероятно, существуют для многих психологических конструктов и для выявления этих отношений нужны более совершенные модели измерений. Кроме того, большинство конструктов в психологии, как например «общий интеллект», не являются эмпирически идентифицируемыми, что затрудняет исследование причин. Действительно, можно представить, как трудно было бы исследовать влияние курения на рак легкого, если бы единственным показателем курения было наблюдение самого рака легкого [88].

Эти и другие проблемы позволяют поставить под сомнение само использование моделей измерения латентных переменных в психологических исследованиях [74]. Ряд авторов утверждает, что потенциально более эффективной для изучения психологических конструктов является сетевая модель измерений [41; 50].

5. СЕТЕВАЯ МОДЕЛЬ ИЗМЕРЕНИЙ

В сетевой теоретической модели измерений конструкты определяются как системы причинно-связанных наблюдаемых переменных. Таким образом, конструкт, подобный «депрессии», рассматривается не как латентный фактор, который лежит в основе таких симптомов, как «недостаток сна» или «усталость», и не как общий эффект, построенный из этих симптомов, а как система причинно-следственных связей, существующая между самими этими симптомами (например, недостаток сна приводит к усталости и т. д.) [88].

Наблюдаемые переменные, которые обычно считаются признаками латентных переменных, можно считать автономными причинными сущностями в некоторой сети динамических систем. Вместо того, чтобы позиционировать в качестве основной причины латентную переменную, здесь рассматривается сеть непосредственно причинно-связанных объектов [40; 41; 46], в результате чего можно во многом избежать указанных выше проблем, относящихся к рефлективной и формирующей моделям измерений. Такой сетевой анализ устраняет само понятие латентной переменной [46; 81].

Сетевой анализ получил широкое развитие в психопатологии [43; 59]. Например, в сетевой динамической модели конструкт нейротизма является сетью многих переменных, схематически представленной в виде графа. Для рассмотренного ранее пятифакторного личностного опросника NEO-PI-R вершины графа соответствуют заданиям 1-48, а толщина ребер отражает степень корреляции между признаками нейротизма [88].

С использованием современных технологий становится возможным проводить массовые измерения самых различных наблюдаемых переменных, как, например, данные fMRI [87] или всевозможные признаки психических расстройств [81], и обрабатывать значения больших массивов сетевых признаков. На рисунке 4 приведена сетевая модель диагностических признаков из руководства по психическим расстройствам DSM-IV [42]. Каждый индивидуальный признак (симптом) является узлом сети и представлен на рисунке одной точкой. Для визуализации сети использованы методы сетевого анализа [37]. Объединение сильно коррелированных наборов узлов [60] приводит к появлению групп узлов, образующих отдельные кластеры, которые могут быть соотнесены с конструктами соответствующих психических расстройств.

С точки зрения сетевой модели, любой конструкт рассматривается как сеть переменных и олицетворяет некоторый относительно независимый контекст, который может быть связан с отдельным понятием или особой концептуальной ситуацией. Отдельные измеряемые переменные являются здесь не пассивными индикаторами латентной переменной, а автономно функционируют в общей системе отношений и каузально связаны. Например, для депрессивного расстройства выявлены соответствующие гомеостатические процессы, которые опосредуют связи между «недостатком сна» и «усталостью» [31]. В исследованной сети категорий теста эмоциональной креативности соответствующие переменные сети связаны в том смысле, что они имеют взаимозависимые пути осуществления переходов между узлами сети [9].

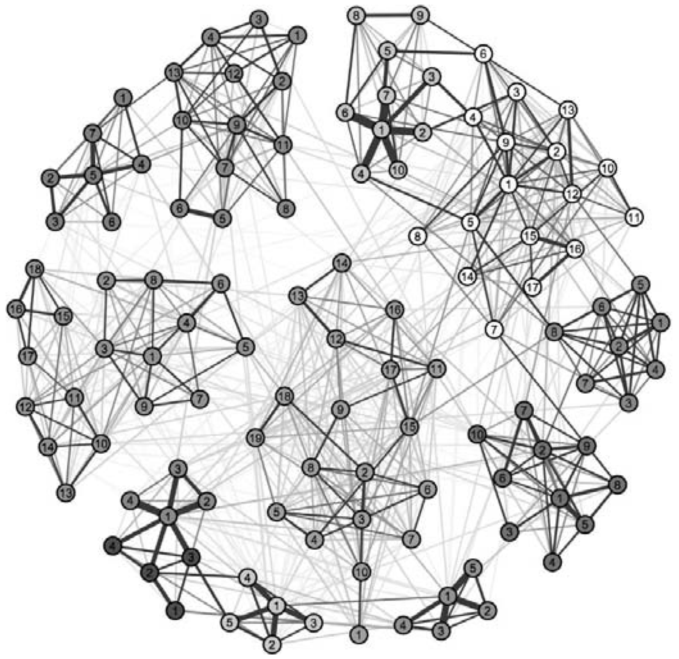


Рис. 4. Сетевая модель 120 симптомов для двенадцати психических расстройств (из работы [42]).

Помимо методологических аспектов сетевой анализ поднимает более общую эпистемологическую проблему для психологии [40; 49]. Изучение конструкта здесь означает изучение сети, сосредоточенное главным образом на структуре и динамике сети. Связь между наблюдаемой переменной и конструктом не должна интерпретироваться как одно из измерений: наблюдаемые переменные не измеряют конструкт, а являются его частью. Общее представление о конструкте формируется путем изучения связей между наблюдаемыми переменными и их функций [49; 50; 58; 77].

Поскольку в сетевой модели имеют дело только с наблюдаемыми событиями, то это может способствовать объективности понимания конструктов. Они рассматриваются не только в качестве «фактов сознания», которые, по выражению Б.М. Теплова, «не могут быть поняты сами из себя» [28, с. 307]. «Объективность метода психологии зависит от того, каковы те понятия, в которых ведется анализ изучаемых явлений. Одно из важнейших требований объективного метода: психологические понятия должны включать объективные признаки соответствующих явлений психической деятельности» [28, с. 306].

Другой стороной движения к объективности в науке является использование математических моделей, более адекватных пониманию конкретной системной реальности. Дифференциальные сетевые модели в этом смысле могут способствовать лучшему описанию сложной психологической реальности.

6. СЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Общий подход для формализации и изучения поведения сети взаимосвязанных переменных во времени – это теория динамических систем. На возможности этой математической теории и необходимость перестройки психологии в сторону работы с динамическими системами одним из первых обратил внимание К. Левин. Он считал, что в психологии должна быть проведена перестройка самого типа психологического мышления. Как и в естественных науках (прежде всего в физике) следует перейти от «вещных понятий» к реляционным (относительным). Свою позицию он выразил в статье «Переход от аристотелевского к галилеевскому способу мышления в биологии и психологии», опубликованной в 1931 г. [19].

Аристотелевская физика базировалась не на эксперименте и математических подсчетах, а на выделении из отдельных случаев некоторой общей тенденции. Аристотель придавал собственное значение каждому объекту, обладающему, по его мнению, стремлением к заданной цели. В результате характер и направление физических векторов в Аристотелевской динамике полностью определяются природой рассматриваемого объекта. Физика здесь подобна психологии, которая ищет причины (детерминанты) поведения внутри отдельного индивида и занимается их классифицированием. В психологии в сфере мотивов и потребностей индивидуальные особенности и ситуативные нюансы часто игнорируются и исключаются из анализа.

Способ мышления Галилея, как предтечи современной физики, был иным: он показал зависимость движения объектов от внешних условий, от пространственно-временного контекста. В современной физике существование физического вектора всегда зависит от взаимосвязи нескольких физических факторов, в частности от взаимоотношения объекта с его окружением, а характеристики поведения (например, месторасположение и скорость объектов) и их взаимозависимость приобретают самостоятельное значение, играющее определяющую роль в искомых закономерностях.

Если результирующий вектор в начальный момент имеет некоторое направление, это вовсе не означает, что реальный процесс будет сохранять это направление постоянно. По мере протекания процесса будет изменяться вся ситуация в целом, изменяя тем самым величину и направление векторов, которые в данный момент определяют динамику изменений в системе. При этом важно, что: «если мы пытаемся вывести динамику процесса, особенно определяющие его векторы, из действительного хода событий, то мы, как правило, вынуждены обращаться к *дифференциалам* процесса» [19, с. 78].

Система дифференциальных уравнений определяет такую отдельную закономерность, при которой исторически данное течение процесса не является непосредственным выражением первичных векторов (начальных условий). Не существует тенденции сохранения курса, а динамика его изменения выводится из положения того или иного отдельного конкретного момента в контексте всей конкретной целостной ситуации (начальное состояние системы в данный момент времени и уравнения, которые описывают, как предыдущее состояние определяет текущее состояние).

В результате при рассмотрении динамики поведения человека для Левина представляет интерес возможная общая кондиционально-генетическая типология его поведения в связи с мотивацией поведения. Эта мотивация приобретает самостоятельное значение и должна быть отделена от предметно-смыслового содержания ситуации, так как это содержание может выступать только в форме образа. Главенствующее значение в этом случае по Левину приобретает то инструментально-ситуативное общее, что обусловливает всю ситуацию в ее целостности – это «жизненное» поле, которое охватывает одновременно внутренние (человека) и внешние (окружающее) факторы. Внешние (объективные) и внутренние (субъективные) факторы в такой динамической модели становятся, фактически, равнозначными, а основой для моделирования динамического поведения становится математическая теория динамических систем.

В современной психологии теория динамических систем, хотя и не получила очень широкого распространения, применяется ко многим процессам и структурам, включая когнитивные процессы [96], процессы восприятия и действия [57; 78], структуры интеллекта [92], модели личности [27], модели психологии развития [94] и др.

Для создания и анализа практических моделей динамических систем особенно актуальны различные притягивающие состояния (аттракторы), которыми наряду с отталкивающими множествами (репеллеры) характеризуется фазовое пространство (фазовый портрет) всех возможных состояний динамической системы. Если система близка к устойчивому равновесному состоянию (или к устойчивой замкнутой фазовой кривой типа предельного цикла), то она будет сходиться к нему и останется в таком виде. Например, сетевая модель депрессии может иметь два состояния аттракторов: неупорядоченное, депрессивное состояние и здоровое состояние. Достаточно большое возмущение системы, такое как стрессовые жизненные события, может побудить человека перейти от здорового состояния к депрессивному состоянию.

При изменении параметров может происходить качественное изменение фазового пространства динамической системы, связанное с изменением количества и типа особых точек и предельных циклов динамической системы. Теория бифуркаций изучает зависимость качественной картины фазового пространства динамической системы при непрерывном изменении одного или нескольких параметров. Разбиение пространства параметров системы на области с качественно разными структурами фазовых пространств определяет бифуркационную диаграмму динамической системы. В пределах каждой из этих областей структура особенностей фазового пространства качественно не меняется при малом изменении параметров.

Позволяя параметрам системы изменяться, система может показать качественные изменения в своей структуре (например, появляется новый аттрактор), что также позволяет смоделировать переходы психики из одного состояния в другое. Бифуркационные переходы качественно меняют систему фазового портрета, что, в частности, может приводить к «катастрофам» устойчивых состояний в системе [2]. В качестве характерного примера можно привести работы по моделированию состояний мультистабильности мозговых образований и, в частности, процессов двойственного восприятия объектов [66; 67].

Исследование изменений системного поведения с помощью бифуркационных преобразований открывает новые возможности постановки качественных экспериментов в психологии. Задачей эксперимента становится не определение некоторой функциональной зависимости между переменными, а установление бифуркационных переходов при изменении параметров системы, что приводит к качественному изменению системных аттракторов. Такого рода эксперименты, как правило, ориентируются на предварительного разработанную модель динамической системы, как например, в случае системного анализа нелинейной модели стресса и адаптации [71], но могут только подразумевать ее наличие для идентификации качественно разных поведенческих реакций [8; 86].

7. ОСОБЕННОСТИ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

В сетевой модели важным является то обстоятельство, что наблюдаемые переменные рассматриваются как причинно-автономные. Они могут отвечать, как за входящие, так и за исходящее каузальные изменения, т.е. могут определять взаимодействия, которые в сети могут осуществляться разными способами, что влияет на общую кластеризацию узлов сети. Например, неблагоприятные жизненные события, по-видимому, имеют более тесные связи с психологическими симптомами (например, депрессивным настроением), чем с вегетативными симптомами депрессии (например, проблемы концентрации) [72; 90]. Это говорит о том, что этиологические пути в психическое расстройство сами могут зависеть от внешних событий. Кроме того, вполне вероятно, что таких путей много, поскольку индивидуальные симптомы расстройства могут быть активированы самыми разными внешними факторами, которые сами могут образовывать новые, все более сложные сети.

С точки зрения сетевой модели границы между психологическими конструктами являются нечеткими по своей природе. Здесь нельзя избежать сопутствующих отношений, поскольку они присущи структуре сети. При этом существует два способа манипулирования сетью. Можно подвергать сеть стрессу посредством активации и деактивации наблюдаемых переменных, а также можно изменять силу сетевых связей. При этом в зависимости от заданных параметров сеть может вести себя, как отдельные виды слабо связанных конструктов, так и представлять собой практически сплошную среду.

Сети мотивируют изучение обратных связей и взаимосвязей, а не поиск скрытых сущностей. Холистический характер сетевого моделирования позволяет обнаружить большее количество разнообразных в том числе скрытых эффектов и не требует для их понимания поиска «генов», «нейронных коррелятов сознания» или нейронных моделей психических расстройств.

В динамических системах даже простые взаимодействия между переменными могут вызывать возникновение сложных явлений поведения в результате нелинейных взаимодействий между компонентами системы. Большинство психологических систем должны характеризоваться нелинейными отношениями, поскольку по крайней мере некоторые из их переменных естественным образом ограничены.

Другой особенностью взаимодействий в сетевых структурах являются циклические процессы. Например, циклические взаимодействия между переменными могут приводить к ситуации движения по нисходящей и восходящей спирали изменения состояний. Спираль может рассматриваться как явление, возникающее в связи с новыми причинными силами, которыми не обладал ни один из генерирующих элементов системы [88]. Сетевой подход учитывает эти проблемы естественным образом, что не может сделать никакая рефлективная или формирующая модель. Даже простые дискретные системы с циклическими взаимодействиями, могут обладать большим числом различных состояний, переключение между которыми осуществляется при изменении начальных условий в системе [11]. Реляционные системы с замкнутыми действующими причинными связями становятся по-настоящему сложными как в своей организации, так и поведении [3-6].

Вместе с тем замечено, что при всей громадности поведенческого пространства с системной точки зрения поведение людей имеет тенденцию «оседать» в относительно фиксированных областях, где они находится в относительном «равновесии» с самими собой и со средой [45]. Это определение динамического равновесия аналогично состоянию аттрактора в динамической системе, который можно определить, как «стабильное» состояние сильно связанной сети [40]. Онтология аттрактора сложной системы обычно определяется с использованием концепции «проявления» нового [62]. Аттрактор - это свойство, проявившееся из-за появления новых структур и функций. Это означает, что новое свойство не сводится к свойствам основных элементов и не предсказуемо из основных элементов взаимодействия [33; 75]. Проявляющиеся или эмерджентные свойства обретает собственное бытие и (в качестве латентных переменных) могут вступать в отношения на новом уровне иерархии процессов. Такая модель в принципе открывает новую перспективу для анализа и моделирования конструктов. В литературе по сетевому анализу некоторые авторы прямо связывают анализ сети с эмерджентными свойствами [46].

В нейропсихологии процессы «проявления» обычно происходят в сложной системе нейронов [33; 34; 55; 56; 97]. При сетевом анализе, «проявление» происходит из сложной системы компонентов. Но эпистемологическая проблема одна и та же и связана с новым качеством, которое не сводится к основным элементам системы. Поскольку психологические конструкты связаны с психическим равновесием индивида, их, возможно, следует рассматривать как реальности и состояния равновесия индивидов в их социальных взаимодействиях [95]. Представление этой реальности в виде модели аттракторов в динамической системе показывает, что аттракторы являют собой непредсказуемую специфическую организацию системы [34] и что они сложным образом зависят от окружающей среды и социального взаимодействия [44; 80]. В таком представлении психологический конструкт можно считать реальным еще и потому, что он существует как определенная социальная практика [63].

Таким образом, подход, учитывающий психологические конструкты как проявляющиеся или эмерджентные свойства в (сетевых) динамических системах, позволяет преодолеть существующие проблемы латентных измерений [93] и по-новому обосновать возможность использования моделей с латентными психологическими переменными [63]. Важно также, что с помощью введения эмерджентных латентных переменных можно уменьшить общую сложность системы, которая генерирует психологические конструкты. При этом эти конструкты можно рассматривать, как меж-субъективные реалии, которые могут выступать в качестве общей причины поведения, которая обусловливает относительно медленные изменения конкретных особенностей поведения.

8. РАЗВИТИЕ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

Проблема с формальными теориями динамических систем состоит в том, что почти все известные математические результаты относятся к детерминированным системам. В психологии мы обычно имеем дело с вероятностными системами и данными, характеризующимися высоким уровнем шума. Трудность состоит в том, чтобы получить из статистической картины структурно определенную связь между изменениями разных переменных. Один из способов получить жизнеспособный метод вывода таких отношений между переменными – это принять предположение о линейности и нормальности. Это предположение дает доступ к хорошо разработанным методам причинного вывода [83; 89]. Построение причинно-следственных систем с помощью таких методов вывода является статистическим маршрутом, который может использоваться для построения архитектуры сетей. Эти методы обычно работают через обнаружение отношений условной независимости [88]. Как только сетевая структура была выведена одним из вышеупомянутых способов, сеть может подвергаться дальнейшему анализу. Многие методы анализа структуры сети реализованы в бесплатном программном обеспечении, таком как R-пакет iGraph [48].

Модели измерений, связанные с латентной переменной, обычно предусматривают локальную независимость наблюдаемых событий. Однако, эти события вполне могут быть взаимосвязанными, что и подразумевает сетевой анализ. В предложенном новом варианте сетевого подхода модель латентных переменных и сетевой анализ не являются взаимоисключающими, они могут дополнять друг друга [54]. Психологические конструкты в виде сети латентных переменных считаются измеряемыми эмерджентными переменными рефлективным образом, как в классическом моделировании структурных уравнений [70; 73; 85]. После моделирования сети латентных переменных осуществляется сетевое моделирование показателей статистической ошибки [54]. Этот подход идентичен рассмотренному выше сетевому анализу, но основан на «остатках» латентной сети.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Психологические измерения связаны со многими особенностями и проблемами, которые необходимо учитывать на практике. Они представляют собой психологический эксперимент, в котором происходит «измерение измерителя», а с системной точки зрения исследователь имеет дело с многомерными процессами, происходящими в открытых сложных системах, где необходимо учитывать возможности осуществления процессов порождения новых свойств и иерархий отношений.

В психометрии относительно простой полезной моделью множества латентных переменных явилась модель номологической сети, определяющей взаимосвязь между конструктами и наблюдаемыми событиями. Для латентных переменных были разработаны две измерительные модели: в рефлективной интерпретации измеренный конструкт определяется в качестве общей причины наблюдаемых событий, в формирующей интерпретации измеряемый конструкт рассматривается как общий эффект наблюдаемых влияний.

В современном сетевом подходе предлагается использовать третью интерпретацию, в которой конструкты проявляются как особые эмерджентные свойства системы причинно-связанных измеряемых (наблюдаемых) переменных. При этом предполагаемые связанными психологические конструкты не постулируются заранее и при необходимости их введения соотносятся только с результатами сетевого анализа. В результате, с одной стороны, нет необходимости предварительного определения каких-либо латентных переменных, а с другой стороны, при анализе сети отдельные психологические конструкты могут быть выведены из сложной системы компонентов.

В плане выявления конструктов сетевой анализ хорошо зарекомендовал себя в клинической психологии. Однако имеются убедительные доказательства возможности применения сетевого подхода в других областях психологии. В частности, объяснительные ресурсы сетевой модели интеллекта могут конкурировать с другими современными теориями интеллекта [92]. Подходящей областью для сетевых приложений является исследование личности, поскольку атрибуты личности обычно относятся к компонентам, которые являются правдоподобными причинами и их последствиями.

Основой для анализа процессов в сетевых системах служат представления о дифференциальных отношениях и модели динамических систем, имеющих соответствующие состояния или траектории устойчивого равновесия, в качестве соответствующих эмерджентных свойств. При сетевом подходе психологический конструкт может быть соотнесен с некоторым психическим равновесием динамической системы в том смысле, что он характеризует свойство индивидов, возникающее в практике их социального взаимодействия, таким образом, что взаимозависимость индивидуумов со своей средой моделируется путем динамической интеграции взаимосвязанных событий. Внешние измеряемые переменные являются компонентами, которые характеризуют проявления этого взаимодействия, и тем самым могут стать объективной основой и для анализа латентных процессов. Поэтому важно отметить, что сетевой анализ и конструктивные модели с использованием латентных переменных не являются взаимоисключающими и могут являться взаимодополняющими подходами [54].

Применение теории динамических систем в психологии дает возможность расширить классические представления о психологическом эксперименте. Кроме обычного эксперимента, направленного на установление функциональной зависимости, в динамической психологии имеется возможность использования экспериментальных исследований бифуркационного типа. Задачей эксперимента здесь становится установление бифуркационных переходов при изменении параметров системы, что связано с качественными изменениями системных аттракторов. В этом отношении необходимо развитие экспериментальной психологии в направлении обоснования использования бифуркационных психологических экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1 Анастази А., Урбина С. Психологическое тестирование. 7-е издание. Санкт-Петербург: Питер, 2007. 688 с.

2 Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Едиториал УРСС, 2004. 128 с.

3 Артеменков С.Л. Трансцендентальная психология и проблемы исследования формопорождаюших процессов // Психология восприятия: Трансцендентальная перспектива. Ереван: Наири, 2017. С. 27-52.

4 Артеменков С.Л. Структурно-порождающие процессы в психике // XV Всероссийская научная конференция «Нейрокомпьютеры и их применение». М.: МГППУ, 2017. С. 226-227.

5 Артеменков С.Л. Аспекты моделирования и особые свойства сложных систем // Моделирование и анализ данных. 2016. № 1. С. 47–59. doi:10.17759/mda.04.

6 Артеменков С.Л. Реляционное моделирование психических функций // XIV Всероссийская научная конференция «Нейрокомпьютеры и их применение». М.: МГППУ, 2016. С. 128-129.

7 Артеменков С.Л. Модель сопредставленности для оценки вероятности объединения событий // Моделирование и анализ данных. 2014. № 1. С. 43–54.

8 Артеменков С.Л. Научные нормы и эвристики в оценке вероятности сопредставленных событий // Естественно-научный подход в современной психологии. М.: «Институт психологии РАН», 2014. С. 112-118.

9 Артеменков С.Л. Иниционно-семантическая модель дивергентной креативности [Электронный ресурс] // Психологическая наука и образование psyedu.ru. 2012. № 3. С. 1–15. URL: http://psyjournals.ru/psyedu_ru/2012/n3/55540.shtml (дата обращения: 14.11.2017).

10 Артеменков С.Л. Трансцендентальная психология как изменение образа мышления // А.И. Миракян и современная психология восприятия: сборник материалов научной конференции. М.: ПИРАО, 2010. С. 324–358.

11 Артеменков С.Л. Методология трансцендентальной психологии и проблемы моделирования и экспериментального исследования порождающих процессов // Моделирование и анализ данных. Труды фак-та ИТ (выпуск 2). М.: РУСАВИА, 2005. С. 37-57.

12 Артеменков С.Л. Психология восприятия и разработка новых телекоммуникационных интерфейсов // ТелеМультиМедиа. 2004. № 4. С. 15-19.

13 Артемьева Е.Ю. Психология и математические модели субъективного мира // Вестник Московского университета. Серия 14. Психология. 1990. № 3. С. 4-15.

14 Гусев А.Н., Уточкин И.С. Психологические измерения: Теория. Методы: Учеб. Пособие для студентов вузов / А. Н. Гусев, И. С. Уточкин. М.: Аспект Пресс, 2011. 319 с.

15 Зароченцев К.Д., Худяков А.И. Экспериментальная психология: учебн. Москва: ТК Велби, Проспект, 2005. 208 с.

16 Кулаичев А.П. О принципиальных искажениях метрических факторов в результате вращения // Моделирование и анализ данных. 2013. № 1. С. 78–87.

17 Куравский Л.С., Баранов С.Н. Компьютерное моделирование и анализ данных. Конспекты лекций и упражнения: Учеб. пособие. М.: РУСАВИА, 2012. 218 с.

18 Кэмпбелл Д. Модели экспериментов в социальной психологии и прикладных исследованиях. Москва: Прогресс, 1980. 392 с.

19 Левин К. Переход от аристотелевского к галилеевскому способу мышления в биологии и психологии // Динамическая психология: Избранные труды. М.: Смысл, 2001. С. 54-84.

20 Миракян А.И. Контуры трансцендентальной психологии. Книга 2. М.: ИП РАН, 2004. 384 с.

21 Миракян А.И. Константность и функциональная гибкость восприятия // Вопросы психологии. 1983. №4. С. 104-111.

22 Миракян А.И. Эффект уменьшения в процессе восприятия величин // Материалы III Всесоюзного съезда Общества психологов СССР. Т. 1. М., 1968. С. 135-136.

23 Митина О.В. Методы исследования каузальных связей // Экспериментальная психология в России: традиции и перспективы / Под ред. В.А. Барабанщикова. М.: Институт психологии РАН, 2010. С. 139-143.

24 Митина О.В. Моделирование латентных изменений с помощью структурных уравнений // Экспериментальная психология. 2008. Том 1. № 1. С. 131–148.

25 Митина О.В., Михайловская И.Б. Факторный анализ для психологов. М.: Учебно-методический коллектор Психология, 2001. 169 с.

26 Панов В.И. Парадоксы изучения психики и возможность их преодоления // Национальный психологический журнал. 2011. №1 (5). С. 50-54.

27 Рязанов Д.Ю. Анализ деструктивного поведения человека и социума в условиях современного экономического кризиса / Д.Ю. Рязанов // Вестник МГТУ Станкин. 2009. № 4. С. 132–138.

28 Теплов Б.М. Об объективном методе в психологии // Избранные труды: в 2-х т. Т. II. М.: Педагогика, 1985. 360 с.

29 Харман Г. Современный факторный анализ. М.: Статистика, 1972. 656 с.
30 Худяков А.И. Экспериментальная психология. Харьков: Гуманитарный Центр, 2016. 408 с.
31 Achermann P. The two-process model of sleep regulation revisited. Aviation, Space, and Environmental Medicine. 2004. 75, A37–A43.
32 Artemenkov S.L. Scientific conceptions and heuristics in cross-cultural communication and education in terms of a joint probability decision making. Riga: ISMA. Information Technologies, Management and Society, 2013, Vol. 6, No. 1. P. 20 – 30.
33 Barrett L.F. Bridging token identity theory and supervenience theory through psychological construction. Psychol. Inq. 2011. 22, 115–127. doi: 10.1080/1047840X.2011.555216.
34 Barrett L.F. The future of psychology: connecting mind to brain. Perspect. Psychol. Sci. 2009. 4, 326–339. doi: 10.1111/j.1745-6924.2009.01134.x.
35 Bartholomew D.J. Latent variable models and factor analysis. London: Griffin, 1987.
36 Baxter R. Reflective and formative metrics of relationship value: a commentary essay. Journal of Business Research. 2009. 62, 1370–1377.
37 Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D.-U. Complex networks: structure and dynamics. Physics Reports. 2006. 424, 175–308.
38 Bollen K.A. Structural Equations with Latent Variables. New York, NY: John Wiley. 1989. doi: 10.1002/9781118619179.
39 Bollen K.A., Lennox R. Conventional wisdom on measurement: a structural equation perspective. Psychological Bulletin. 1991. 110, 305–314.
40 Borsboom D. A network theory of mental disorders. World Psychiatry. 2017. 16, 5–13. doi: 10.1002/wps.20375.
41 Borsboom D., Cramer A.O.J. Network analysis: an integrative approach to the structure of psychopathology. Annu. Rev. Clin. Psychol. 2013. 9, 91–121. doi: 10.1146/annurev-clinpsy-050212-185608.
42 Boschloo L, van Borkulo C.D., Rhemtulla M., Keyes K.M., Borsboom D., Schoevers R.A. The Network Structure of Symptoms of the Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders. PLoS ONE. 2015. 10(9): e0137621. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0137621.
43 Bringmann L.F., Lemmens L.H.J.M., Huibers M.J.H., Borsboom D., Tuerlinckx F. Revealing the dynamic network structure of the Beck Depression Inventory-II. Psychol. Med. 2015. 45, 747–757. doi: 10.1017/ S0033291714001809.
44 Cervone D. Aligning psychological assessment with psychological science. Behav. Brain Sci. 2010. 33, 152–153. doi: 10.1017/S0140525X10000737.
45 Cramer A.O.J., Van Der Sluis S., Noordhof A., Wichers M., Geschwind N., Aggen S.H., et al. Dimensions of normal personality as networks in search of equilibrium: you can’t like parties if you don’t like people. Eur. J. Pers. 2012. 26, 414–431. doi: 10.1002/per.1866.
46 Cramer A.O.J., Waldorp L.J., Van Der Maas H.L.J., Borsboom D. Comorbidity: a network perspective. Behav. Brain Sci. 2010. 33, 137–150. doi: 10.1017/S0140525X09991567.
47 Cronbach L., Meehl P. Construct validity in psychological tests. Psychological Bulletin. 1955. 52, 281–302.
48 Csárdi G., Nepusz T. The igraph software package for complex network research. Inter Journal Complex Systems. 2006. 1695. Available from http://www.interjournal.org/.
49 Dalege J., Borsboom D., Van Harreveld F., Van Den Berg H., Conner M., Van Der Maas, H.L.J. Toward a formalized account of attitudes: the Causal Attitude Network (CAN) model. Psychol. Rev. 2016. 123, 2–22. doi: 10.1037/a0039802.
50 De Schryver M., Vindevogel S., Rasmussen A.E., Cramer A.O.J. Unpacking Constructs: a network approach for studying war exposure, daily stressors and post-traumatic stress disorder. Front. Psychol. 2015. 6:1896. doi: 10.3389/fpsyg.2015.01896.

51 Diamantopoulos A., Siguaw J. A. Formative versus reflective indicators in organizational measure development: a comparison and empirical illustration. British Journal of Management. 2006. 17, 263–282.
52 Dolan C.V., Oort F.J., Stoel R.D., Wicherts J.M. Testing measurement invariance in the target rotates multigroup exploratory factor model. Structural Equation Modeling. 2009. 16, 295–314.
53 Edwards J.R., Bagozzi R.P. On the nature and direction of relationships between constructs and measures. Psychological Methods. 2000. 5, 155–174.
54 Epskamp S., Rhemtulla M., Borsboom D. Generalized network psychometrics: combining network and latent variable models. Psychometrika. 2017. doi: 10.1007/s11336-017-9557-x.
55 Fingelkurts A.A., Fingelkurts A.A. Making complexity simpler: multivariability and metastability in the brain. Int. J. Neurosci. 2004. 114, 843–862. doi: 10.1080/00207450490450046.
56 Fingelkurts A.A., Fingelkurts A.A., Neves C.F.H. Consciousness as a phenomenon in the operational architectonics of brain organization: criticality and self-organization considerations. Chaos Solitons Fractals. 2013. 55, 13–31. doi: 10.1016/j.chaos.2013.02.007.
57 Fleischer F., Caggiano V., Thier P., Giese M.A. Physiologically Inspired Model for the Visual Recognition of Transitive Hand Actions. The Journal of Neuroscience. 2013. 15(33), 6563-80.
58 Fried E.I. Problematic assumptions have slowed down depression research: why symptoms, not syndromes are the way forward. Front. Psychol. 2015. 6:309. doi: 10.3389/fpsyg.2015.00309.
59 Fried E.I., van Borkulo C.D., Cramer A.O.J., Boschloo L., Schoevers R.A., Borsboom D. Mental disorders as networks of problems: a review of recent insights. Soc. Psychiatry Psychiatr. Epidemiol. 2017. 52, 1–10. doi: 10.1007/ s00127-016-1319-z.
60 Fruchterman T.M.J., Reingold E.M. Graph drawing by force-directed placement. Software – Practice & Experience. 1991. 21, 1129–1164.
61 Howell R.D., Breivik E., Wilcox J.B. Reconsidering formative measurement. Psychological Methods. 2007. 12, 205–218.
62 Humphreys P. Computational and conceptual emergence. Philos. Sci. 2008. 75, 584–594. doi: 10.1086/596776.
63 Guyon H., Falissard B., Kop J.-L. Modeling Psychological Attributes in Psychology – An Epistemological Discussion: Network Analysis vs. Latent Variables. Frontiers in Psychology. 2017. 8, 798. http://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.00798.
64 Jöreskog K.G. Statistical analysis of sets of congeneric tests. Psychometrika. 1971. 36, 109–133.
65 Kelava A., Brandt H. A general non-linear multilevel structural equation mixture model. Front. Psychol. 2014. 5:748. doi: 10.3389/fpsyg.2014.00748.
66 Kelso J.A.S. Multistability and metastability: understanding dynamic coordination in the brain. Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences. 2012. 367(1591), 906–918. http://doi.org/10.1098/rstb.2011.0351.
67 Kelso J.A.S. Dynamic Patterns. MIT Press, Cambridge, MA. 1995. 334 p.
68 Lawley D.N., Maxwell A.E. Factor analysis as a statistical method. London: Butterworth. 1963.
69 Lazarsfeld P.F. Latent structure analysis. In S. Koch (Ed.), Psychology: A study of science. New York: McGraw Hill, 1959. Vol. 3. 476–543.
70 Lee S., Hershberger S. A simple rule for generating equivalent models in covariance structure modeling. Multivar. Behav. 1990. Res. 25, 313–334. doi: 10.1207/s15327906mbr2503_4.
71 Levy L.R., Yao W., McGuire G., Vollick D.N., Jette J., Shanahan M.J., Hay J.M., Neufeld R.W. Nonlinear bifurcations of psychological stress negotiation: new properties of a formal dynamical model. Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences. 2012. 16(4): 429-456.

72 Lux V., Kendler K.S. Deconstructing major depression: a validation study of the DSM-IV symptomatic criteria. Psychological Medicine. 2010. doi: 10.1017/S0033291709992157.
73 MacCallum R.C., Browne M.W. The use of causal indicators in covariance structure models: some practical issues. Psychol. Bull. 1993. 114, 533–541. doi: 10.1037/0033-2909.114.3.533.
74 Markus K.A., Borsboom D. Frontiers of Test Validity Theory: Measurement, Causation, and Meaning. New York, NY: Routledge, 2013.
75 Maul A. On the ontology of psychological attributes. Theory Psychol. 2013. 23, 752–769. doi: 10.1177/0959354313506273.
76 McLachlan G., Peel D. Finite mixture models. New York: John Wiley & Sons, 2000.
77 McNally R.J., Robinaugh D.J., Wu G.W.Y., Wang L., Deserno M.K., Borsboom D. Mental disorders as causal systems: a network approach to posttraumatic stress disorder. Clin. Psychol. Sci. 2015. 3, 836–849. doi: 10.1177/2167702614553230.
78 Medathati N.V.K., Neumann H., Masson G.S., Kornprobst P. Bio-inspired computer vision: Towards a synergistic approach of artificial and biological vision. Computer Vision and Image Understanding. 2016. 150, 1–30.
79 Mellenbergh G.J. Generalized linear item response theory. Psychological Bulletin. 1994. 115, 300–307.
80 Millikan R.G. White Queen Psychology and Other Essays for Alice. Cambridge, MA: A Bradford Book, 1995.
81 Nuijten M.B., Deserno M.K., Cramer A., Borsboom D. Mental disorders as complex networks: an introduction and overview of a network approach to psychopathology. Clinical Neuropsychiatry. 2016. 13 (4/5), 68–76.
82 Nunnally J.C., Bernstein I.H. Psychometric theory (3rd ed.). New York: McGraw-Hill, 1994.
83 Pearl J. Causality: Models, reasoning, and inference. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
84 Pepperell R., Ruta N., Burleigh A., Baldwin J. The perceived size and shape of objects in the peripheral visual field // Perception. 2016. V. 45(S2). 236.
85 Raykov T., Marcoulides G.A. Equivalent structural equation models: a challenge and responsibility. Struct. Equ. Model. Multidiscip. J. 2007. 14, 695–700. doi: 10.1080/10705510701303798.
86 Redfern A., Benton C. ‘Expression dependence in the perception of facial identity’. i-Perception. 2017. vol 8.
87 Schmittmann V., Jahfari S., Borsboom D., Savi A.O., Waldorp L.J. Making large-scale networks from fMRI data. PLoS one. 2015. 10(9). [e0129074]. DOI: 10.1371/journal.pone.0129074.
88 Schmittmann V.D., Cramer A.O.J., Waldorp L.J., Epskamp S., Kievit R.A. Borsboom D. Deconstructing the construct: A network perspective on psychological phenomena. New Ideas in Psychology. 2013. 31(1), 43-53. https://doi.org/10.1016/j.newideapsych.2011.02.007.
89 Spirtes P., Glymour C., Scheines R. Causation, prediction, and search. MIT Press, 2000.
90 Tennant C. Life events, stress and depression: a review of recent findings. Australian and New Zealand Journal of Psychiatry. 2001. 36, 173–182.
91 Trochim W. The Research Methods Knowledge Base, 2nd Edition. Atomic Dog Publishing, Cincinnati, OH. 2000.
92 Van der Maas H.L.J., Dolan C., Grasman R.P.P.P., Wicherts J.M., Huizenga H.M., Raijmakers M.E.J. A dynamical model of general intelligence: the positive manifold of intelligence by mutualism. Psychological Review. 2006. 113, 842–861.
93 Van Der Maas H.L.J., Molenaar D., Maris G., Kievit R.A., Borsboom D. Cognitive psychology meets psychometric theory: on the relation between process models for decision making and latent variable models for individual differences. Psychol. Rev. 2011. 118, 339–356. doi: 10.1037/a0022749.

94 Van der Maas H.L.J., Molenaar P.C.M. Stagewise cognitive development: an application of catastrophe theory. Psychological Review. 1992. 113, 842–861.
95 Van Geert P.L.C., Steenbeek H.W. Networks as complex dynamic systems: applications to clinical and developmental psychology and psychopathology. Behav. Brain Sci. 2010. 33, 174–175. doi: 10.1017/S0140525X10000828.
96 Van Gelder T. The dynamical hypothesis in cognitive science. Behavioral and Brain Sciences. 1998. 21, 615–665.
97 Van Orden G.C., Kloos H., Wallot S. “Living in the pink: intentionality, wellbeing, and complexity,” in Philosophy of Complex Systems, ed. C. Hooker (Amsterdam: North-Holland), 2011. 629–672. doi: 10.1016/b978-0-444-52076-0.50022-5

Работа поступила 04.12.2017г.

УДК 378.146

ПОДГОТОВКА КАЧЕСТВЕННЫХ ПРОГРАММИСТОВ: ПРОБЛЕМЫ ОБУЧЕНИЯ

В.Н. Лукин

Программное обеспечение, во многом определяющее жизнь современного человека, нередко обладает крайне низким качеством, которое во многом зависит от уровня подготовки специалистов в вузе. В статье рассматриваются варианты решения проблемы обучения программированию с учётом компетенций, профессиональных стандартов, стандартов качества программного обеспечения. Предлагается подход, позволяющий выработать профессиональные навыки.

Software in many ways determines the life of modern person, but it often has extremely low quality, which largely depends on the university education level. This article discusses the ways to solve the problem of teaching programming, taking in account competencies, professional standards, software quality standards. It proposes the approach to professional skills development

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА
Программная ошибка, качество программ, качество обучения, компетенции, профессиональный стандарт, производственная практика.

Среда обитания современного человека во многом определяется окружающим его программным обеспечением (ПО), качество которого порой бывает ниже всякой критики. Человек с недоумением смотрит на интерфейс нужной ему программы, не понимая, как с нею управляться, он привыкает выполнять множество ненужных движений для достижения простых результатов. Некоторые программы содержат «дополнительные функции», которые ничего, кроме неприятностей, не доставляют, другие не содержат или глубоко маскируют простые и естественные. Мелкие бытовые неприятности, связанные с некачественным ПО, перемежаются с катастрофическими. Порой возникает ощущение, что нормальных программ почти нет, все с какими-то дефектами. Д. Платт [5] утверждает, что современное программное обеспечение отвратительно, и приличных слов, чтобы выразить этот факт, нет. Но раз отказаться от него мы не можем, давайте что-то делать, чтобы улучшить ситуацию.
Приведём три достаточно свежих примера, иллюстрирующих качество ПО.

Сообщение Европейского космического агентства 23 ноября 2016

Сбой в работе блока, измеряющего угловые скорости, произошел при входе «Скиапарелли» в атмосферу Марса. Получив неверные данные, система управления неправильно вычислила высоту, которая оказалась отрицательной, то есть ниже уровня поверхности. Это привело к преждевременному раскрытию парашюта и срабатыванию тормозных двигателей, а затем к активации на высоте 3,7 километра системы посадки, которая должна была сработать уже после того, как модуль сел бы на Марс.

Здесь просто букет взаимосвязанных ошибок: система, вычислив высоту и получив явно некорректные данные, не удосужилась перепроверить измерения или принять какие-то экстренные меры, а стала действовать по штатному сценарию. Пусть даже модуль зарылся вглубь Марса, но парашют раскрывается (преждевременно!), включаются тормозные двигатели и модуль, понятно, падает на поверхность.

Сбой в «Мегафоне» 19 мая 2017

«МегаФон» сообщил о «массовых сложностях со связью». Генеральный директор компании «МегаФон» С. Солдатенков: «Технический сбой на нашем оборудовании, повлиявший на работу ряда услуг, устранен. Минувшей ночью и утром мы провели необходимые работы по восстановлению полноценной работы сети и окончательной ликвидации последствий ошибки программного обеспечения. Тем абонентам, кого затронула авария, мы предоставим компенсацию». Генеральный директор оператора Yota, работающего на сетях «МегаФона», В. Добрынин: «Мы приняли решение выплатить компенсацию до 20 млн. руб. клиентам, которые остались в этот день без возможности совершать звонки».

Этот случай, конечно, не столь катастрофичен, но для обычных людей гораздо более заметен. И опять программное обеспечение! Таких примеров можно привести очень много. Крайне неприятны ошибки, приводящие к появлению уязвимостей в ПО, что способствует его взлому. Это касается, к сожалению, и государственных информационных ресурсов.

Неудачный запуск с космодрома Восточный 28 ноября 2017

Комиссия Роскосмоса опубликовала официальные результаты расследования аварии, которая привела к потере спутника «Метеор-М». К нештатной ситуации привело поведение разгонного блока «Фрегат» после его отделения от ракеты. «Это выявило скрытую проблему в алгоритме, которая не проявлялась десятилетиями успешных пусков связки «Союз-Фрегат», — указывается в сообщении. После отделения разгонного блока система управления «начала выдавать управляющее воздействие на разворот орбитального блока в требуемое угловое положение». В это время средства телеметрии зафиксировали нештатное угловое положение «Фрегата», который ушел с расчетной траектории. «Сложилось такое сочетание параметров стартового стола космодрома, азимутов полета ракеты-носителя и разгонного блока, которое не встречалось ранее. Соответственно, не было выявлено при проведенной наземной отработке баллистической траектории согласно действующим методикам», — указывается в заявлении комиссии. «Проведя всесторонний анализ, члены комиссии считают, что проявление этой некорректности алгоритма могло и не произойти при запуске с космодрома Восточный этой же полезной нагрузки с этим же разгонным блоком на этой же ракете. Пуск прошел бы штатно, например, летом, либо в случае, если бы районы падения отделяемых частей РН лежали в стороне от выбранных», — предполагают в Роскосмосе. Риски при запуске были застрахованы на сумму 2,6 млрд. руб. Глава правительства Дмитрий Медведев заявил, что понесенных в результате гибели спутников потерь не покроют «никакие страховые выплаты».

Опять полное собрание удивительных суждений, суть которых одна: никудышнее качество программного обеспечения. Посмотрим: проблема в алгоритме якобы пряталась десятилетиями, но тогда не было подобных пусков и, соответственно, программного обеспечения! Далее, сочетание параметров, которое сложилось, должно обязательно встретиться ранее, чтобы его предусмотреть? Тогда методики контроля вообще никуда не годятся. И ещё лучше: Роскосмос предполагает, что проявление некорректности алгоритма могло и не произойти, если бы пуск прошел, например, летом, либо в случае, если бы районы падения отделяемых частей лежали в стороне от выбранных. Добавим: если бы звёзды сложились иначе. Всё!

Конечно, если бы проблема качества была лишь в «эффективных менеджерах», не умеющих планировать разработку ПО, было бы не так страшно. Но беда в том, что юные авторы программ, которые идут из вузов, реально не умеют производить качественный программный продукт.

Будем считать, что качественный продукт производит качественно обученный выпускник, а качество обученности определяется степенью соответствия возможностей специалиста требованиям профильного производства, в нашем случае – предприятия, специализирующегося на информационных разработках. Тогда цель обучения программированию в вузе – умение создавать качественное программное обеспечение. Разумеется, качество процесса обучения не в полной мере гарантирует качество специалиста: помимо технологии обучения важно и то, чему обучают, и то, кого обучают, и то, кто обучает.

Приведём некоторые высказывания Роберта Гласса [1], касающиеся качества и особенностей разработки ПО.

- Улучшение качества разработки ПО увеличивает количество пользователей, срок использования и потенциальные возможности по доработке.
- Наиболее важный фактор в разработке ПО – это сами программисты.
- Программисты предрасположены к определенным ошибкам из-за особенностей мышления.
- Фаза устранения ошибок – самая трудоемкая.
- 80% работы по созданию ПО приходится на интеллектуальную деятельность, остальное – это рутина, и только она поддается автоматизации.
- Результаты методик и инструментов гораздо скромнее обещанного и дают улучшение качества и производительности на 5-35%.
- Большинство ученых в области ПО больше защищают свои теории, нежели занимаются исследованием. В результате у нас много разрекламированных, но неэффективных методик и инструментов.

Обратимся к профессиональным стандартам [8], которые регламентируют деятельность по созданию программного обеспечения, и рассмотрим некоторые его положения, относящиеся именно к программисту, чтобы понимать, чему учить.

Программист (профессиональный стандарт)

Основная цель вида профессиональной деятельности: разработка, отладка, проверка работоспособности, модификация программного обеспечения.

Обобщенные трудовые функции:

- разработка и отладка программного кода;
- проверка работоспособности и рефакторинг кода программного обеспечения;
- интеграция программных модулей и компонентов и верификация выпусков программного продукта;
- разработка требований и проектирование программного обеспечения.

Если говорить о программировании в узком смысле, то из обобщённых трудовых функций мы выбираем только разработку и отладку программного кода.

Разработка и отладка программного кода:

- формализация и алгоритмизация поставленных задач;
- написание программного кода с использованием языков программирования, определения и манипулирования данными;
- оформление программного кода в соответствии с установленными требованиями
- работа с системой контроля версий;
- проверка и отладка программного кода.

Рассмотрим некоторые существующие подходы к подготовке качественных программистов. Это «компетентностный» подход, подход, основанный на стандартах качества программного обеспечения и подход, ориентирующийся на производственную практику.

«Компетентностный» подход

Критерий качества, ориентированный на внешний мир, попытались применить к студентам и бюрократы от образования, взяв, как всегда, иностранный опыт и, как всегда, применив его максимально криво. Было придумано новое значение слова «компетенция», которое в русском языке означает либо круг полномочий или прав (нам это не интересно), либо знание и опыт человека в какой-то области. Во множественном числе обычно не употребляется, говорят, например, «он компетентен в вопросах программирования».

Теперь возьмём некоторые учебные дисциплины из области программирования и посмотрим, какие «компетенции» следует иметь прослушавшим соответствующие курсы (стиль оригинала сохранён, но грамматические ошибки исправлены).

Таблица 1

Код	*Содержание*	*Примечания*
	Информатика и программирование	
ОПК-3	Способность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин и современные информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности	К программированию не имеет отношения
	Практикум по программированию	
ПК-1	Способность проводить обследование организаций, выявлять информационные потребности пользователей, формировать требования к информационной системе	Не имеет отношения к дисциплине
ПК-2	Способность разрабатывать, внедрять и адаптировать прикладное программное обеспечение	Подходит, но непонятно, как обучить внедрению
ПК-3	Способность проектировать ИС в соответствии с профилем подготовки по видам обеспечения	Не по теме дисциплины
ПК-7	Владеть знаниями о содержании основных этапов и тенденций развития программирования, математического обеспечения и информационных технологий	Подходит, но лишь с исторической точки зрения
ПК-8	Способность программировать приложения и создавать программные прототипы решения прикладных задач	Формулировка некорректна: создание прототипа предшествует программированию приложения
ПК-9	Способность составлять техническую документацию проектов автоматизации и информатизации прикладных процессов	Не по теме дисциплины
ПК-22	Способность анализировать рынок программно-технических средств, информационных продуктов и услуг для создания и модификации информационных систем	Не по теме дисциплины

Структуры и алгоритмы компьютерной обработки данных		
ОПК-5	Владеть информацией о направлениях развития компьютеров с традиционной (нетрадиционной) архитектурой; о тенденциях развития функций и архитектур проблемно-ориентированных программных систем и комплексов	Не имеет отношения к дисциплине
ОПК-7	Способность использовать знания основных концептуальных положений функционального, логического, объектно-ориентированного и визуального направлений программирования, методов, способов и средств разработки программ в рамках этих направлений	Не по теме дисциплины
ОПК-8	Способность использовать знания методов проектирования и производства программного продукта, принципов построения, структуры и приемов работы с инструментальными средствами, поддерживающими создание программного обеспечения	Не имеет отношения к дисциплине
ОПК-10	Способность использовать знания методов, архитектуры, алгоритмов функционирования систем реального времени	Не по теме дисциплины
Рекурсивно-логическое программирование		
ОПК-7	см. выше	Частично подходит
Разработка и стандартизация программного обеспечения		
ОПК-7	см. выше	Частично подходит
ОПК-9	Способность использования знания методов организации работы в коллективах разработчиков ПО, направления развития методов и программных средств коллективной разработки ПО	К разработке – косвенное отношение, к стандартизации – никакого

Итак, существующие «компетентностные» критерии качества выпускника не удовлетворяют профессиональному стандарту программиста. Не удивительно, что на третьем курсе многие студенты не умеют ни программировать, ни грамотно составить алгоритм достаточно простой задачи, скажем, перемножения матриц.

Но это ещё не всё. В стандарте образования мы не увидим разделов, посвящённых такому принципиально важному вопросу, как обучение разработке *качественных* программ. Получается, что самое главное в подготовке студента ложится, в конце концов, на преподавателя, на его желание и умение подать материал на должном уровне.

Разумеется, сказанное не отрицает подход, основанный на знаниях и умениях студента, которые объединены термином «компетенции». Просто при формальных оценках надо особое внимание уделять именно их содержанию. В нынешнем виде их нельзя качественно проконтролировать, и преподаватели, насколько я знаю, просто их игнорируют.

Что можно предложить? Ну хотя бы самые простейшие варианты, которых должно быть не слишком много, но которые должны быть понятными всем участникам процесса и, конечно, проверяемыми. Например, следующие.

Информатика и программирование:

– знание основ структурного и объектно-ориентированного программирования;
– умение разработать и реализовать основные алгоритмы;
– владение не менее чем двумя алгоритмическими языками;
– представление о разработке программ в сетевой среде.

Практикум по программированию:

- знание основ тестирования ПО;
- умение отлаживать ПО;
- владение инструментальными средствами разработки ПО.

Структуры и алгоритмы компьютерной обработки данных:

- знание теории баз данных (БД);
- владение методами проектирования баз данных;
- умение работать в среде хотя бы одной системы баз данных;
- умение формировать запросы к БД хотя бы на одном языке запросов.

Стандарты качества программ

Разберёмся с качеством программы как с предметом обучения. Итак, какую программу считать качественной?

Согласно ГОСТ РВ 51987-2002, под качеством функционирования информационных систем понимается совокупность свойств, обусловливающих их пригодность в соответствии с целевым назначением. В стандарте ISO 9126 качество определяется перечислением свойств, которые представлены шестью группами: функциональная пригодность, надежность, применимость, эффективность, сопровождаемость, переносимость. Конечно, оценивать качество студенческих работ с позиции стандарта вряд ли разумно, но мы должны, по крайней мере, видеть цель.

В производственных условиях используются различные, нередко достаточно сложные, методы контроля качества. К сожалению, в процессе обучения студентов в вузе они обычно не рассматриваются. Ситуацию можно улучшить, если с первого занятия требовать выполнения хотя бы очевидных критериев качества программ и обучать методам его достижения.

Согласно профессиональному стандарту, базовой учебной дисциплиной будем считать «Программирование». Тогда основная цель обучения – формирование навыка программирования, а основной вид занятий – лабораторные работы.

Обычный ход лабораторных занятий, при условии, что лекционный материал усвоен и на семинарах задачи разобраны, следующий:

- даётся задание, как правило, очередная задача по теме;
- студент разрабатывает программу и отлаживает её;
- преподаватель проверяет, что получилось, и оценивает.

Могут быть следующие варианты процесса, при которых требуется вмешательство преподавателя:

1. Студент не может написать программу.
2. Программа написана, но не проходит трансляция (есть синтаксические ошибки).
3. Программа запускается, но работает не так, как задумано.
4. Программа отлажена и сдаётся преподавателю.

Первый случай, как ни странно, – довольно распространённое явление. Связан он с тем, что студент либо не готов к занятию, либо не знает, с чего начать, либо не умеет синтезировать решение, хотя всё понимает. Бывают и другие причины. Самое простое и обычное – студент не готов к занятию, гораздо сложнее последнее. Иногда, хотя и редко, так и не удаётся растолковать студенту суть программирования. Но часто помогает детальный разбор задачи и предложение её модифицировать или расширить.

Программа написана, но не проходит трансляция. Обычно студент может разобраться в синтаксических ошибках, но он нередко взывает: «У меня не работает!» Что делать? Указывать на ошибку? Тогда это будет вечно: халява соблазнительна. Сказать, чтобы разбирался сам? Но тогда зачем преподаватель? Лучше посмотреть, указать на диагностическое сообщение и предложить им воспользоваться. Конечно, локализация ошибок не однозначна, но в программах учебного характера обычно всё просто.

Программа запускается, но работает явно не так, как задумано, и это понимает сам студент, но ошибки не видит. Можно сесть рядом со студентом и указать на ошибку. Но здесь, опять же, есть опасность работы вечным отладчиком: в следующий раз он уже даже не станет её искать. Полезно посмотреть, не типичная ли это ошибка. Если да, указать её. А лучше в ходе лабораторных работ заранее привести примеры типичных ошибок. Если ошибка сложная, показать, как её найти и исправить. Именно в этом и заключается отладка. К сожалению, ей в учебном плане практически не уделяется внимания, хотя причина большинства ошибок – небрежно отлаженные программы. Необходимо в течение всего курса обращать внимание на различные методы выявления ошибок, от анализа кода до методов «грубой силы». Студент должен понимать, что процесс отладки программы, особенно при небрежном тексте, занимает гораздо больше времени, чем её написание.

Программа отлажена и сдаётся преподавателю. В «большом мире» этому процессу соответствует сдача программы заказчику. Цель проверки – не только поставить отметку, даже не только обнаружить ошибки и указать на них, а в большей степени показать студенту, что такое качественная программа и как добиться качества.

Теперь проанализируем применимость положений стандарта качества к программам в учебном процессе.

Функциональная пригодность. Это наиболее очевидная и легко проверяемая характеристика. Думаю, каждый преподаватель требует, чтобы студенческая программа выполняла именно те функции, которые заданы. Если задание включало какие-то условия, необходимо проследить, чтобы все они были выполнены, пусть это и займёт время. Полезно, хотя и не обязательно, подготовить набор функциональных тестов, контролирующих все заданные условия, и продемонстрировать их работу студенту.

Распространённые ошибки

1. Реализован неполный набор функций. Причины – не хватило времени, не хватило знаний или умения, элементарная лень: надежда, что и так «прокатит».
2. Функции реализованы неверно или не полностью. Причины – как и в первом случае, кроме того, студент мог не понять или неверно интерпретировать условие.
3. Неверно обрабатываются исключительные ситуации. Обычно это ошибки ввода или ошибки при работе с файлами. Причина, помимо предыдущих – уверенность, что пользователь будет работать «правильно». Очень коварные ошибки, по типу близкие к ошибкам применимости.

Возможные осложнения

При безнаказанности студент привыкает к небрежному программированию, что крайне негативно сказывается не только на старших курсах, где более сложные задачи требуют более точной работы, но, что хуже, в дальнейшем, если он станет профессиональным программистом. Особое внимание следует уделять обработке исключительных ситуаций. Этот тип ошибок вызывает у студента ощущение, что к нему придираются.

Задача транспонировать матрицу. Программа требует ввода количества строк и столбцов. Ввожу разные числа – ошибка. «Числа должны быть равными!» – «А зачем их два?» – «На всякий случай». Объясняю, что всё лишнее вредно. Ввожу отрицательное число – принимает, но снова ошибка. «Размерность не может быть отрицательной!» Говорю, что с детства знаком с этим фактом, но раз не запрещено – значит, разрешено? Студент с трудом понимает, что в жизни, если на стенке написать: «Задавать только числа от 1 до 5», кто-нибудь тут же введёт 7. Мне удалось наблюдать, как лаборантка, беседуя с подружкой, присела на клавишу пробела и вводила этот пробел довольно долго, пока буфер не переполнился.

Решение

Студент должен обязательно выполнить все условия и ограничения, приведённые в задаче и следующие из её постановки. Он должен понимать, что снижение оценки или отказ в приёме работы – это следствие неполной или некачественной функциональности. Он должен научиться тестировать программу не для демонстрации её правильности, а для поиска ошибок.

Надежность. Вообще говоря, надёжность определяется частотой появления ошибок в процессе опытной эксплуатации. В нашем случае этот аспект можно связать с количеством ошибок, определяемых преподавателем в процессе сдачи.

Распространённые ошибки

1. Студент каждый раз приносит одну и ту же работу, в надежде, что преподаватель рано или поздно исправит все ошибки.
2. Тот же вариант, но обнаруженные преподавателем ошибки исправляет сам студент, после чего уверяет, что все ошибки исправлены, а про другие разговора не было.
3. Студент ошибки исправляет и делает новые.

Возможные осложнения

В мягком варианте приёма работ, пока не будет достигнуто требуемое качество без учёта количества подходов, студент перестаёт думать об ошибках, предоставляя это преподавателю. В профессиональной жизни такая привычка приводит к отладке своих систем руками пользователя, что маскируется термином «бета-тестирование». Пользователя это раздражает, и нередко неудачная сдача системы заказчику – закономерное следствие.

Решение

Полезно в общую оценку за задачу включить «коэффициент надёжности», зависящий от количества подходов, за которые студент сдаёт работу. Если оценка зависит от этого показателя, студент при итерационном зачёте поостережётся сдавать что попало.

Применимость. Применимость (дружественность, эргономичность) – важная характеристика, порой основная. Она определяет удобство взаимодействия пользователя и программного изделия. К сожалению, в учебных программах внимания этому вопросу почти не уделяется, тогда как специалистов в области построения дружественного интерфейса катастрофически не хватает. Нередко заказчик не хочет платить за продукт, работа с которым доставляет мучения. В вузе в случае отсутствия специального курса задача применимости сводится к построению пользовательского интерфейса в упрощённом варианте. На качественное обучение нет ни времени, ни возможностей, но студент должен понимать, что такое хорошо, а что такое плохо. Обычно проблема обостряется, когда студент научится писать достаточно сложные программы, не всегда на первом курсе. Ошибки применимости разнообразны, контроль качества достаточно сложен.

Распространённые ошибки

1. Неопределённость: непонятно, какие задачи решаются, какие действия нужно выполнять. Интерфейс скрывает как цель, так и действия, по которым можно было бы о ней догадаться.
2. Логика действий соответствует, скорее, структуре программы, чем естественной деятельности пользователя.
3. Расположение управляющих и информационных элементов не соответствует естественной навигации (слева направо, сверху вниз).
4. Двусмысленные или непонятные надписи и сообщения.
5. Неудачная компоновка: форма или слишком плотно заполнена, или пуста, или перегружена в одном месте и пуста в другом.
6. Слишком мелкий кегль основного шрифта.
7. Неудачное сочетание атрибутов шрифта (гарнитура, кегль, стиль, цвет).
8. Разновеликие однотипные управляющие элементы.
9. Текст отображается на разных языках одновременно.

10. Пёстрые цвета, плохо сочетаются цвета шрифта и фона.
11. Грамматические ошибки или сленг.

Естественно, здесь отражены лишь некоторые из возможных типов ошибок интерфейса, реально их гораздо больше.

Возможные осложнения

Внешний вид изделия, если он не оговорен заранее, говорит о степени заботы мастера о клиентах, то есть о том, стоит ли ему доверять серьёзную работу. Если не приучать студента к аккуратному оформлению задания, к оценке своей работы с точки зрения возможного пользователя даже в самых простых задачах, из него невозможно получить хорошего прикладного программиста. В дальнейшем он либо сам переучится, либо будет мучить пользователей своими творениями, объясняя, какие они замечательные.

Студент сдаёт работу, из её интерфейса не видно, какую задачу он решает. «Я сделал, что Вы задали» – «Уточните условие». Уточняет. Пытаюсь работать, не получается. «Сначала нужно нажать кнопку <Показать файл>» – «Откуда это известно?» – «Это очевидно». Студент играет роль живой инструкции.
Вторая работа. «У Вас шрифт слишком мелкий» – «Если делать крупнее, всё не поместится» – «Не нужно перегружать форму, с нею трудно работать, подумайте о компоновке» – «Так всё на виду». Объясняю, что если автор дома все вещи равномерно рассыплет по полу, они тоже будут на виду, но работать с ними будет сложно.

Следующий пример взят из реальных работ студентов третьего курса. В таблице приведены основные ошибки интерфейса.

Таблица 2

Левая форма	***Правая форма***
Неудачная форма, в оригинале не помещается на экран по высоте.	Заглавие формы по умолчанию.
Нет заглавия.	Неясен сценарий работы.
Размеры полей таблицы не соответствуют содержанию.	Шрифт различной гарнитуры, различного размера и стиля.
Бессмысленный текст «Label5».	Бессмысленный текст «Edit4».
Два языка: «Label5» и остальное.	Два языка: «Edit4» и остальное.
Грамматические ошибки («колизии»).	
Сленг («ИНФА»).	

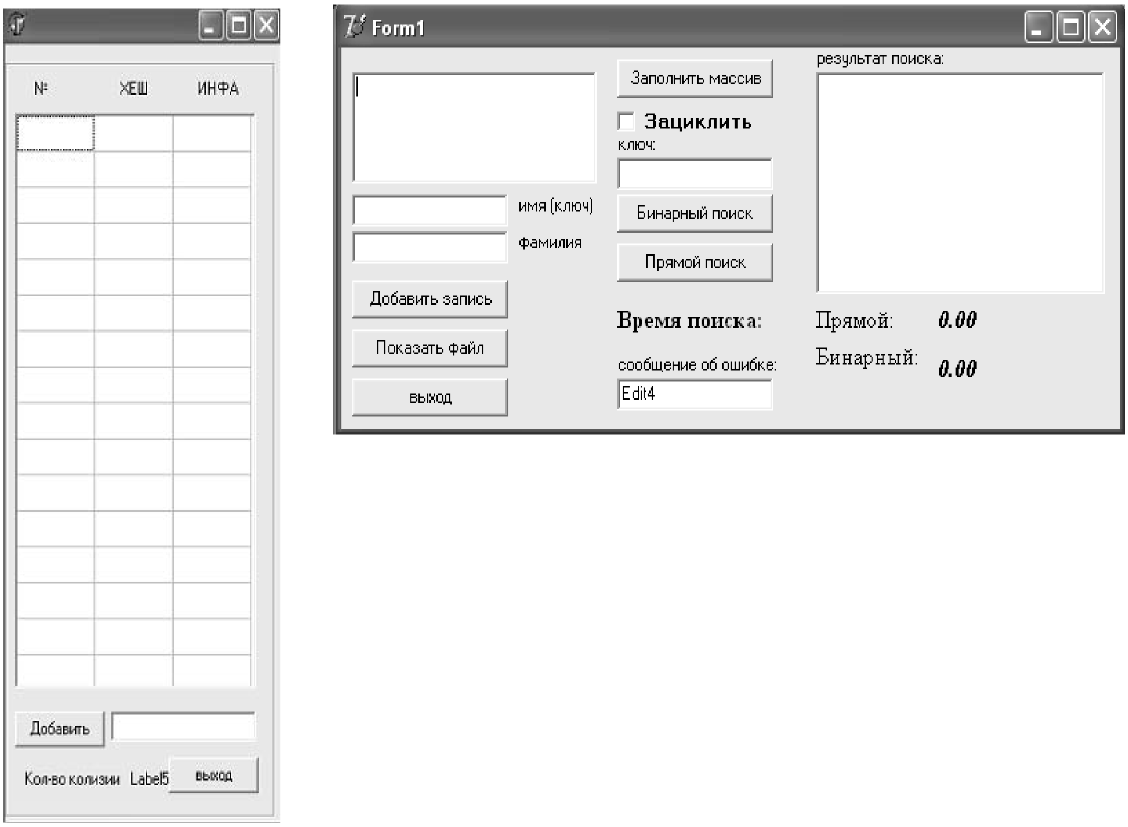


Рис.1

Решение

Необходимо сразу же, в момент постановки задачи объяснить, в какой форме требуется сдавать решение. Ошибки в интерфейсе должны быть столь же весомы, как и другие. Полезно взять на себя роль пользователя и оценивать работу в его терминах. Студент должен почувствовать необходимость правильных интерфейсных решений. Все апелляции к свободе творчества, личным пристрастиям и прочему, если они противоречат базовым принципам построения интерфейсов, следует пресекать: это отговорки, чтобы ничего не переделывать. Нужно стимулировать выработку стиля, в котором студент будет выполнять и другие работы.

Сопровождаемость. В учебных программах она сводится к модифицируемости. Следует обращать внимание студентов, прежде всего, на стиль написания программных текстов. Студент должен знать, что программа пишется однократно, а читается многократно, и её отладка может занимать до 90% времени изготовления программы. Поэтому всякие слова типа «мне и так понятно» не работают. Если молодой специалист приходит наниматься в программисты, опытный руководитель проекта по стилю составит мнение как о его квалификации, так и об умении работать в команде. Необходимо требовать ясную структуру текста, чтобы одним взглядом оценить его сложность. Комментарии обязательны, структурные единицы (процедуры, функции, модули и т.п.) озаглавлены, программы снабжены именем автора, датой изготовления, кратким описанием особенностей. Комментарии поясняют не что делается, а зачем. Имена переменных должны быть разумными. На протяжении всего текста следует выдерживать одинаковый стиль, программа не должна походить на лоскутное одеяло. Традиционный контроль – структурное тестирование.

Распространённые ошибки

1. Программа не идентифицирована: нет названия, автора, номера версии, дат последнего изменения.

2. Структурные единицы (процедуры) не поименованы, нет описания их действий.
3. Комментариев нет, их недостаточно или они некорректны, например, содержат текст: «Здесь складываются два числа» или «С этого места программа может глючить, я не проверял».
4. Текст программы плохо структурирован, что приводит к потере времени при поиске ошибок или при модификации программы.
5. Имена переменных лишены смысла или противоречат их использованию.

Возможные осложнения

Сопровождение программы – самый длительный период её жизненного цикла, на протяжении которого она неоднократно подвергается модификации. Модификация – это жизненный цикл программы в миниатюре, но ещё добавляется поиск места внесения изменения. Плохо написанная программа многократно увеличивает время поиска и уменьшает надёжность изделия. Вот почему фирмы, разрабатывающие программные продукты, требуют от сотрудников соблюдения «корпоративного стиля». Студент должен быть уверен: если он хочет стать профессионалом, он должен уметь придерживаться принятого (возможно, и не им) стиля.

Решение

В силу исключительной важности и высокой стоимости этапа сопровождения, следует обязательно, с самого первого дня, требовать следовать определённому стилю. Это плохо воспринимается студентами, особенно не новичками, которые успели испортить стиль в школе. Но приемлемого качества программирования без этого не достигнуть.

Производственная практика

Посмотрим теперь на то, как реальная производственная деятельность студентов влияет на их умение и желание разрабатывать качественные программы.

В статье «Откуда берутся люди, способные создавать надежное программное обеспечение» (журнал «Программирование», 1976 г.) академик А.П. Ершов выразил мнение, что студент на старших курсах должен участвовать в реальных проектах. Основная идея – знакомство с потребностями производства в качественном программном обеспечении, что позволит своевременно овладеть соответствующими навыками. Однако, насколько мне известно, широкой поддержки это предложение не получило. Причина, на мой взгляд, заключалась в консервативности учебного процесса, в который не вписывалась практика на стороннем предприятии. Тем не менее, при любой возможности студентов подключали к реальному программированию в рамках хоздоговорных или дипломных работ.

Ещё дальше в этом направлении пошёл проф. А.Н.Терехов [7], который утверждает, что никакие лабораторные занятия не заменят работы в коллективе программистов, поэтому вуз должен либо *иметь своё производство*, либо *заключить договор на разработку* ПО. Исходя из своего опыта, он пришёл к выводу, что это наиболее эффективный способ получить качественных программистов. С подобным тезисом нельзя не согласиться, но, к сожалению, оба варианта не так просто реализовать, для этого нужно, как минимум, большое желание руководства вуза. Если учесть, что программистов выпускают все, кому не лень, не только профильные структуры типа ВМК МГУ, такое желание вряд ли обязательно появится.

Следующий вариант практики – *привлечение студентов в реальные проекты*, разрабатываемые на кафедре. Здесь результат зависит от цели. Если основная цель – подготовить качественного программиста, результат, при определённых условиях, получится. Если же студент используется просто как бесплатная рабочая сила, то вряд ли.

Рассмотрим необходимые условия успеха в первом случае. Во-первых, студент должен знать конкретного заказчика, видеть, для кого он старается. Во-вторых, он должен знать критерии качества, которые необходимо обеспечить. В-третьих, он должен дорожить возможностью работы в этом проекте (проект имеет ценность в глазах студента, попасть в него не просто, работа в нём престижна). Большое значение имеет характер проекта. Он должен быть либо небольшой, на один семестр, либо делиться на автономные модули несколько меньшего, из-за интеграционного тестирования, размера. Причина – необходимость освободить студенту время на сессию. Сложность проекта должна, с одной стороны, соответствовать подготовке студента, с другой – стимулировать получение новых знаний. Следует учитывать, что студенты весьма изобретательны, и это свойство нельзя не поддерживать, пресекая, разумеется, попытки писать витиеватый код, удорожающий отладку и сопровождение. Очень полезно включить в проект научный компонент, дающий возможность студенту подготовить статью или выступить на конференции.

Второй случай, а именно – студент как рабочая сила, обычно не имеет перспектив. Продукт либо не получается, либо имеет столь низкое качество, что впору говорить про его отрицательное воздействие на качество подготовки.

Ещё один вариант практики – *работа студентов в реальных проектах сторонних организаций*, не имеющих прямого отношения к учебному процессу. Тут всё зависит от того, в какой организации работает студент, каков характер проекта и какую роль играет в нём студент. Серьёзная организация с высоким уровнем зрелости – очень хорошая школа, но она нередко предъявляет к студенту требования, которым он не может удовлетворять. Молодая, динамичная организация, изготавливающая интересные и востребованные продукты – случай весьма привлекательный, но увлекающийся студент нередко забрасывает учёбу, что обычно приводит к печальным последствиям. Худший случай – рутинная работа, не только не прибавляющая знаний, но ещё и стимулирующая низкое качество (сойдёт и так, лишь бы побыстрее). Интересно, что в любом случае у студентов порой появляется снобизм, обычно необоснованный, который заметно мешает учёбе.

И, наконец, очень неплохая альтернатива практике: *разрабатывать небольшие, но нужные прикладные программы* в рамках курсовых или дипломных работ. Плюс – хорошее руководство, жёстко ограниченное время и внятные требования к качеству. Этот вариант может успешно совмещаться с другими вариантами практики.

Как влияет практика на качество?

- Вырабатывается стереотип профессиональной деятельности;
- студент понимает, что именно требуется заказчику;
- продукт труда оценивается не только преподавателями, но и коллегами;
- становится понятным, какие именно знания и умения нужно ещё получить.

Почему практика может не дать нужного эффекта?

- Отсутствие интересной практической задачи;
- трудности с руководством: не каждый преподаватель умеет руководить коллективом разработчиков;
- если работа попадает на периоды сессии, приходится жертвовать либо работой в проекте, либо подготовкой к экзаменам;
- неустойчивость коллектива студентов-программистов, что приходит к перераспределению работ и потере времени на формирование взаимоотношений;
- естественный уход старших, опытных участников.

Итог

Если мы хотим подготовить нужных специалистов, следует уделять особое внимание качеству программ, не тратить время на демонстрацию различных программных трюков, характерных для изучаемого алгоритмического языка, не гнаться за количеством кое-как сляпанных программок. Есть и ещё одна опасность. Не секрет, что некоторые студенты, рассчитывая на подушевое финансирование и зная, что их не выгонят, вообще бросают учёбу и пытаются взять преподавателя измором. В таких условиях, при давлении сверху и снизу, преподавателю очень трудно удержаться в рамках качественного контроля, он «снижает требования», по сути, идя на подлог. Опыт показывает, что в основном студенты разумно принимают требования к качеству, если они видят их справедливость и не считают их придирками. Итак,

– главная компетенция выпускника – умение создавать качественное программное обеспечение;
– существующий набор требуемых компетенций не способствует подготовке профессиональных программистов;
– подготовка студента должна явно связываться с качеством продукта;
– любым способом следует обеспечить реальную практическую работу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гласс Р. Факты и заблуждения профессионального программирования. — СПб: Символ-Плюс, 2007.
2. Купер А. Психбольница в руках пациентов. — СПб: Символ-Плюс, 2004.
3. Лукин В.Н. Сопровождение систем и стиль программирования. В сб: Материалы XIX Международной конф. по вычисл. механике и совр. прикладным программным системам, Алушта. М.: Изд-во МАИ, 2015. – с. 723-725.
4. Лукин В.Н., Чернышов Л.Н. О подготовке специалистов в области ПО. Восьмая конференция «Свободное программное обеспечение в высшей школе»: Тезисы докладов / Переславль. – М.: Альт Линукс, 2013.
5. Платт Д. Софт — отстой и что с этим делать. Симбо, С.Петербург-Москва, 2008
6. Тарасов С. Дефрагментация мозга. Софтостроение изнутри. — СПб.: Питер, 2013.
7. Терехов А. Н. Технология программирования: Учебное пособие. — М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.
Стандарты: http://www.gost.ru/, обновления и новые стандарты: http://protect.gost.ru/.

Работа поступила 13.12.2017г.

УДК 372.851

ИЗ ОПЫТА РАБОТЫ В ОБЛАСТИ ТИФЛОПЕДАГОГИКИ

М. Е. Степанов

В статье обсуждаются некоторые проблемы, возникающие при работе со студентами, имеющими дефекты зрения. В частности, автор обсуждает пути приобщения пользователей с дефектами зрения к компьютерной графике. Автор опирается на опыт работы на факультете информационных технологий МГППУ.

The article discusses some of the problems that arise when working with students with sight's defects. In particular, the author discusses ways to familiarize users with visual impairments to computer graphics. The author relies on his experience working at the Faculty of Information Technologies of the Moscow State University of Psychology and Aducation.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА
Высшее образование, тифлопедагогика, методика преподавания математики, компьютерная графика.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из важных направлений деятельности факультета информационных технологий Московского государственного психолого-педагогического университета является работа с инвалидами, в том числе обучение студентов с дефектами зрения. Кроме того, на факультете под руководством декана Льва Семёновича Куравского ведётся интенсивная научная работа, направленная на реализацию ряда проектов, связанных с созданием автоматизированных технических комплексов, позволяющих лицам с дефектами зрения осуществлять действия, непосредственно им недоступные, в частности ориентироваться на местности. Следует также отметить, что на факультете имеется учебно-производственная лаборатория технических и программных средств обучения студентов с нарушением зрения, которой руководит Владимир Вячеславович Соколов.

В то же время, практически каждому преподавателю факультета приходится непосредственно заниматься обучением инвалидов, в том числе и по зрению (см. например [1]). Естественно, что при этом ему приходится, так или иначе, решать ряд проблем, относящихся к сфере тифлопедагогики. При этом, по вполне объяснимым причинам, некоторые приёмы и методы, которые возникают в работе преподавателя, остаются его личными наработками и не могут быть включены в общий и без того насыщенный план работы факультета.

Именно в такой ситуации находится автор данной статьи. Не являясь специалистом в области тифлопедагогики, автор невольно сталкивался с соответствующими проблемами. Более того, возникший при этом круг вопросов его заинтересовал. В данной статье рассказывается о попытках решить некоторые из возникших проблем. Автор надеется, что его соображения представят интерес, как для тифлопедагогов, так и для таких же, как он, педагогов общего профиля, работающих со студентами, имеющими дефекты зрения. При этом автор не претендует на сколько-нибудь систематические и продвинутые результаты.

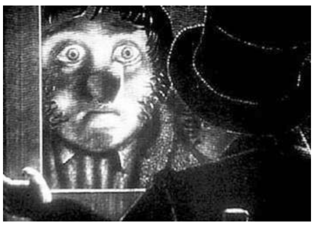
Что же касается тематики затрагиваемых ниже вопросов, она естественным образом вытекает из самого факта общения преподавателя со студентами, имеющими дефекты зрения. Поскольку в настоящее время всё большую роль в образовании играют компьютерные технологии, регулярно создаются программные средства, направленные на приобщение соответствующей категории учащихся к компьютеру. Важную роль при этом играют программы, озвучивающие электронные тексты. Их современный уровень можно считать вполне приемлемым. Однако озвучивание формул пока не производится. Кроме того, постоянной проблемой остаётся доведение до сознания студента образов, непосредственно связанных со зрительным восприятием, таких как чертежи, схемы, изображения геометрических объектов и т. д.

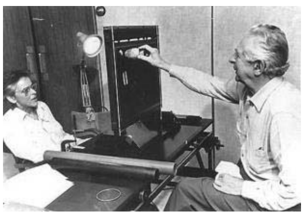
Именно вопросами этого характера и занимался автор данной статьи. Особую роль сыграли при этом научные интересы автора. Речь идёт о компьютерной геометрии – разделе науки, находящемся на границе математики и информатики и направленном на создание изображений математических объектов [2, 3]. В том числе и по этой причине автор стремился перекинуть мостик от упомянутой категории студентов к компьютерной графике. Результатом стал ряд дипломных работ, защищённых студентами факультета и направленных на приобщение слабовидящих к графике. В данной статье, в частности, даётся обзор этих работ. Но всё же хотелось бы начать с экзотического и даже наивного проекта, который возник у автора на первых этапах работы на факультете.

2. ЭКРАН АЛЕКСЕЕВА И ТИФЛОПЕДАГОГИКА

Русский художник, иллюстратор и мультипликатор Александр Александрович Алексеев (1901, Казань – 1982, Париж) в 1931 году изобрёл игольчатый экран (или экран Алексеева), а в 1935 году запатентовал его. Суть изобретения такова. Толстую прямоугольную пластину просверливают, покрывая решёткой из многочисленных отверстий. В отверстия вставляют стержни (иглы), перпендикулярные пластине, которые могут свободно скользить в отверстиях. Выдвинув их по одну сторону пластины и наложив на стержни, например, ладонь, можно получить стилизованное изображение ладони с другой стороны.

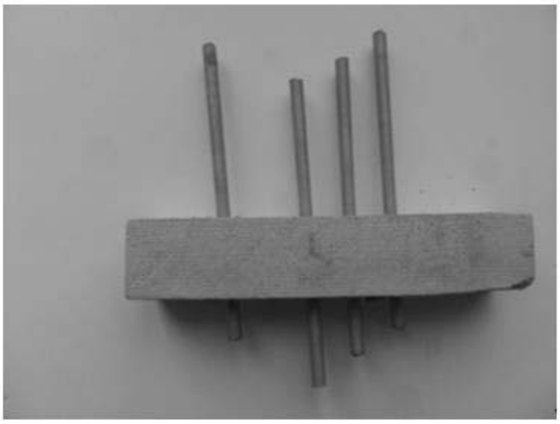
С помощью своего экрана Алексеев создавал анимационные фильмы, обладающие особой выразительностью. Он оказал влияние в частности на Юрия Норштейна. Я же узнал об Алексееве и его экране, посмотрев телепередачу на канале «Культура». Изобретение понравилось и запало в память.





Начав работать в 2004 году на факультете информационных технологий, я столкнулся необходимостью объяснять студентам с дефектами зрения, какова форма графиков и поверхностей. Тут и вспомнился игольчатый экран.

Именно такое устройство могло принести пользу, позволяя изучать кривые и поверхности с помощью осязания. Но иглы нужно было уметь закреплять в определённом положении. Первоначально я решил их заменить длинными винтами. Я даже сделал весьма неуклюжий, условно говоря, эскиз «одномерного экрана», предназначенного для демонстрации формы графиков. Его вид сбоку и снизу показан на рисунке.



В дальнейшем я продумал конструкцию более детально. Её основой должны были стать одиночные блоки, конструкцию которых можно описать так: трубка со скользящим в ней стержнем и фиксатор положения стержня.

Блоки могут крепиться на специальном прямоугольном основании $n \times m$, подобном ситу (если $m = 1$, будем называть экран одномерным). Прикрепляемый к основанию блок связан с одним из отверстий на основании. Стержень получает возможность проходить через это отверстие перпендикулярно основанию. В результате появляется возможность «заметать» концами стержней плоские кривые (они требуют всего лишь одномерного экрана), пространственные кривые и поверхности.

Поскольку создание прибора, годного для практического использования, требовало значительного времени и соответствующих трудовых навыков, да и положительный результат был не гарантирован, работа над устройством была прекращена. Однако его исходная идея дала толчок ряду разработок, направленных на приобщение незрячих пользователей к компьютерной графике.

В настоящее время появились компьютерные формовочные устройства, предназначенные в частности для печати. Несомненно, что скоро будут созданы объекты, имеющие переменную управляемую форму. Но видимо, не следует списывать со счетов и управляемый компьютером экран Алексеева. В конце концов, электронное табло – всего лишь управляемая вычислительным устройством груда лампочек. Управление грудой стержней, конечно, несколько сложнее, но принципиальных отличий от табло нет.

3. СЛОВЕСНОЕ ОПИСАНИЕ ФОРМУЛ И РИСУНКОВ

Одновременно с идеями, связанными с экраном Алексеева, рассматривались и более простые пути передачи студентам с дефектами зрения пространственных образов и формул. Одним из естественных и возникающих фактически стихийно способов такой передачи является словесное описание рисунков и словесная передача формул.

Одним из первых шагов, предпринятых мной в этом направлении, было создание электронных конспектов по различным математическим темам, в которых вся информация представлена в вербальной форме. Непосредственная работа над созданием таких электронных документов потребовала определённой систематизации приёмов, которые использовались при этом.

В качестве примера электронного конспекта без формул и чертежей приведём фрагмент, посвящённый радианной мере углов, использование которой вызывает затруднения практически у всех студентов первого курса. Радианную меру как бы подавляет мера градусная, которая несравненно более привычна для выпускников средней школы.

«Важнейшей для математики мерой углов является радианная мера (от слова «радиус», указывающего на участие окружности). Для введения этой меры из вершины угла как из центра опишем окружность единичного радиуса. Теперь вращение луча, начальное и конечное положение которого как раз и образует угол, сопровождается движением точки по окружности (речь идёт о точке пересечения окружности с лучом). Теперь при вращении луча сам луч отмеряет угол, а точка на окружности – дугу.

После полного оборота луча точка пробежит по окружности расстояние равное двум пи. Если выбрать коэффициентом (на него умножаются обороты луча) для меры угла два пи, то мера угла будет совпадать с длинной дуги, пройденной точкой по окружности. Именно эта мера и называется радианной.

Если вместо единичной окружности использовать окружность радиуса эр, то при полном обороте луча точка пройдёт по окружности расстояние два пи эр, т. е. радианы умножаются на радиус. Легко понять, что если луч заметёт угол фи, то точка пройдёт по дуге расстояние, равное фи умноженное на эр. Установление простой связи между мерой угла и длиной дуги и определяет важность радианной меры углов.

Поясним, почему в математическом анализе используется именно радианная мера углов. При вычислении производной синуса используется замечательный предел отношения синуса икс к икс при икс, стремящемся к нулю. Для доказательства того факта, что данный предел равен единице, используются неравенства, снизу и сверху оценивающие площадь сектора единичной окружности, соответствующего углу фи. Эта площадь заключена между половиной синуса и половиной тангенса угла фи.

Площадь окружности равна пи эр квадрат. Она соответствует сектору в два пи радиан. Тогда сектору с углом фи соответствует площадь фи умножить на отношение пи эр квадрат к двум пи. Таким образом, площадь сектора равна половине фи эр квадрат. Отсюда следует, что для радианной меры величина угла заключена между синусом и тангенсом, а любая другая мера нарушает эти неравенства. Замечательный предел в этом случае не равнялся бы единице».

Так или иначе, в процессе создания подобных электронных документов со всё возрастающей сложностью возникли многочисленные идеи, которые частично были отражены в дипломной работе Антона Лазарева «Блочный принцип озвучивания сайтов математического содержания» (работа защищена в 2016 году). В ней формулируются принципы создания электронных пособий по математике, предназначенные для студентов с дефектами зрения.

В целом перечисленные ниже принципы образуют определённую программу создания электронных документов для студентов с дефектами зрения.

1. Один из универсальных вариантов озвучивания электронных документов состоит в переводе символьной информации в информацию вербальную вне зависимости от конкретного характера документа. Это делается с помощью таблиц, сопоставляющих наборам символов слова или звуки. Примером является «Джос». Однако это не единственный возможный подход.
2. В европейской культуре существует традиция целостного описания мира в единых логически строгих формах. В средние века её продвигал Раймонд Луллий, а в Новое время – Лейбниц. С современным состоянием проблемы можно ознакомиться по книге Умберто Эко «От дерева к лабиринту».
3. В педагогических целях подобный подход использовал Ян Амос Коменский, создавший пособие «Мир в картинках». В нём он выделил основные структуры окружающего мира и образно их описал. Эта модель мира успешно использовалась им при обучении детей.

4. Аналогичный подход можно использовать и при разработке озвученных электронных документов. На начальном этапе выделяются основные разделы математики (или другой изучаемой науки), для каждого из которых даётся максимально краткое изложение, но достаточно подробное, чтобы обеспечить общее понимание предмета без погружения в детали. В описание включаются формулы и чертежи.
5. В рамках одного электронного документа создаётся уникальное (в отличие от универсальных методов озвучивания по типу «Джоса») пособие. Оно аналогично записи концерта, спектакля, стихотворения. Такой подход должен быть оправдан высоким качеством документа.
6. Вся информация в электронном документе, в зависимости от её характера, разбивается на блоки, которые могут образовывать многоуровневую структуру. В частности блок высшего уровня можно назвать «основным текстом».
7. В сайте, разработанном в качестве конкретного примера применения соответствующих принципов, используется три вида блоков: текстовые блоки, блоки-формулы, блоки чертежи. Возможно использование и блоков иного типа, например, блоков, обеспечивающих интерактивное взаимодействие пользователя с программой.
8. При работе пользователя с электронным документом переход к очередному блоку сопровождается озвучиванием его названия, отражающего смысловую нагрузку блока. Например, блок может называться «Чертёж, разъясняющий геометрический смысл производной». Далее начинается полное озвучивание данного блока.
9. Блоки-формулы озвучиваются в соответствии с правилами их прочтения, принятыми в математике.
10. Простые формулы озвучиваются непосредственно в тексте.
11. Блоки-чертежи озвучиваются по генетическому принципу: описывается процесс постепенной прорисовки чертежа с пояснениями, обеспечивающими восприятие образа в целом.
12. Блочная структура электронных документов даёт возможность расширения уже созданных документов без кардинальной их переделки.
13. Блочная структура электронных документов даёт возможность перенесения наиболее важных блоков из одного документа в другой.
14. Блочная структура электронных документов позволяет соблюсти принцип максимальной полноты информации, обеспечивающий предоставление всех используемых понятий и терминов в рамках данного документа.
15. Блочная структура электронных документов даёт возможность создавать из отдельных документов своеобразные информационные системы.
16. При перемещении внутри электронного документа с блочной структурой возможна многоуровневая навигация, основанная на удобном описании общей блочной структуры документа. Она позволяет перемещаться от блока к блоку (например, по номерам блоков) и вызывает озвучивание блока, к которому пользователь обращается в данный момент.
17. При работе с информационными системами, включающими в себя несколько блочных документов, естественную основу общей навигационной системы составляют системы навигации каждого документа.

Необходимо признать, что разработка электронных документов, создаваемых по данной схеме, требует кропотливой работы. По этой причине проще просто озвучивать небольшие, но содержательные математические тексты. Шаги в этом направлении делались и автором этой статьи, и его студентами, которые просто записывали аудиофайлы во время лекции. Конечно, лектор заранее знал об этом и строил свою лекцию так, чтобы избегать отсылок к зрительным образам. Детально проговаривались формулы, а также проводилось вербальное описание чертежей.

Целенаправленная работа по озвучиванию материалов, помогающих в подготовке студентов с дефектами зрения к государственному экзамену, проводилась автором в 2016/2017 учебном году совместно с Анной Анатольевной Мироновой. Работа получила положительную оценку студентов по окончании государственного экзамена. Все студенты с дефектами зрения получили оценку «отлично». В определённой степени этому помогли упомянутые выше аудиоматериалы.

4. ЗВУКОВАЯ МОДЕЛЬ ФУНКЦИИ

Теперь мы переходим к вопросу о разработке инструментальных программных средств, направленных на различные способы работы пользователей с дефектами зрения с компьютерной графикой. Ниже будут изложены идеи, положенные в основу трёх дипломных работ, защищённых под моим научным руководством.

Первая работа связана с созданием звуковой модели графика функции. Речь идёт о дипломной работе Алексея Новикова «Звуковое моделирование функций одной переменной», защищенной в 2009 году. В этой работе значения той или иной функции увязывались с музыкальными звуками различной высоты.

Отметим, что в 2017 году Александр Козловский защитил диплом, в котором результаты работы Новикова перенесены на мобильный телефон.

Что касается работы Новикова, то на её основе была написана статья «Звуковое моделирование математических функций», которая по ряду причин не была напечатана. Её текст мы приводим ниже, поскольку статья даёт достаточно ясное представление о предлагаемом методе. Авторами статьи являются А. К. Новиков и М. Е. Степанов.

«Выбор темы данной статьи связан с наличием проблем, возникающих при работе на компьютере у пользователей, имеющих ограничения по зрению. Речь идёт о затруднениях, а порой и невозможности, восприятия компьютерной графики.

Доступ к текстовой информации для этой группы пользователей облегчается с помощью специальных программных средств, таких как программа экранного доступа Jaws (job access with speech), которая позволяет незрячим людям считывать текст с экрана. Специальный модуль этой программы распознаёт текст, а встроенный синтезатор озвучивает распознанную информацию. Немаловажно и то обстоятельство, что Jaws адаптирован под самую распространённую в настоящее время операционную систему Windows. Таким образом, любой текстовой электронный документ сейчас является доступным для незрячих.

Однако этого нельзя сказать о фрагментах электронных документов, содержащих графику. В качестве примера можно привести диаграммы в Excel. Именно это конкретное обстоятельство и послужило отправным пунктом нашего исследования.

Одна из тенденций современной науки связана с построением единой картины мира на основе понятий информатики и теории информации. Для учёных, избравших именно эту позицию, характерна точка зрения, согласно которой для любого реального объекта существует исчерпывающая информационная модель, в конечном счёте, представляющая собой текст. Таким образом, утверждается, что любой объект может быть исчерпывающе описан словесно.

Фактически это иное выражение убеждённости многих учёных в познаваемости мира научными методами. Не обсуждая правильность этой позиции, отметим, что не только людям искусства, но и тем, кто достаточно далёк и от науки, и от искусства, научное описание представляется сухим и обезличенным, лишённым эмоционального стержня.

Общеизвестно, что человеку свойственно эмоциональное и образное восприятие мира. Достаточно вспомнить о существовании текстов принципиально ненаучной формы, прежде всего, поэтических. Порой они дают человеку более полное и глубокое представление о мире, чем научные теории.

Рассмотрим в качестве примера возможные способы описания чёрно-белого рисунка, созданного с помощью средств растровой графики. Его полное и абсолютно точное описание представляет собой прямоугольную таблицу, клетки которой заполнены нулями и единицами. Однако если изображение является хоть сколько-нибудь сложным, представить его по этому описанию практически невозможно. Даже расплывчатая фраза: «Здесь изображён человек», – даёт лучшее представление о рисунке, чем полная, но малопригодная для человеческой психики информация.

Мы можем сделать вывод, что, не отвергая точных описаний, следует искать для них подходящую форму. А, кроме того, крайне желательно, иметь дополнительное средство, позволяющее создавать некий целостный, эмоционально наполненный образ, передающий характер описываемого изображения. Например, звуковым образом некоторого объекта (звуковой моделью) может послужить мелодия.

Данная работа как раз и посвящена разработке подходов к звуковому моделированию графиков математических функций. В связи с выбором изображаемого объекта работа одновременно имеет математические и психолого-педагогические аспекты, и в её основу положен ряд идей математического характера. В частности, как теоретический прообраз звуковой модели функции, используется математическое понятие сплайна.

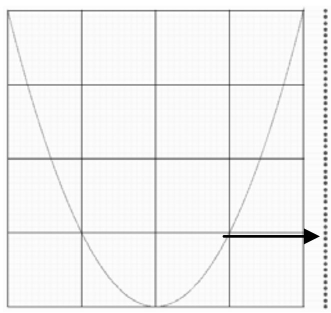
Термин сплайн произошёл от английского слова spline (рейка, стержень). Этим словом англоязычные чертёжники называли приспособление (гибкую и упругую линейку), предназначенное для проведения через заданные на плоскости точки гладкой кривой. В дальнейшем это название перешло на результат – гладкую кривую. В современной математической практике сплайны составляются из кусков, соответствующих многочленам третьей степени.

По аналогии со сплайнами нами вводятся понятия звукового, вербального и смешанного звуко-вербального сплайнов. Эти понятия являются базовыми терминами, используемыми нами при решении проблемы звукового моделирования функций.

Основные идеи данного исследования таковы.

1. Графики функций выбраны как наиболее удобные объекты для звукового моделирования, поскольку они являются одномерными многообразиями, движение вдоль которых связывает изменение аргумента со временем. Тем самым, изменение независимой переменной моделируется течением времени.

2. Значения ординаты могут быть переданы высотой звука. При этом функция предстаёт перед пользователем как последовательность нот, заменяющих числовые значения. Эту последовательность мы и называем звуковой моделью функции, **звуковым сплайном** или звуковым графиком. Таким образом, звуковой сплайн представляет собой мелодию, которая генерируется на основе значений моделируемой функции.

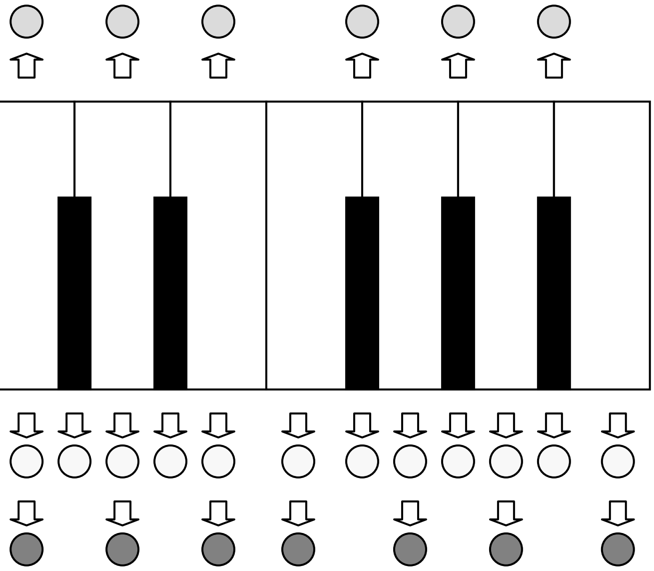


3. Воспроизведение звуковой модели можно сопроводить исследованием функции, а результаты исследования озвучить как комментарий, например, фразами типа: достигнут максимум; функция обращается в нуль; начинается интервал возрастания и т. д. Такой комментарий без звукового графика мы будем называть **вербальным сплайном**. Соединение звукового графика и вербального сплайна мы называем **звуко-вербальным сплайном**.

4. Звуковой сплайн можно рассматривать с нескольких точек зрения:
- **физически** – это последовательность звуков;
- **психологически** – звуковой образ, обеспечивающий особую форму восприятия функции и графика;
- **эстетически** – мелодия;

– **математически** – преобразование непрерывной функции в дискретную последовательность, сопоставляющую моменты времени и ноты;
– **алгоритмически** – совокупность алгоритмов вычисления или формирования значений функции, исследования функции, преобразования действительных значений в целые и воспроизведения соответствующей мелодии и комментария.

Для выбора наиболее эффективных вариантов создания звуковых моделей функции можно выбирать те или иные виды звуковых рядов.



Целотоновая гамма

Частоты звуков хроматического звукоряда образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\sqrt[12]{2}$. Частота ноты ля первой октавы равна 440 герц, что даёт возможность генерировать хроматический звукоряд.

Хроматический звукоряд

Диатонический звукоряд

5. Моделируемая функция может задаваться не только аналитически, но и графически. Это открывает возможность создания графического редактора, позволяющего формировать графики функций различной формы.

6. Поскольку нашей основной целью является предоставление пользователям, имеющим ограничения по зрению, возможности чувственного восприятия графиков, крайне желательно обеспечить доступ каждого из этих пользователей к самостоятельному изменению их формы с помощью специализированного графического редактора. Для успешной работы пользователь должен представлять суть действий, которые он может применить к графику функции. При этом он должен мысленно предугадывать результаты своей работы, чтобы позже сравнить ожидаемую форму графика со звуковой моделью и убедиться в правильности своих действий.

Нами выбрана следующая образная схема преобразования графиков, достаточно удобная для пользователей:

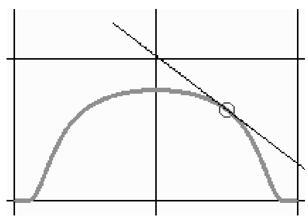
– исходные графики, загружаемые в графический редактор и подвергаемые преобразованиям, представляют собой набор из несколько элементарных функций, в число которых входит и константа;

– введены два указателя, обеспечивающих перемещение по графику и управление изменением формы этого графика;

– перемещение горизонтального указателя позволяет выбрать область значений аргумента, вокруг которой будет производиться изменение графика;

– перемещение вертикального указателя поднимает или опускает точки графика в виде бугра или ямы;

– ширина изменяемой области задаётся с помощью специального параметра, названного нами вязкостью.



Математической основой для создания редактора стала следующая функция: $f_0(x) = e^{-\frac{1}{(1-x)^2(1+x)^2}} = e^{-\frac{1}{(1-x^2)^2}}$, если |x| ≤ 1, в противном случае f(x) = 0. Эта функция имеет производную $f_0'(x) = -e^{-\frac{1}{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{4x}{(1-x^2)^3}$, которая равна нулю в точках x = ± 1. Введя параметры: c – сдвиг бугра по оси абсцисс, k – высота бугра и w – вязкость (ширина бугра), можно построить функцию $f(x) = e^{-\frac{k}{(1-\frac{(x-c)^2}{w^2})^2}}$, которая определяет разовое действие в графическом редакторе. Производная модифицированной функции равна $f'(x) = -4 \cdot k \cdot \frac{x-c}{w^2} \cdot e^{-\frac{k}{(1-\frac{(x-c)^2}{w^2})^2}} \cdot (1-\frac{(x-c)^2}{w^2})^{-3} \cdot$ Если в графический редактор как исходная загружена функция g(x) и проведено n воздействий с параметрами c_i, k_i, w_i, то итоговая функция выразится формулой $F(x) = g(x) + \sum_{i=1}^{n} e^{-\frac{k_i}{(1-\frac{(x-c_i)^2}{w_i^2})^2}}$. Её производная также легко вычисляется, что позволяет без затруднений создать вербальный сплайн.

Характер преобразований можно представить себе, осуществляя мысленное поднятие области графика в виде бугра или его опускание в виде ямы. Математические характеристики используемых функций при этом воспринимаются пользователем только на уровне чувственного образа.

Одним из авторов данной статьи (А. К. Новиковым) были написаны две программы, реализующие вышеизложенные идеи.

Первая из этих программ позволяет получить по выбору либо звуковой, либо звуковербальный сплайн для многочленов не выше третьей степени с произвольными коэффициентами.

Вторая программа позволяет:

– озвучивать некоторые часто встречающиеся элементарные функции, такие, например как линейную функцию, её модуль, квадратичную функцию и т. д.;

– строить на экране графики и использовать графический редактор для преобразования в интерактивном режиме исходной функции в функцию произвольного вида;

– сохранять созданную модель и озвучивать её в дальнейшем.

При разработке этих программ и их тестировании проведена серия экспериментов, выясняющих степень эффективности звукового представления функции. Более развёрнутое психолого-педагогические исследование предполагает проведение дополнительной серии экспериментов с участием специалистов по психологии восприятия и тифлопедагогике.

Авторы надеются, что их работа вызовет определённый интерес. Они будут благодарны за любой отзыв об их работе».

Недостатком изложенного в статье метода является то обстоятельство, что в звуковых рядах маловато звуков для гибкого моделирования функций. По этой причине автор статьи продолжил искать новые подходы, предоставляющие доступ к компьютерной графике лицам с дефектами зрения.

5. «ОЩУПЫВАНИЕ» КОМПЬЮТЕРНОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

Вторая работа, направленная на создание программных средств, открывающих доступ к компьютерной графике пользователям с дефектами зрения, была защищена в 2016 году. Речь идёт о дипломной работе Александра Авдеева «Звуко-сенсорное изучение графиков функций».

Эта дипломная работа посвящена разработке подходов к решению проблемы представления графических объектов звуковыми образами, на примере графиков функций, но, как и работа Новикова, она имеет психолого-педагогическое содержание, а не только математическое. Подобным образом в принципе можно озвучивание любые (нематематические) изображения. Работа опирается на одну из психологических теорий первой половины двадцатого века.

Речь идёт, о теории Курта Левина, важном достижении психологической науки, связанном с использованием идей физики. Курт Левин разработал концепцию личности, в основе которой лежит заимствованное из физики понятие поля. Понятие поля с точки зрения Левина представляет собой совокупность взаимосвязанных факторов, состоящую из возможных для данного индивида событий и сил, предопределяющих, какая из возможностей реализуется в поведении индивида. Поведение индивида является внешним выражением событий, происходящих в его психологическом поле. События эти представляют собой либо перемещение из одной области поля в другую, либо изменение самой структуры поля, описываемой Левиным с помощью понятий топологии.

В работе Авдеева метод изучения формы графика, основывается на идеях Курта Левина. Основная мысль такова. Графический объект как бы индуцирует скалярное силовое поле. Величина этого поля убывает с возрастанием расстояния от объекта (изображения) до курсора или пальца пользователя в случае сенсорного экрана. Пропорционально величине поля генерируется звуковой сигнал, который по принципу «тепло – холодно» помогает пользователю, двигаясь по экрану, «ощупать» графический объект. Графики функций выбраны как наиболее простые по форме объекты, а именно линейные многообразия.

После того как в науке было сформировано представление о силовых полях, оказалось, что многие явления могут быть естественным образом описаны именно как поля. В нашем случае речь идёт о поле, связанном с восприятием объекта достаточно сложной формы.

Математическое понятие силового поля (речь идёт не о поле в смысле высшей алгебры) сформировано в рамках математического анализа в векторной форме. При этом под скалярным полем понимают числовую величину, некоторое значение которой сопоставлено каждой точке плоскости или пространства [4]. Именно такое математическое поле и служит основой для создания сенсорно-звукового поля, позволяющего «ощупать» графический объект.

При реализации соответствующей программы возникает ряд конкретных проблем вычислительного характера. Первая из них состоит в выборе алгоритма формирования скалярного поля графика, предоставляемого пользователю. Фактически речь идёт об определении расстояния до кривой от каждой точки экранного пространства. При более сложном изображении усложняется и данная проблема.

Одним из вариантов её решения является предварительное сканирование узлов достаточно мелкой решётки. Для каждого узла осуществляется прохождение вдоль графика, приводящее в итоге к определению минимального расстояния от соответствующей точки до кривой. Таким образом, в этом случае заранее формируется массив, задающий скалярное поле с достаточной точностью.

Второй вариант использует прохождение точки по кривой (возможно, с достаточно большим шагом) и определение расстояния в каждый момент перемещения курсора. Здесь важную роль играет время вычисления, поскольку оно может задерживать движение по экрану или отставать от него.

Модификация второго варианта, направленная на ускорение вычислений, состоит в замене кривой на ломаную. При этом определение минимального расстояния до звеньев производится с помощью известной формулы аналитической геометрии.

Кроме проблемы вычисления значений поля расстояний возникает также проблема распределения звуковой интенсивности, то есть проблема преобразования математического поля в поле сенсорно-звуковое.

Наконец ряд проблем связан с навигацией (устранение выхода за пределы экрана) и со скоростью перемещения (она не должна быть слишком быстрой).

В ходе написания дипломной работы была создана работающая версия программы, реализующей идею «ощупывания». Однако желательно было бы продолжить соответствующие исследования и создать более совершенные программные реализации предлагаемого метода.

6. ГРАФИЧЕСКИЙ КОНСТРУКТОР, КАК СРЕДСТВО АКТИВНОЙ РАБОТЫ С КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКОЙ ДЛЯ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ С ДЕФЕКТАМИ ЗРЕНИЯ

Наконец, мы подошли к третьей работе, направленной на создание программных средств, открывающих доступ к компьютерной графике пользователям с дефектами зрения. Речь идёт о дипломной работе Николая Шарапова «Графический конструктор для лиц с дефектами зрения», защищённой в 2017 году.

Целью данной дипломной работы является разработка нового подхода, который позволяет лицам с дефектами зрения активно работать с компьютерной графикой и самостоятельно создавать компьютерные изображения. Данная проблема весьма актуальна, поскольку в настоящее время до некоторой степени решены только проблемы работы таких пользователей с текстовой информацией. В то же время невозможность активно работать с компьютерной графикой, что значительно обедняет и затрудняет взаимодействие незрячих с компьютером.

В основу работы положены следующие принципы, которые реализованы в виде отлаженной программы.

1. Посредником между компьютером и незрячим пользователем должна стать инструментальная программа, которая, по сути, является графическим редактором особого вида.
2. Интерфейс данной программы использует только нажатия различных клавиш на клавиатуре и исключает использование мыши. Это сделано по той причине, что незрячему пользователю несравненно удобней работать с клавиатурой.
3. Главной особенностью данной программы является то, что при построении изображения используется только заранее оговорённые геометрические фигуры, например, окружности. По этой причине созданный Шараповым графический редактор можно назвать графическим конструктором, поскольку итоговое изображение как бы конструируется из вполне определённых деталей.
4. Кроме того, в работе с программой заранее оговаривается характер создаваемого изображения. Например, в конкретной реализации программы производится построение рожицы, являющейся традиционной формой детского рисунка.
5. Заранее оговаривается максимально возможное число конструктивных элементов. В данной программе их семь – овал лица, правый глаз, левый глаз, нос, рот, правое ухо, левое ухо.
6. Все элементы изображения занумерованы, что позволяет выбирать и включать в работу нужный пользователю элемент. Например, при нажатии на клавишу с числом «1» пользователь начинает работу с овалом лица.
7. Каждый элемент может подвергнуться однозначно оговоренным изменениям, а именно, увеличение и уменьшение радиуса; перемещение центра окружности в одном из четырёх

направлений: вправо, влево, вверх и вниз. Кроме того возможна отмена изменений, произведённых за время последнего контакта с элементом, а также возвращение элемента в исходное состояние.

8. Все действия незрячего пользователя озвучиваются. В частности он оповещается о названии рабочего элемента и о характере последнего действия проведённого им самим. По желанию пользователя может быть произведено озвучивание параметров каждого элемента.

9. Кроме того, программа проводит анализ общей конфигурации построенного изображения и сообщает об этом пользователю. Например, «Изображение находится в пределах нормы» или «Рот вышел за пределы, которые очерчены овалом лица».

10. Предполагается возможность рельефной распечатки изображения с целью осязательного ознакомления пользователя с изображением.

Автору статьи представляется, что и в этом случае желательно было бы продолжить соответствующие исследования и разработки.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье излагается несколько идей автора, связанных с тифлопедагогикой и возникших в ходе работы со студентами, имеющими дефекты зрения. Некоторые из этих идей частично реализованы в виде инструментальных программ, созданных в ходе написания дипломных работ, которыми руководил автор данной статьи.

Речь идёт о следующих идеях.

- Использование экрана Алексеева для создания осязательных объектов математического характера, в первую очередь речь идёт о кривых и поверхностях (идея не реализована).
- Разработка электронных документов с блочной структурой и озвучиванием формул и чертежей (дипломная работа Антона Лазарева).
- Передача формы графиков математических функций с помощью звуков различной высоты (дипломная работа Алексея Новикова).
- Сенсорное «ощупывание» изображений с помощью звукового поля различной интенсивности, сформированного по типу «тепло – холодно» (дипломная работа Александра Авдеева).

Предоставление незрячему пользователю графического редактора, организованного по типу конструктора (дипломная работа Николая Шарапова).

ЛИТЕРАТУРА

1 И. М. Нуркаева. Методические проблемы обучения программированию незрячих и слабовидящих студентов. МГППУ. Труды факультета информационных технологий. Вып. 4, 2009.

2 М. Е. Степанов. Метод сложных движений в компьютерной геометрии. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. Вып. 1, 2011.

3 М. Е. Степанов. Метод криволинейных координат в компьютерной геометрии. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. Вып. 3, 2013.

4 И. А. Гольдфайн. Векторный анализ и теория поля. М., Физматгиз, 1962.

Работа поступила 25.12.2017г.

УДК 372.851

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

М. Е. Степанов

В статье обсуждаются вопросы методики преподавания высшей математики, возникающие при современном уровне образования в нашей стране. Автор опирается на опыт работы на факультете информационных технологий МГППУ.

The article discusses the methods of teaching higher mathematics, arising at the modern level of education in our country. The author relies on his experience working at the Faculty of Information Technologies of the Moscow State University of Psychology and Education.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА
Высшее образование, методика преподавания математики, математический анализ, линейная алгебра, дифференциальные уравнения, теория вероятностей.

1. ВВЕДЕНИЕ

Отношение к методике преподавания математики часто является достаточно прохладным, а иногда и ироничным. Подтверждением этому факту может послужить хорошо известный анекдот, который утверждает, что математики делятся на три непустых множества. Первое составляют творцы, открывающие новые факты и доказывающие собственные теоремы. Во второе множество входят те, кто не способен получать новое знание сам, но может доносить его до других людей – это преподаватели математики. Наконец, третье множество состоит из методистов, то есть лиц, которые не могут открывать новые математические факты, а кроме того неспособны и преподавать.

Отчасти такое отношение можно объяснить свойственной ряду творческих личностей заносчивостью, что тоже можно подтвердить анекдотом. Каждый крупный математик уверен, что все математические теоремы делятся на три непустых множества. Первое составляют неверные утверждения. Во второе множество входят утверждения тривиальные. И, наконец, третье множество состоит из «МОИХ ТЕОРЕМ».

Однако есть и более основательные причины для пренебрежительного отношения к методистам и их методикам. Действительно, часто «методическое творчество» очень напоминает схоластику в её самых неприглядных формах. С другой стороны, всегда были выдающиеся учёные, которые в своей преподавательской деятельности значительное внимание придавали решению чисто методических вопросов. Ограничусь двумя примерами. На мехмате МГУ мне пришлось слушать курс Владимира Игоревича Арнольда «Обыкновенные дифференциальные уравнения» и курс Марка Иосифовича Вишика «Уравнения в частных производных».

Оба лектора не скрывали, что строятся новые курсы, и что идёт их утряска и шлифовка. В. И. Арнольд использовал смелый и необычный приём. После доказательства очередной теоремы он вдруг сообщал аудитории, что в доказательстве содержится ошибка. Это заставляло студентов более внимательно следить за рассуждениями преподавателя.

Что касается М. И. Вишика, то по окончании каждой лекции он обращался к студентам с просьбой сообщить, где они испытали затруднения, и какие детали были им неясны. Все замечания он скрупулёзно записывал. При этом, кстати, возникла довольно забавная ситуация. Один не вполне адекватный студент (множество таких учащихся не только не является пустым, но и становится в наше время всё более мощным) каждый раз задавал вопросы слишком уж элементарного характера, а иногда просто нелепые. Аудитория посмеивалась, а Марк Иосифович разводил руками и иронично пояснял всем: «Товарищ очень интересуется».

Автор данной статьи и в мыслях не имеет намерения сравнивать себя с выдающимися педагогами-математиками, но всё же надеется, что некоторые его соображения, связанные с методикой преподавания математики могут представить некоторый интерес. При этом он знает, что в методике трудно претендовать на новизну и на безусловную правильность подхода к изложению того или иного вопроса. Однако обсуждение некоторых проблем методики может стимулировать педагогическую активность других преподавателей, особенно молодых.

Хочется отметить, что данная статья, возможно, не была бы написана, если бы не проблемы, стоящие перед образованием в настоящее время. Наличие подобных проблем, кажется, готовы признать даже в сферах, осуществляющих управление образованием. В связи с этим отметим, что современная ситуация в образовании характеризуется падением уровня образования в целом и, в частности, что особенно важно для данной статьи, с ухудшением подготовки абитуриентов. Причины этого связаны не только с непродуманными управленческими решениями. Чрезвычайную роль играет также изменение мотивации молодёжи. Отметим ещё и в целом негативное влияние электронных устройств, приводящее к потере не только навыков устного счёта, но и к утрате некоторых жизненно важных интеллектуальных навыков.

Обсуждать всю совокупность перечисленных проблем мы не можем, но обязаны отметить, что эти проблемы усложняют работу преподавателя и в том числе заставляют его искать новые подходы к преподаванию, включая поиск методический.

Но переходя к обсуждению методических проблем, автор невольно вспоминает фантастический рассказ «Какая прелестная школа!…», который написал Ллойд Биггл-младший. В образовании используется телеобучение. Ученики дома смотрят уроки по телевизору, но могут свободно переключаться на любого преподавателя. Учитель, уроки которого смотрит большее число учащихся, является лучшим. По этой причине молодая учительница использует стриптиз. Но рано или поздно ученики поймут, что он никогда не дойдёт до конца. Учительницу ждёт неизбежный крах. Иное дело математик, крепкий профессионал, который прекрасно жонглирует наглядными пособиями и ловко держит кусок мела на носу. У него всегда будет аудитория, пусть и скромная.

Автор статьи надеется, что его критики всё же признают его крепким профессионалом несмотря на неизбежное наличие слабых мест в его методиках.

2. О КОМПЛЕКСЕ ОСНОВНЫХ МЕТОДИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ

Методические проблемы имеют различный характер. Речь может идти как о вопросах весьма общего характера, так и о вопросах частных, хотя и имеющих важное значение. Начнём с рассмотрения некоторых из проблем общего характера.

Первая проблема методического характера, о которой мы будем говорить, непосредственно не связана с трудностями, возникшими в настоящее время, хотя и обостряется из-за них. Речь идёт о важнейшем выборе преподавателя: на что ориентироваться на студента или на предмет?

Поясню суть данной дилеммы реальным конфликтом, произошедшим около десяти лет назад. Незрячие студенты, с которыми у меня сложились доверительные отношения, попросили меня побеседовать с одним из преподавателей, который слишком быстро проговаривал формулы. В результате многие студенты не могли следить за ходом его рассуждений. Я выполнил их просьбу и поговорил с этим преподавателем. В результате он с нескрываемым раздражением ответил мне, поражаясь моей бестолковости: «Слишком детально проговаривая формулы, я не успею вычитать свой курс».

Попытаюсь дать комментарий этой ситуации. Известный философ Иван Ильин в работе «О сопротивлении злу силою» показывает, что единых рецептов решения вопроса, вынесенного в заглавие его книги, не существует. Необходим конкретный анализ, который только и может дать ответ на необходимость применения силы и на степень, условно говоря, необходимой обороны. Мнение же такого великого писателя и мыслителя как Лев Толстой о том, что сила неприемлема никогда и ни при каких обстоятельствах, является неверным. Очевидно, что подобная ситуация имеет место при любых проблемных ситуациях. И если конкретный анализ такой ситуации проведён грамотно, его результаты не могут быть опровергнуты самыми крупными авторитетами.

Рассмотрим вопрос: откуда возникло стремление к слишком скрупулёзному вычитыванию курса? Думается, что оно уместно в рамках университетского образования, когда лекции читают выдающиеся учёные, порой не слишком склонные к педагогической деятельности. Важно и то, что они читают курс сильным студентам. Кроме того, очевидно, что творческими математиками станет только небольшая часть студентов, но именно они и являются целью образовательного процесса. В результате преподаватель пусть и неосознанно становится на следующую точку зрения: я должен озвучить свой курс, и те, кто способен на это, получат возможность овладеть соответствующим материалом. Главной составляющей успеха являются личные усилия студента.

Подобная точка зрения, на наш взгляд, является уязвимой даже в данной конкретной ситуации. На это в частности указывает пример В. И. Арнольда и М. И. Вишика. Но в случаях, когда состав студентов недостаточно силён или же студенты обременены особыми проблемами, например, связанными с их здоровьем, преподаватель должен преодолеть своё преклонение перед предметом как некоей неприкосновенной абстрактной ценностью и обязан повернуться лицом к студентам, чтобы помочь им.

Впрочем, такая точка зрения может вызвать осуждение ревнителей высокой науки, ибо математика для них святей не только студента, но и человека вообще. Хотелось бы показать, к какому интересному результату достаточно часто приводит такой выбор. От начала до конца занятий преподаватель находится лицом к доске и спиной к аудитории. При этом никаких претензий к нему предъявлено не будет – он вычитывает курс. В то же время в адрес нашей позиции возможны обвинения, в том числе и чисто бюрократического порядка: «Ну, не вычитывает он всего, что можно вычитать, Ну, не успевает. Со студентами возится во вред учебному процессу. А подать его сюда! Немедля повернись к доске передом, к студентам задом».

Так что выбор, предполагающий нацеленность преподавателя на студентов, а не на предмет, заведомо является неблагодарным.

Нужно отметить, что здесь в полной мере применима философская категория, восходящая к Гегелю и Марксу – отчуждение. Какими бы соображениями не руководствовались «вычитыватели» курсов, результатом является отчуждение непустого множества студентов от науки как таковой.

Важнее, однако, вопрос о том, как действовать преподавателю, выбравшему студентов как главную цель своей работы. Отчасти ответ очевиден. Необходимо максимально активизировать индивидуальную работу со студентами. Но столь же очевидно и то, что при этом резко возрастает нагрузка на преподавателя. Увы, преподавание требует чуть ли не самоотречения. Видимо, по этой причине некоторые власть имущие лица советуют преподавателям переходить в бизнес. Это может несколько повысить уровень их благосостояния. Правда, если удастся безболезненно вписаться в рыночную экономику.

Однако сделать выбор – это лишь малая часть дела. Дальше начинаются трудно решаемые проблемы. Например, при нацеленности на индивидуальную работу возможен уход в две крайности. Либо преимущественная работа с сильными студентами (что в целом очень естественно), либо преимущественная работа со слабыми студентами (цель – стремление поднять общий уровень аудитории при надежде на хорошую самостоятельную работу сильных студентов).

Этих крайностей желательно избегать. И именно здесь на первый план выходит продуманная методика преподавания. В общих чертах по пунктам очертим наше видение данной ситуации.

1. Необходимо стремление к максимальному личному контакту с каждым студентом для погружения его в постоянную работу. Важной целью при этом является устранения пробелов в знаниях, имеющихся именно у данного студента. В результате такого контакта преподаватель должен составить представление о возможностях каждого студента и о том, на какую проблематику его направлять в дальнейшем.
2. Важнейшим средством осуществления личного контакта являются многочисленные контрольные работы, при выполнении которых каждый студент имеет возможность подойти к преподавателю для консультации. При этом даже у слабого студента нет необходимости списывать. Преподаватель же получает возможность изучить особенности каждого студента.
3. После предварительной оценки уровня студентов необходим переход на контрольные работы с индивидуализированным содержанием и различным уровнем сложности.
4. Желательно использование помощи сильных студентов для консультирования студентов более слабых.
5. Неизбежно создание и использование гибкой системы электронных конспектов по различным разделам математики, значительно более кратких, чем стандартные учебники.

О содержании и форме контрольных работ и электронных пособий будет сказано ниже.

В случае же неудачи полезно вспоминать бессмертные слова Виктора Степановича Черномырдина и повторять их, немного перефразировав: «Хотел как лучше, а получилось как всегда. Раньше работала половина студентов, а пол не работало, а теперь всё наоборот. Не надо класть оба яйца в одну корзину. Надо делать то, что нужно нашим студентам, а не то, чем мы здесь занимаемся. Здесь вам не тут. Ну, кто меня может заменить? Убью сразу. Извините. Никогда не было, и опять».

Это неуместные шутки? Нет, необходимость. Современный преподаватель, гонимый судьбой и министерством образования, вынужден искать точку опоры, хотя бы и в Черномырдине.

Вернёмся, однако, к собственно методическим проблемам. Прежде всего, следует выделить базовые и, если так можно сказать, вечные методические проблемы. Речь идёт, например, о чёткой постановке целей математического образования. При этом определяющим фактором является вопрос о том, на подготовку специалистов с каким уклоном нацеливается высшее учебное заведение: математик, ориентированный на теоретическую работу в какой-то области математики; математик-прикладник; математик-инженер, который ориентирован на применение уже разработанных методов и теорий; наконец, педагог. Заметим, что методистов специально не готовят. Они сами рождаются как Афродита из пены.

Выбор целей преподавания определяет содержание курсов и отбор материала, а также выбор уровня строгости и определение удельного веса образного и логического мышления.

В нашем конкретном случае целью является воспитание математика-прикладника или математика-инженера, что в частности предполагает свободное владение понятиями и методами современной информатики. Ядро комплекса математических дисциплин имеет традиционный характер, то есть включает в себя курсы аналитической геометрии, алгебры и теории чисел, линейной алгебры и большой комплекс дисциплин, связанный с курсом математического анализа, вырастающий из него и его развивающий. Особое место занимает теория вероятностей, как важнейший инструмент математика-прикладника. Комплекс курсов, связанных с дискретной математикой, примыкает к курсам, связанным с информатикой, и нами рассматриваться не будет.

3. О ПОНИМАНИИ МАТЕМАТИКИ

Теперь мы переходим к обсуждению проблем более конкретного характера, оставляя при этом за собой право касаться и вопросов общего характера, в частности, связанных с проблемой понимания математических фактов. Освоить какой-то предмет, значит, понять его. Но в чём состоит суть понимания?

При рассмотрении содержания математики, принято говорить о **математическом понятии**, вне зависимости от того, идёт ли речь о творческом развитии математического знания, об обучении математике или же о разработке методик преподавания. Нам, однако, более обоснованным представляется использование термина «**объект математической реальности**». Его введение позволяет детализировать процесс обучения и разделить его на формирование представления об объекте математической реальности как о понятии и как об образе. Только такое разделение позволяет достичь итогового соединения, условно говоря, логических аспектов владения объектом и аспектов интуитивного овладения им. Именно этот подход позволяет достигнуть того уровня видения математической реальности, которое называется пониманием.

Приведём цитату из [1], правда, используя её «поперёк мнения» автора: «Один мой остроумный коллега рассказал о недавнем разговоре с другим своим коллегой-математиком. Он сказал: «Я занимаюсь математической логикой» – и тот вполне искренне ответил следующее: «Ты знаешь, а я в своей деятельности логикой никогда не пользовался!» Должен сказать, что это почище литературного героя, который был поражён, когда узнал, что говорит прозой. И это сказал математик!»

Надо полагать, что коллега-математик подразумевал, кроме всего прочего, что до крайности формализованная логика и творческая деятельность математика, основанная на понимании некоторых математических теорий, являются мало связанными между собой сферами. И уж заведомо при обучении математике преждевременный уход в область абстракций, вроде бы сулящих единство логического восприятия разнородных конструкций, приводит к тому, что понимание математики ни в коей мере не достигается.

Борьбу за максимальное засилье абстрактно-логических тенденций в обучении математике следовало бы назвать «бурбакистикой». Малосимпатичная (см. [2]) группа французских математиков взялась за «очищение авгиевых конюшен», то есть за наведение логического порядка в математике. При этом она между делом нанесла непоправимый вред математическому образованию, в том числе школьному.

Нельзя сказать, что причиной данного процесса явилась некая врождённая зловредность бурбакистов. Они имели основания для того, чтобы ратовать за перестройку математического образования. Математика движется вперёд, а математическое образование до сих пор основывается на «Началах» Евклида. Правильно ли это? В результате возникает дилемма: «отказ от традиций, включая интуитивное восприятие математики» или «отсталость»? Важнейшим вопросом при этом стал выбор уровня общности.

А любовь к обобщениям и «формализм» неразрывны. Печальные результаты, связанные с триумфом бурбакистов в образовании общеизвестны. Возник спор о математике, в котором часто слышатся алармистские нотки. Сначала гибло математическое образование. Теперь дело дошло до спада в самой математике. Причиной этого является как раз торжествующая формалистика и неуёмная жажда обобщений.

В. И. Арнольд активно вёл борьбу за важность понимания сущности математики, возможно, иногда в полемике, несколько перегибая палку в свою сторону и называя математику физикой, в рамках которой эксперименты являются наиболее дешёвыми. Здесь тоже проявлялись объективные основания, приводящие к спорам и конфликтам среди математиков, озабоченных состоянием математического образования. В частности, Арнольд рассматривал известную книгу Я. Б. Зельдовича «Высшая математика для начинающих» как образец учебного пособия. И это при том, что книга была подвергнута сокрушительной критике за отсутствие элементарной строгости.

Можно понять и позицию В. И. Арнольда, и позицию математиков, критикующих нестрогий, эвристический стиль рассуждений. Но, делая выбор между строгостью и эвристикой, следует помнить о результатах, полученных Леонардом Эйлером и о тех, часто весьма далёких от формальной строгости, методах рассуждений, которые великий математик применял. Следует также попытаться ответить на вопрос: чем была бы математика в настоящее время если бы не было гениальных прозрений, первоначально покоящихся на очень зыбких основаниях, у того же Эйлера, Галуа, Римана, Лобачевского? Чтобы чистить конюшни, нужно их сначала построить. Не правда ли?

Автор статьи полагает, что нельзя полностью пренебрегать строгостью математических рассуждений. Но ради этой строгости не следует выплёскивать из корыта ребёнка вместе с водой. Наилучшим решением проблемы является разделение труда. Одни стремятся к достижению строгости, другие дышат воздухом живой математики. При этом сфера математического образования должна располагаться именно во владениях живой математики.

Процитируем по этому поводу великого французского учёного Анри Пуанкаре: «... логическая безупречность рассуждений, ведущих от аксиом к теоремам, не единственное, что должно нас занимать. Разве в математике всё сводится к правилам совершенной логики? Утверждать это всё равно, что сказать, будто всё искусство шахматистов сводится к правилам хода отдельных фигур. Надо, ведь делать ещё выбор из всех комбинаций, какие только можно сделать из материалов, доставляемых логикой; истинный математик производит этот выбор правильно, потому что им руководит какой-то надёжный инстинкт, какое-то смутное сознание некоторой более глубокой, более сокровенной, геометрии, одно лишь и придающее ценность возводимому зданию. Исследовать происхождение этого инстинкта, изучить законы этой сокровенной геометрии, законы, которые чувствуются, но не формулируются – было бы всё ещё недурной задачей для философов, не признающих, чтобы логика была всем» [3].

Итак, повторим, что изучение объекта математической реальности требует формирования представления об этом объекте и как о понятии, и как об образе. При этом необходимо добиваться соединения логических аспектов познания объекта и аспектов интуитивного видения этого объекта и умения манипулировать им в виде пластического образа.

В качестве примера рассмотрим некоторые этапы формирования у студентов развитого представления о числовой прямой – базового понятия аналитической геометрии и математического анализа. Здесь соединяются представления о множестве действительных чисел и о континууме, как геометрическом, а точнее топологическом образе. При этом чувственный образ континуума понимается как некое непрерывное геометрическое многообразие. На данном этапе обучения речь идёт об одномерном многообразии, а именно о кривой. В итоге у студента должен быть сформирован образ пластического перехода прямой в график функции. Далее аналогичные представления переносятся на декартову плоскость и двумерный континуум.

Обсуждая данный пример, мы затронем некоторые вопросы, о которых будем подробнее говорить ниже, а именно вопрос о повторении некоторых фактов из школьного курса математики и вопрос об использовании компьютерных технологий при изучении математики. Сейчас отметим только, что и повторение элементарных фактов, и использование компьютера являются в настоящее время необходимыми составляющими учебного процесса.

Множество действительных чисел рассматривается нами как множество десятичных дробей, поскольку эта точка зрения в большей степени соответствует духу прикладной математики, чем теория сечений Дедекинда. В то же время сведения и о теории Дедекинда могут быть доведены до студентов, как дополнительный материал.

Перечислим этапы формирования представления о числовой прямой. Некоторые пункты в основном повторительного характера в процессе обучения занимают небольшое время, хотя при этом затрагивается достаточно большое количество вопросов. Опыт показывает, что обо всех этих вопросах желательно упомянуть для систематизации общей картины в сознании студента.

1. Обзор основных видов чисел (натуральные, целые, обыкновенные дроби или рациональные числа). В том числе обсуждается вопрос о том, была ли исторически связана с натуральными числами сложная математическая проблема. Изобретение нуля. Позиционные системы счисления и их роль в математике. Недесятичные системы счисления.
2. «Физический» смысл отрицательных чисел как долгов и отрицательных температур. Шкалы, как прообразы и модели числовой прямой. Расстояние между точками с целыми координатами. Дадим как пример экономического истолкования разъяснение того, что минус единица в квадрате равна единице. Введём два вида множеств. Первое – положительные числа (наличность), изображаемые зелёными камешками. Второе – отрицательные числа (долги), изображаемые красными камешками. Промежуточным является пустое множество, не содержащее элементов (ни наличности, ни долга). Поскольку сложение и вычитание сведены к последовательному прибавлению и вычитанию единиц, мы работаем либо с множеством зелёных элементов, либо с множеством красных элементов. Любое число представимо не единственным способом, но может быть сведено к элементам одного цвета с помощью своеобразной аннигиляции. Когда речь идёт о красных элементах, удаление (вычитание) одного приводит к уменьшению долга на единицу, но к тому же результату по экономическому смыслу приводит и добавление зелёной единицы, компенсирующей единичный долг. Таким образом $-(-1) = 1$, то есть $(-1)(-1) = 1$.
3. Рациональные числа как обыкновенные дроби. Смысл приведения дробей к общему знаменателю. Разложение натуральных чисел на простые множители. Признаки делимости. Наименьшее общее кратное нескольких чисел.
4. Связь десятичных дробей и дробей обыкновенных. Перевод конечных десятичных дробей в обыкновенные дроби. Перевод обыкновенной дроби в десятичную. Причины возникновения бесконечных десятичных периодических дробей. Сумма бесконечной геометрической прогрессии. Перевод бесконечных периодических десятичных дробей в обыкновенные дроби.
5. Процедура измерения отрезков. Два метода измерения отрезков. Алгоритм Евклида и измерение отрезков. Алгоритм получения длины отрезка в форме десятичной дроби. Возможные исходы измерения при этом типе измерения. Построение отрезка, имеющего длину, заданную конечной или бесконечной десятичной дробью. Связь с понятием супремума и теоремой Вейерштрасса о монотонной ограниченной последовательности.
6. Иррациональные числа. Доказательство существования иррациональных чисел. Квадратные корни, как примеры иррациональных чисел. Символические вычисления с иррациональными числами. Конструирование иррациональных чисел, состоящее в описании конструкций бесконечных десятичных дробей, обеспечивающих их непериодичность. Решение задач следующего типа:

– Каким числом является сумма целого и иррационального чисел?
– Доказать, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ является иррациональным.
– Каким числом может являться сумма двух иррациональных чисел? Привести примеры.
– Сконструировать два иррациональных числа, сумма которых рациональна.
– Привести пример двух иррациональных чисел сумма и произведение которых является целыми числами.
– Существуют ли два иррациональных числа сумма и разность которых является целым числом.

7. Числовая прямая и действительные числа. Построение взаимно однозначного соответствия между десятичными дробями и точками прямой с помощью процедуры измерения отрезков. Два представления множества действительных чисел – десятичные дроби и точки прямой. Расстояние между точками на числовой прямой. Взаимосвязь геометрического и алгебраического языка в курсе математического анализа.
8. Определение понятия переменной величины как свойства объекта, выраженного действительным числом. Спиртовой термометр как модель переменной величины. Геометрическая модель переменной величины – числовая прямая, по которой движется точка-указатель. Функция y = f(x) как зависимость между двумя переменными. *Примечание*: обычно понятие переменной сводится к процедуре произвольного выбора значений из определённого множества. При этом, хотя бы отчасти, теряется физический смысл понятия «переменная». Этот смысл состоит в том, что переменная даёт числовое выражение некоторых свойств объектов окружающего мира. Именно для этого переменные и нужны. В рамках классической математики переменные также выражают свойства объектов, например, в геометрии речь идёт о длинах, площадях, объёмах и т.д. В свою очередь, признав, что переменная является выразителем свойств, следует беспорядочный «выбор значений» заменить «изменением», то есть движением указателя вдоль числовой прямой. Именно такое интуитивное представление соответствует физическому смыслу термина «переменная». Хотя с точки зрения логики и возможности обобщений именно «выбору значений» может быть отдано предпочтение.
9. Декартова система координат на плоскости. Два представления декартовой плоскости – множество упорядоченных пар десятичных дробей (пар вещественных чисел) и точки евклидовой плоскости. График как множество точек вида (x; f(x)).
10. Пластический образ континуума. Целью данного пункта является наглядное объяснение причин, по которым график функции является кривой. Само объяснение таково. Представим себе, что на оси абсцисс в декартовой плоскости расположен пластичный, легко деформируемый стержень. Ординаты всех его точек равны нулю. Стержень можно параллельно оси абсцисс переместить вверх или вниз на некоторую величину c. При этом ординаты всех его точек примут одинаковые значения c, уже неравные нулю. С помощью этой процедуры построен график функции y = c. Пусть далее нам дана функция y = f(x). Теперь мы будем перемещать по вертикали не весь стержень целиком, а каждую его точку x сдвинем на своё особое расстояние y = f(x). При этом стержень деформируется. Он даже может разорваться, но если для близких значений абсцисс, значения ординат тоже близки, то разрывов не будет, а график функции предстанет в виде кривой. *Примечание*: можно отрицать необходимость приведённых рассуждений, но можно и утверждать, что они полезны. Что и делает автор.
11. Компьютерное построение графиков как материализация представления о пластическом образе континуума. Пусть нам дана некоторая функция. Требуется построить на экране компьютера график этой функции. Перед построением в нашем сознании пребывает воображаемая декартова плоскость (t; u), на которой начерчен график функции u = f(t). Обозначения переменных x и y оставлены для экранных координат. (Для по-

строения использован язык программирования Small Basic). Пусть в точке (x0; y0) находится начало координат. Число a указывает, сколько пикселов содержит единичный отрезок на экране.

Строим на экране отрезок [–1; 1] оси абсцисс и поднимаем его вертикально вверх на высоту a.

```
x0 = 320
y0 = 220
a = 100
For t = –1 To 1 Step 1/1000
x = x0 +a*t
y = y0 – a
GraphicsWindow.SetPixel(x,y,"")
EndFor
```

Чтобы поднимать не весь отрезок целиком, а каждую его точку по отдельности на свою высоту, сделаем переменную y зависимой от параметра t. Это вполне естественное решение, поскольку разным значениям параметра t соответствуют разные точки на горизонтальном отрезке. Для этого в уже написанной программе мы заменим всего лишь одну единственную команду **y = y0 – a**, например, на команду **y = y0 – a*t*t**, что будет соответствовать построению графика функции $y = x^2$.

Пластический образ поверхности как аналога графика функции двух переменных. Представим себе, что на декартовой плоскости расположен пластичный, легко деформируемый ковёр. Каждая точка ковра определяется парой координат (x; y). Если же нам дана функция от двух переменных z = f(x, y), мы каждую точку ковра (x; y) сдвинем по вертикали (уже в трёхмерном пространстве) на своё особое расстояние z = f(x, y). При этом ковёр деформируется и превратится в аналог графика функции от двух переменных, а именно в некоторую поверхность. Компьютерная реализация этого построения более сложна, поскольку требует владения понятием линейного отображения двумерных пространств для создания хорошей проекции объёмного изображения на экран.

4. НЕКОТОРЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ МЕТОДИЧЕСКОЙ РАБОТЫ СВЯЗАННЫХ КАК С НЕПОСРЕДСТВЕННЫМ ПРОЦЕССОМ ПРЕПОДАВАНИЯ, ТАК И С ПОСТРОЕНИЕМ ДОЛГОВРЕМЕННЫХ КУРСОВ МАТЕМАТИКИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН

Важнейшей задачей преподавателя, связанной с непосредственным процессом преподавания на младших курсах, является **выяснение тех особенностей студентов, от которых существенно зависит успешность учебного процесса**. Работа, конечно, очень нелёгкая и лежащая в русле индивидуальной работы со студентами. **Прежде всего, речь идёт об уровне подготовки каждого учащегося**. Как уже отмечалось **основным инструментом здесь являются контрольные работы**. С их помощью можно оценить степень знания и понимания (что не одно и то же) студентом различных фактов. Это может стать основой при восполнении пробелов в знаниях студента, в том числе в области элементарной математики. Для этого **в индивидуализированные контрольные можно и нужно вносить повторительные задачи**. Если говорить честно, то преподавание на современном этапе проходит под всё громче звучащем лозунгом: «Повторение – мать учения».

Вот зарисовка с натуры. Преподаватель говорит и пишет на доске: На следующем занятии будет проведена контрольная работа на тему «Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными». Далее он повторяет эту фразу ещё дважды и спрашивает: «Все слышали? Все поняли?» – «Все! Все!» – «Вопросы есть?» – «Да. А контрольная будет? А когда она будет? А какие такие уравнения? А что там разделяется?»

Расскажу ещё один вроде бы малозначительный случай из своей практики, который, однако, хорошо характеризует нынешних студентов с точки зрения их эрудиции, в том числе, и за пределами математики.

Несколько лет назад на нашем факультете обучался не очень прилежный студент по фамилии Макаренко. Кроме всего прочего он был склонен к ироническому комментированию некоторых действий преподавателя. Заметив, что я тяготею к повторению многих тем, он после очередного моего предложения что-то повторить воскликнул: «Ну, конечно же, повторение – мать учения». Я подошёл к нему и сказал: «Это верно». И тут же спросил: «Но знаешь ли ты, кто является отцом учения?» Он растерялся. После чего я сообщил ему, что отцом учения является Макаренко. О своём знаменитом однофамильце он и не слыхивал. Так же, как и студент по фамилии Качалин не знал великого советского футбольного тренера и даже почему-то стыдился своей фамилии. Подобные примеры можно продолжать очень долго.

Тут возникает **тема, связанная со стилем общения преподавателя со студентами**. Кстати, на нашем факультете эта тема особенно актуальна, поскольку преподавателю приходится работать и с аутистами, и с инвалидами – опорниками, с незрячими и плохо слышащими. Это, естественно, предъявляет повышенные **требования к такту педагога**. Впрочем, тут секрет очень прост – нужно относится к студентам заинтересованно и доброжелательно. Хотя, честно говоря, это тоже часто нелегко.

Немалую роль в установлении доверительного контакта с аудиторией играет юмор. Шутить иногда вполне уместно, особенно если вспомнить слова Паскаля о том, что предмет математики настолько серьёзен, что никогда не лишне сделать его хоть в какой-то мере занимательным. А юмор и занимательность хорошо дополняют друг друга. Рискну (юмор легко критиковать с достаточными основаниями) привести только два из используемых мной занимательно-юмористических текста. Один из них включён в электронный документ, посвящённый радианной мере углов как развлекающее дополнение, а второй представляет собой непритязательный анекдот, который я часто рассказываю на занятиях. Кстати, моё первое знакомство с этим анекдотом восходит к тем годам, когда я слушал лекции Арнольда и Вишика.

«**Философская задача**» из текста о радианной мере: «Какую форму математическая теорема «все окружности подобны» приобретает в философии?»

Ответ. Мыслитель раннего Возрождения Николай Кузанский (1401 – 1464) писал математические и философские трактаты, не стремясь к системе, но следуя божественному вдохновению. Николай виртуозно использовал математические понятия для иллюстрации философских идей.

В числе прочих геометрических фигур он обращался к окружности и кругу, а также к их основному свойству – округлости. Вот, что он писал по этому поводу: «В круге, не имеющем начала и конца, поскольку ни одна его точка не больше начало, чем конец, я вижу образ вечности. Поэтому и округлость, коль скоро она такая же, я называю образом вечности».

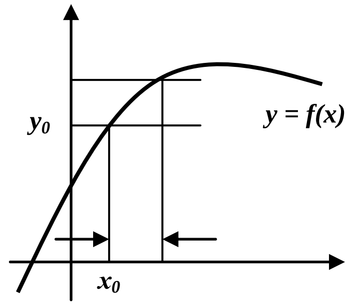
Итак, с позиций философии окружность – образ вечности. Вечно же лишь совершенное. Следовательно, все окружности совершенны, и теорема приобретает форму: «Все окружности бесподобны».

Анекдот о математиках в сумасшедшем доме. Один агрессивный обитатель сумасшедшего дома терроризировал своих товарищей, заявляя, что продифференцировал их. Узнав о нанесённом им ущербе, все начинали рыдать и биться в судорогах. И только один в ответ засмеялся. Террорист не хотел сдаваться и закричал: «Теперь я ещё и проинтегрировал тебя». Потенциальная жертва продолжала смеяться. Отчаявшийся террорист воскликнул: «Кто же ты такой?» – «Я *е* в степени *икс*».

Анекдотец не затейлив. Однако Гёте в своей автобиографической книге «Поэзия и правда» сообщает, что пользовался в детстве зарифмованными учебниками. И, как он считает, именно низкое качество стихов помогло ему легко запоминать все зарифмованные правила. Можно засвидетельствовать, что данный анекдот действует на студентов подобно старинным немецким учебникам.

Чрезвычайно важным моментом является **достижение в процессе преподавания максимальной наглядности**. В значительной мере, если следовать мысли Германа Вейля, отказ от упора на наглядность или наоборот устремлённость к ней можно рассматривать как одно из сражений между демоном алгебры и ангелом геометрии. Но в целом вопрос о наглядности возвращает нас к вопросу об изучении объекта математической реальности, выражаемого и понятием, и образом.

Эффективным средством, помогающим в достижении наглядности, в том числе являются краткие электронные конспекты. Приведём пример такого конспекта, дотошность которого в чём-то превосходит краткость.

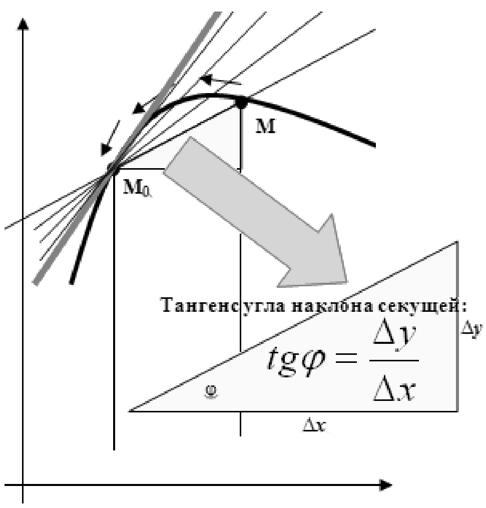


Функция – это зависимость, связывающая значения двух переменных числовых величин. Любая функция – это описание некоторого процесса изменения. При этом функция – абстрактное (без лишних деталей) описание некоторого процесса. При таком описании мы можем узнать о процессе только то, возрастает функция, убывает или возрастание сменяется убыванием (либо наоборот).

Пусть задана функция y = f(x). Считая аргумент аналогом времени, рассмотрим значения функции в момент x_0 и в близкий к нему момент x. Функция принимает в эти моменты значения $y_0 = f(x_0)$ и y = f(x). Основная характеристика изменения числовой величины – разность между старым и новым значениями функции, которая называется приращением функции $\Delta y = y - y_0$. Её смысл таков: было значение y_0, стало значение y. Произошедшее изменение – разность значений Δy. Одно и то же изменение может произойти за разное время. Характеристика длительности изменения – разность значений аргумента, которая называется приращением аргумента. Она равна $\Delta x = x - x_0$. Её смысл таков – время, за которое произошло изменение равно Δx.

Скорость изменения функции – это изменение, которое происходит за единицу времени, т. е. отношение Δy к Δx. Однако отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ – это всего лишь средняя скорость изменения значения функции за время Δx.

Для вычисления мгновенной скорости нужно уменьшить длительность времени изменения Δx, приближая (устремляя) значение x к значению x_0. Процесс вычисления отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при таком уменьшения называется вычислением предела. Этот предел и называется производной, которая обозначается через y′.

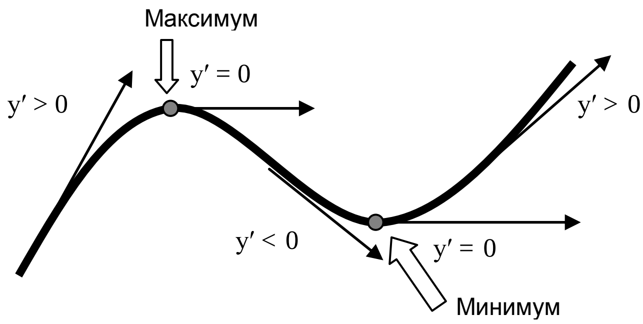


Производная – это предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю. Символически вычисление производной записывается следующим образом $y'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Очень важен геометрический смысл производной. Он выясняется при попытке решения задачи о проведении через точку M_0 (x_0; y_0) касательной к графику функции y = f(x). Решение задачи состоит в том, что сначала проводят секущую, через точки М (х; у) и M_0, лежащие на графике. Приближение точки М к точке M_0 превращает секущую в касательную, поскольку она отсекает всё меньшую дугу. «Отсечение точки» и есть касание.

Тангенс угла наклона секущей равен отношению приращения функции к приращению аргумента. При слиянии точек М и M_0 этот тангенс переходит в тангенс угла наклона касательной. Итак, тангенс угла наклона касательной к графику функции равен производной функции в этой точке.

Касательная указывает направление изменения функции. Если касательная направлена вниз, то функция убывает, если касательная направлена вверх – функция возрастает. Но касательная направлена вниз, если тангенс угла наклона касательной отрицателен ($y' < 0$). Вверх она направлена, если тангенс угла наклона касательной положителен ($y' > 0$).



При смене знака производной функция достигает наивысшей или наоборот низшей точки, называемой экстремумом. Если знак производной меняется с плюса на минус, функция имеет максимум. Если знак производной меняется с минуса на плюс, функция имеет минимум. На практике для поиска экстремумов нужно приравнять производную к нулю. Таким образом, можно изучать поведение функций с помощью производных.

Хочется отметить следующее обстоятельство. При освоении понятия производной необходимо пояснять студентам, что в формуле $y'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ является и средней скоростью изменения значений функции, и тангенсом угла наклона секущей. Подобные напоминания никогда не являются лишними. Без них помнят, что получается в пределе, но забывают предел какого выражения вычисляется.

Естественно, что кроме выявления пробелов в подготовке студентов **необходимо определять уровень способностей каждого, его мотивацию, и даже личную ситуацию**. Дело в том, что в наше время мы имеем дело с поколением молодых людей с ослабленным здоровьем. Увы, иногда немолодой преподаватель, проводящий занятия, является самым здоровым человеком в аудитории. Часто студенты испытывают финансовые сложности. Всё это нужно учитывать преподавателям, работающим в эпоху Кали-юги (согласно индуистским учениям Кали-юга – век раздора, за которым следует махапралая – уничтожение мира). Однако проблемы скорой гибели мироздания выходят за рамки методической работы. Их упоминание уместно лишь как некое юмористическое отступление, возможно, немного темноватого оттенка.

Что же касается **выявления творческой активности студентов** и уровня их способностей, то на первых порах (до того момента, когда студент может обратиться к решению, пусть и несложных, чисто математических вопросов), полезно **использование развивающих задач**. Размышление над этими задачами с одной стороны не требуют предварительного освоения новых понятий, а с другой – предполагает наличие самого настоящего творчества. Особенно важно то, что решение задач, подобного типа, **заинтересовывает** студента.

Выбор задач, конечно, должен соответствовать личным приоритетам преподавателя. Отбор задач при этом требует только ознакомления с содержанием большого числа прекрасных сборников старинных задач, задач олимпиадного характера и книг таких замечательных авторов как, например, Мартин Гарднер.

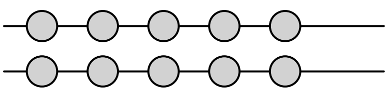
Я приведу одну задачу, которая в годы моей юности была опубликована в журнале «Наука и жизнь». Встречаются две женщины. Одна из них говорит другой: «Я знаю, что у тебя три сына, но не знаю их возрастов». – «Произведение их возрастов равно 36». – «Данных недостаточно». – «Сумма их возрастов равна числу окон в доме, около которого мы стоим». – «Данных недостаточно». – «У моего старшего сына рыжие волосы». – «Этого достаточно». Определите возраст всех троих мальчиков.

Иногда занимательная задача может соответствовать изучаемому предмету. И, конечно, это особенно ценно. Например, преподавая предмет «Исследование операций», я давал вводную задачу, принадлежащую Томасу Саати. Суть задачи такова. Кладоискатель узнаёт, что на некой поляне находится клад. Чтобы его найти, нужно встать спиной к берёзе, отсчитать число шагов до дуба, повернуть под прямым углом направо и сделать ещё столько же шагов. В данной точке следует забить колышек. Затем, вернувшись к берёзе и ту же процедуру проделать относительно сосны с тем отличием, что поворот делается налево. Клад находится в середине отрезка, соединяющего колышки. Беда в том, что, прибыв на поляну, кладоискатель обнаруживает дуб и сосну, но никаких следов берёзы не нашёл. Как отыскать клад в этой ситуации?

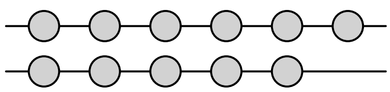
Следует также иметь ввиду, что существует целый класс задач, простых по формулировке, но важных для математики. Среди них следует выделить диофантовы уравнения. Их место в математике хорошо известно (имеется ввиду десятая проблема Гильберта). Не менее знамениты и сложности, возникающие при решении этих уравнений. Однако диофантово уравнение $x^2 + y^2 = z^2$, связанное с теоремой Пифагора решается весьма просто, причём многими поучительными методами. И это при том, что самые первые размышления об этом уравнении немедленно приводят к вопросам, связанным с великой теоремой Ферма. Приведём в высшей степени наглядное, но частное решение уравнения Пифагора с помощью гномонов, пришедших к нам аж из Древней Греции.

Задача. В мешочке лежат камешки. Мы можем их вынимать оттуда и раскладывать на земле. Можем ли мы, не считая камешки, узнать, чётное или нечётное их количество лежало в мешочке?

Ответ. Можем, раскладывая камешки в 2 ряда один под другим.

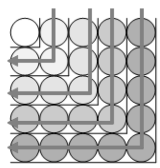


Чётное число



Нечётное число

Задача. В мешочке лежат камешки. Мы можем их вынимать оттуда и раскладывать на земле. Можем ли мы, не считая камешки, узнать, является ли квадратом общее число камешков, лежавших в мешочке?



Ответ. Можем, раскладывая камешки в виде квадрата. При этом камешки следует подкладывать к уже выложенному квадрату углами (по-гречески – гномонами).

Задача. Докажите, что сумма первых **n** нечётных чисел равна $\mathbf{n^2}$.

Задача. Найдите какие-нибудь три натуральных числа **x**, **y** и **z**, связанных соотношением $\mathbf{x^2 + y^2 = z^2}$.

Указание. Приложив гномон к одному квадрату, мы получим другой. Если число камешков в самом гномоне также является квадратом, то мы как раз и получим соотношение $\mathbf{x^2 + y^2 = z^2}$.

Задача. Найдите формулу для нахождения бесконечного количества решений неопределённого уравнения $\mathbf{x^2 + y^2 = z^2}$.

Далее можно заинтересованных студентов подвести к получению общего решения уравнения Пифагора. В частности, это можно сделать с помощью тригонометрических формул, выражающих синус и косинус через тангенс половинного угла. Это позволяет установить связь диофантовых уравнений с процедурой интегрирования, что может помочь в дальнейшем при разъяснении причин существования «неберущихся» интегралов типа эллиптических. Далее возможно ознакомление с уравнениями Пелля и Маркова. Это открывает путь к более глубокому изучению проблематики теории чисел. Но всё это делается в рамках индивидуальной работы со студентом.

5. ВОПРОСЫ ПОСТРОЕНИЯ СОВОКУПНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН КАК ЕДИНОГО ЦЕЛОГО

Очень важным является вопрос об общем построении курса математики как единого целого. В значительной степени это и методический вопрос. Здесь тоже необходим единый взгляд на курс в целом. Целью же является выделение «скелета» курса, а также избранных (центральных) вопросов курса. При этом необходимо включить в корпус математических дисциплин и разделы элементарной математики, не только являющейся мостиком к математике высшей, но и выступающей в качестве совершенно необходимого инструмента, без которого нельзя решать более сложные проблемы.

Ниже автор перечислит разделы математики, о которых в дальнейшем и пойдёт речь. Из списка по различным причинам исключены

- теория чисел, как область наиболее далёкая от прикладной математики;
- высшая геометрия и топология, поскольку все необходимые вопросы рассматриваются в рамках других предметов;
- комплексный анализ, функциональный анализ и уравнения математической физики. Эти разделы слишком усложнили бы обсуждение методических проблем. Вопросы, связанные с использованием комплексных чисел в аналитической геометрии, линейной алгебре и теории дифференциальных уравнений и т. д., можно рассмотреть в курсе общей алгебры и при изучении рядов Тейлора (вывод формулы Эйлера);
- исследование операций (предмет который автор неизменно преподавал на факультете ИТ), поскольку основные вопросы можно рассмотреть в курсах линейной алгебры и теории вероятностей;
- вычислительная математика, поскольку основные вопросы можно рассмотреть в курсах линейной алгебры и математического анализа.

В итоге корпус рассматриваемых ниже разделов математики включены

1. Элементарная математика.
2. Аналитическая геометрия.
3. Общая алгебра.
4. Линейная алгебра.
5. Математический анализ функций одной переменной.
6. Математический анализ функций нескольких переменных.
7. Теория дифференциальных уравнений.
8. Теория вероятностей.

Приступим к рассмотрению соответствующих разделов математики. При этом нашей целью является выделение центральных вопросов каждого курса, а не перечисление всех изучаемых в курсе тем. По возможности причины нашего выбора будут мотивироваться или хотя бы кратко комментироваться. В отношении некоторых вопросов будет просто-напросто отмечена их важность и то, что на них необходимо сделать акцент в процессе преподавания.

Кроме того, целый ряд центральных вопросов будет рассмотрен особо, причём это будет сделано достаточно подробно. Примером может послужить изучение показательной функции и введение числа е. Речь идёт именно о тех вопросах, где автор что-то придумал сам, хотя повторим, что никаких притязаний на методические открытия мы не имеем. В дальнейшем отсылки к разделам, где обсуждаются подобные вопросы, будут для краткости даваться в форме: см. Тему № такой-то. Все указанные темы рассматриваются в следующем разделе.

Итак, начинаем с элементарной математики, хотя делаем это с некоторой опаской, так как боимся услышать: «Повторять такие вещи в высшем учебном заведении? Нонсенс». И тем не менее…

Элементарная математика. Отметим, что повторение некоторых вопросов, связанных с элементарной математикой может быть превращено в пропедевтику, нацеленную на достаточно сложные вопросы, которые будут изучаться в дальнейшем.

Работа с дробями. Необходимая в наше время проверка навыков работы с дробями может быть проведена при изучении числовой прямой.

Геометрическая прогрессия. Формулы суммы членов конечной и особенно бесконечной геометрической прогрессии используются и в математическом анализе, и в теории вероятностей. По этой причине их можно повторить в тот момент, когда они потребуются. Следует довести до студента тот факт, что формулы сокращённого умножения связанные с разностью квадратов, а также разностью и суммой кубов являются частным случаем формулы суммы членов конечной геометрической прогрессии: $1-q^{n+1}=(1-q)(1+q+q^2+...+q^n)$. Это обстоятельство может быть использовано при вычислении производной степенной функции с натуральным показателем. Рассмотрение формулы суммы бесконечной геометрической прогрессии с определённой точки зрения может стать пропедевтикой перед изучением рядов Тейлора, поскольку формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+...$ можно рассматривать как разложение функции в ряд Тейлора. На сравнении с геометрической прогрессией основаны и признаки сходимости числовых рядов.

Теорема Пифагора является основой для вычисления расстояний в рамках аналитической геометрии и линейной алгебры. По этой причине разговор о ней должен вестись в соответствующих местах курса.

Связь между вычислением площади прямоугольника и перемножением скобок имеет, с нашей точки зрения, большое значение (см. **Тему 1**). Это может быть подтверждено результатами Леонарда Эйлера, которому ясное понимание того, как перемножаются скобки, позволило создать аналитическую теорию чисел. В нашем случае речь при обсуждении темы 1 будет идти в основном о вопросах теории вероятностей.

Число пи, радианная мера, тригонометрия. Как уже говорилось выше в школьном курсе градусная мера в известном смысле подавляет радианную. Кроме того, в курсе математического анализа необходимо провести чёткое описание тригонометрических функций произвольного угла (см. **Тему 2**).

Квадратный трёхчлен, выделение полного квадрата, разложение на множители. Квадратные уравнения выпускники школы решают довольно прилично, но, как правило, затрудняются с ответом на вопрос, как возникла формула решения квадратного уравнения. По этой причине желательно вспомнить, как производится выделение полного квадрата. Поскольку квадратичная функция и квадратные уравнения обязательно появляется в момент изучения производной, можно давать в контрольных работах задачи, которые предлагают найти экстремум функции и с помощью выделения полного квадрата, и с помощью производной. Вопрос о разложении квадратного многочлена на множители возникает и при вычислении пределов, и при интегрировании, и, конечно, в рамках курса общей алгебры. Так что для повторения этого вопроса можно где-нибудь найти несколько минут. Поскольку работа с комплексными числами обычно вызывает затруднения, желательно предложить студентам решить квадратное уравнение с комплексными коэффициентами. Не следует забывать и тот факт, что при решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами квадратные уравнения играют заметную роль.

Доведём до сведения читателей и один довольно забавный эпизод, который показывает, что квадратные уравнения могут фигурировать и в высоконаучных дискуссиях. Мой друг со студенческой скамьи Виктор Иванович Буслаев получил следующий важный результат.

О гипотезе Бейкера–Гаммеля–Уиллса в теории аппроксимаций Паде.

Известная Паде-гипотеза, высказанная в 1961 году Г. Бейкером, Д. Гаммелем и Д. Уиллсом, утверждает, что для всякой мероморфной в единичном круге **D** функции **f** найдется бесконечная подпоследовательность ее диагональных аппроксимаций Паде, сходящаяся к **f** равномерно на компактах, лежащих в **D** и не содержащих полюсов **f**. В 2001 году Д. Любински указал мероморфную в **D** функцию, опровергающую Паде-гипотезу. В. И. Буслаевым найдена функция, опровергающая голоморфный вариант Паде-гипотезы [4].

Поскольку мероморфная функция имеет полюса, а голоморфная их не имеет, ясно, что результат Буслаева, полученный фактически через несколько месяцев после результата Любински, полностью перекрыл последний. При личной встрече с Буслаевым Любински проверял все составляющие доказательства Виктора Ивановича. К его огорчению не было обнаружено никаких ошибок. А поскольку результат зависел от значения корней некого квадратного уравнения, Любински не удержался и спросил: «А квадратное уравнение Вы правильно решили?»

Что касается рассмотрения вопросов высшей математики, то, на наш взгляд, желательно использование элементарных методов рассуждений там, где это возможно. Примером может послужить математический анализ многочленов и рациональных функций.

С другой стороны, полезно демонстрировать получение элементарных результатов методами высшей математики. Например, базовые для тригонометрии формулы синуса и косинуса суммы и разности выводятся в школе достаточно сложными путями. По этой причине они запоминаются с трудом. В то же время их можно вывести при помощи скалярного произведения очень просто.

Два единичных радиус-вектора, образующие с осью абсцисс углы α и β, имеют координаты $(\cos\alpha; \sin\alpha)$ и $(\cos\beta; \sin\beta)$. Угол между ними равен $\beta - \alpha$. Таким образом, скалярное произведение этих векторов в геометрической форме равно $\cos(\beta-\alpha)$, а в координатной форме равно $\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$, из чего и вытекает формула для косинуса разности: $\cos(\beta-\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$.

Здесь особенно важна возможность самостоятельного восстановления результата, что вообще может рассматриваться как одна из особых целей обучения.

Аналитическая геометрия лежит в основе линейной алгебры и математического анализа. Напомним, что нашей главной задачей является выделение центральных вопросов курса аналитической геометрии. О формировании понятия числовой прямой мы уже говорили выше. Важный вопрос о вычислении расстояний связан с повторением теоремы Пифагора.

Возможны различные варианты построения курса аналитической геометрии. Наиболее интересным вариантом, на наш взгляд является использование векторной алгебры. При этом, рассматривая операции над векторами, следует использовать физическую пропедевтику (см. **Тему 3**). Важнейшие темы курса, связанные с различной формой уравнения прямых и с линейными преобразованиями можно определённым образом соединить (см. **Тему 4**). Знакомство с кривыми второго порядка в значительной мере помогает студенту подготовиться к встрече с рядом понятий математического анализа. Речь идёт о неявном и параметрическом задании функций и о методах построения касательных (см. **Тему 5**).

Несомненно, что для некоторых математиков курс аналитической геометрии является архаикой, поскольку его полностью перекрывает курс линейной алгебры. Однако, если можно так выразиться, плоская (двумерная) математика является полигоном, работа на котором развивает интуицию учащегося. Сошлюсь на [5]. Один из авторов этой книги не дожил до её выхода в свет. Вот что пишет о нём его соавтор, неявно обосновывая необходимость изучения курса «архаичной» аналитической геометрии.

«30 мая 1968 года, когда эта книга была в наборе, не стало Израиля Марковича Глазмана, которому всецело принадлежит основной замысел книги – конечномерное «моделирование» функционального анализа. Когда кто-нибудь рассказывал ему о сложных бесконечномерных построениях, он обычно спрашивал: «А как это выглядит в двумерном случае?» – и нередко этот шокирующий вопрос помогал лучше понять суть дела. Вся математическая деятельность этого яркого таланта была направлена на то, чтобы увидеть простую основу сложных вещей».

Увидеть простую основу сложных вещей – это суть настоящей методики. По этой причине автор статьи всегда планировал написать учебник по «двумерной математике». Поскольку автор много лет занимается компьютерной геометрией [6,7] он начал реализовывать соответствующую программу в своей неопубликованной многотомной работе «Компьютерная геометрия». Однако автор должен признать, что интереса к его работе не проявило ни одно издательство. Видимо, нужна хотя бы «трёхмерная математика».

Анализ. Мы уже затрагивали вопрос о формах введения понятия функции и понятия переменной. Очень важной частью курса является полноценное освоение основных элементарных функций (см. **Тему 6**). Одно из основополагающих понятий анализа – понятие предела (см. **Тему 7**). Очевидно, что понятие производной является важнейшим в курсе анализа, поскольку на нём основываются и такие понятия как интеграл, и такие методы, как разложение функций в ряды, и теория дифференциальных уравнений (См. **Тему 8**). Наконец, затронем некоторые аспекты, связанные с понятием интеграла (см. **Тему 9**).

Анализ функций нескольких переменных. При изучении функций нескольких переменных следует поставить во главу угла тему «Неявные функции и их дифференцирование». Это связано с тем, что именно эта тема завершает изучение функций одной переменной.

Алгебра. Особое внимание при изучении многочленов над полем действительных чисел следует уделить связи основной теоремы алгебры и теоремы Безу. При обсуждении вопросов деления с остатком одного многочлена на другой полезно использовать аналогию с делением чисел в позиционных системах счисления. Необходимо акцентировать внимание на способах нахождения целых корней. В частности, студенту необходимо научиться для уравнений третьей степени, имеющих целый корень, находить и остальные корни. Следует детально рассмотреть работу с комплексными числами в тригонометрической форме с акцентом на извлечение корней из единицы. Вся эта тематика активно используется и в линейной алгебре, и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Обыкновенные дифференциальные уравнения. Пропедевтика дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными с помощью дифференциальных уравнений вида $y' = f(y)$ (см. **Тему 10**). Образное описание уравнений первого порядка (см. **Тему 11**). Аналогия между множеством решений уравнения второго порядка и множеством прямых на плоскости (см. **Тему 12**).

Линейная алгебра. Вопрос об определителе как объёме (см. **Тему 13**). Геометрическое истолкование правила Крамера (см. **Тему 14**).

Теория вероятности. Все рассматриваемые нами вопросы, связанные с теорией вероятности, а именно, комбинаторика, геометрические вероятности, независимые события, аксиоматическое определение независимости и вывод геометрического характера независимости из алгебраического определения, вынесены в **Тему 1**.

Преподавание математики в наше время не может обойтись без использования вычислительной техники. Преподавателем могут быть использованы и такие программы общего назначения как Excel, и многочисленные программы, изначально имеющие математическую направленность. Автор статьи использует подобные программы, но его особой благосклонностью пользуется язык программирования Small Basic. Написание простых, но основанных на математических идеях, программ в известном смысле помогает своеобразной материализации математических понятий.

Отметим, что выбранные темы, как правило, не являются «финальными». Предпочтение отдавалось «промежуточным» темам, затрагивающим те вопросы, которые ещё появится в процессе обучения.

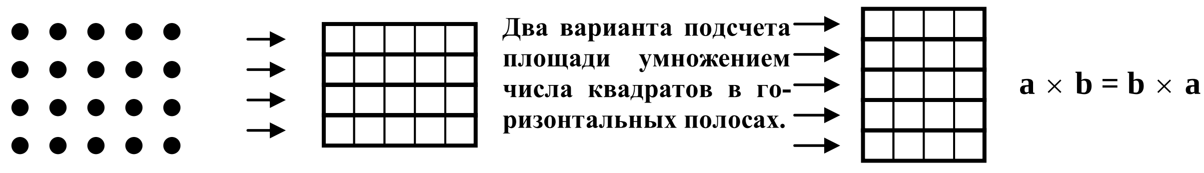
6. МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К КОНКРЕТНЫМ ТЕМАМ

Рассказ о соответствующих разработках уместно предварить известнейшим, но и остроумнейшим анекдотом, связанным с важными особенностями процесса обучения. Учитель сетует на бестолковость ученика: «Ну, такая бестолочь, что сил нет. Объяснял ему, объяснял, сам понял, а он не понимает». В анекдоте точно схвачена определённая особенность преподавательской работы. Годами объясняя одни и те же темы, учитель порой начинает видеть их несколько иначе. Оказывается, что в на первый взгляд простом и не таящем никаких сложностей материале, вскрываются неожиданные внутренние связи. И тот, кто вдруг начинает их видеть, может гордо заявить: «Сам понял». Так что далее читатель имеет возможность ознакомится с некоторыми простыми математическими вопросами, которые понял автор статьи.

<u>Тема 1.</u> Связь между вычислением площади прямоугольника и перемножением скобок. Данная тема восходит к геометрической алгебре, возникшей в Древней Греции, когда числа понимались как длины отрезков, а произведение двух чисел интерпретировалось как площадь прямоугольника.

Для умножения действуют законы коммутативности и ассоциативности, выражаемые равенствами **a** × **b** = **b** × **a** и (**a** × **b**) × **c** = **a** × (**b** × **c**).

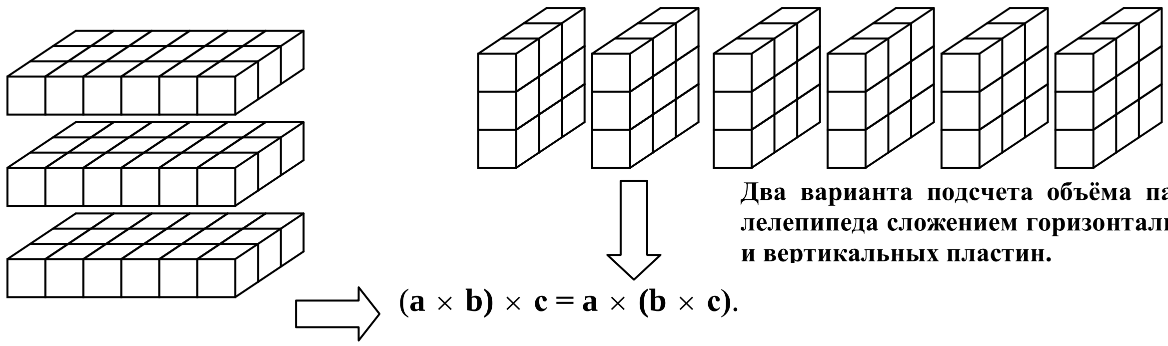
Для обоснования этих правил следует использовать геометрическое истолкование умножения. При многократном сложении (**b** раз) нескольких равных куч (по **a** предметов), можно заменить каждую кучу полосой из **a** единичных квадратов и сложить **b** полос одну под другой. В итоге получится прямоугольник **a** на **b**, площадь которого равна **a** × **b**. Его можно повернуть на 90º и представить, что он сложен из **a** горизонтальных полос, содержащих по **b** единичных квадратов. Площадь его не изменилась, следовательно, **a** × **b** = **b** × **a**.



a = 5, b = 4 **Площадь a × b** **Площадь b × a**

При рассмотрении произведения трёх чисел **a** × **b** × **c** предметы можно заменить единичными кубами и сложить из них параллелепипед. Его можно сложить из **c** горизонтальных пластин размером **a** на **b**, или же из **a** вертикальных пластин размером **b** на **c**. Произведение **a** × **b** × **c** равно объёму параллелепипеда, а, значит, (**a** × **b**) × **c** = **a** × (**b** × **c**). Так же как и в случае сложения, закон ассоциативности позволяет использовать запись произведения нескольких сомножителей вообще без скобок.

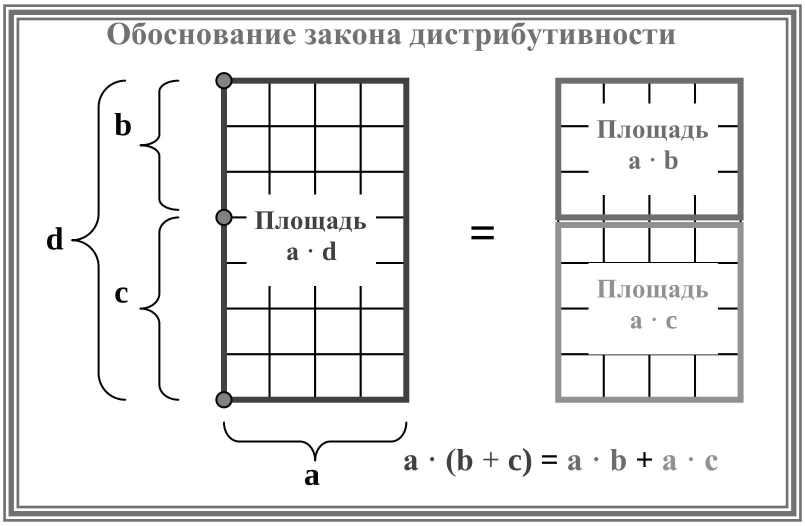
a = 6, b = 3, c = 3

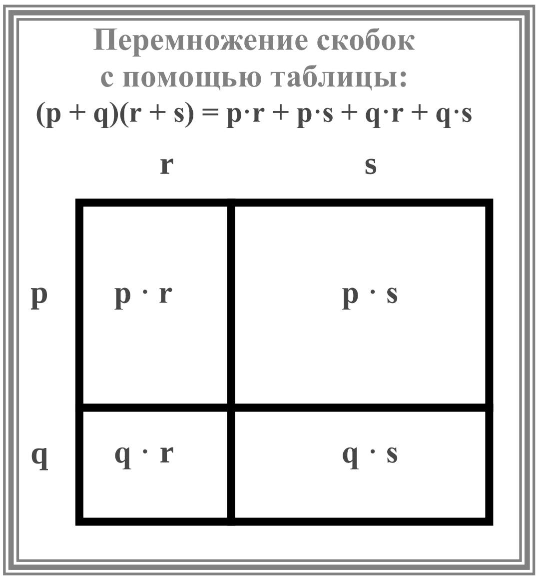


Два варианта подсчета объёма параллелепипеда сложением горизонтальных и вертикальных пластин.

Геометрическое истолкование умножения позволяет понять смысл закона, связывающего операции сложения и умножения. Речь идёт о законе дистрибутивности.

Произведение чисел **a** и **d** можно рассматривать как выражение для площади прямоугольника со сторонами **a** и **d**. Разобьём сторону длиной **d** на две части, длины которых обозначим через **b** и **c** (таким образом, **d** = **b** + **c**). Исходный прямоугольник будет разбит на две части, сумма площадей которых как раз и равна площади исходного прямоугольника. Символически это обстоятельство можно записать в виде равенства **a · (b + c) = a · b + a · c**, которое выражает закон дистрибутивности.





Закон дистрибутивности позволяет перемножать скобки, содержащие любое количество слагаемых. При этом могут использоваться два подхода. Первый состоит в том, что исходное выражение преобразуется по законам коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. В этом состоит основной принцип алгебраических вычислений, приводящий к выводу новых формул. Приведём пример перемножения двух скобок, содержащих по два слагаемых:

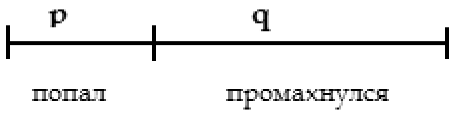
$$(p + q) \cdot (r + s) = (p + q) \cdot r + (p + q) \cdot s = r \cdot (p + q) + s \cdot (p + q) =$$
$$r \cdot p + r \cdot q + s \cdot p + s \cdot q$$

Второй подход основан на геометрическом истолковании умножения. Одну сторону прямоугольника разбивают на отрезки, число которых равно числу слагаемых в первой скобке, и возле каждого отрезка записывают одно из этих слагаемых. Со второй стороной прямоугольника поступают аналогично, применительно ко второй скобке. Проводя через точки деления вертикальные и горизонтальные линии, разбивают исходный прямоугольник на малые прямоугольники, в каждый из которых вписывают его площадь, равную произведению длин его сторон. Можно сказать, что исходный прямоугольник превратится в таблицу, клетками которой являются малые прямоугольники. Площадь большого прямоугольника одновременно равна произведению скобок и сумме малых прямоугольников. В итоге можно сформулировать правило: произведение скобок равно сумме всех попарных произведений каждого слагаемого из первой скобки на каждое слагаемое второй скобки.

Итак, при подобном подходе возникает своеобразная триада: перемножаемые скобки, прямоугольная таблица и прямоугольник, разбитый на части вертикальными и горизонтальными линиями. Пока речь шла только о том, как надёжно перемножить две скобки с большим числом слагаемых – с помощью таблице. Однако указанная триада тесно связана с некоторыми вопросами теории вероятностей.

Кроме статистической и классической интерпретаций понятия вероятности можно дать этому понятию геометрическое истолкование. С помощью достаточно простой геометрической модели можно успешно решать некоторые задачи вероятностей, имеющие заведомо негеометрическое содержание. Более того, эта модель позволяет разъяснить важнейшее понятие теории вероятности – понятие независимых событий.

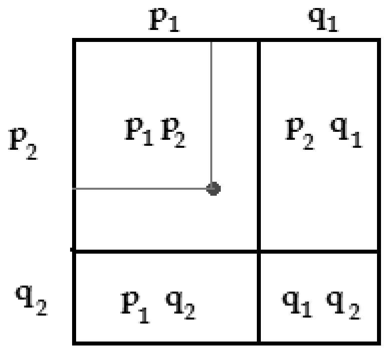
Задача о стрелках. Предположим, что навыки стрелка обеспечивают вероятность поражения цели с вероятностью p. Таким образом, вероятность промаха стрелка равна q = 1 – p. Естественно, что этим обеспечивается выполнение стандартного условия: p + q = 1. Геометрической моделью процесса стрельбы сделаем процесс бросания точки на отрезок единичной длины. При этом отрезок должен быть разбит на две части длиной p и q. Если точка попадает в первый отрезок, то событие соответствует попаданию стрелка в мишень (с вероятность p), соответственно, попадание точки в отрезок q соответствует промаху стрелка (с вероятностью q). Модель полностью соответствует бытовой интуитивной установке: вероятность найти упавшую монету на некотором участке пропорциональна длине этого участка. Сразу отметим, что числа p и q могут быть иррациональными и несоизмеримыми. Это означает, что задача не может быть сведена к классической вероятности.



Теперь рассмотрим стрельбу двух стрелков. Первый из них попадает с вероятностью p_1 и промахивается с вероятность $q_1 = 1 – p_1$, а второй с вероятностями p_2 и $q_2 = 1 – p_2$.

Решим вопрос о том, какова вероятность различных исходов стрельбы двух стрелков. Совместный выстрел можно рассматривать как бросание двух точек на стороны единичного квадрата. Однако можно рассматривать брошенные на стороны квадрата точки как проекции третьей точки, случайным образом брошенной в квадрат.

Квадрат можно рассматривать как комнату, пол которой полностью покрыт четырьмя прямоугольными коврами. Каждый ковёр соответствует одному из четырёх возможных событий:



А – попали оба стрелка;

Б – первый попал, второй промазал;

В – первый промазал, второй попал;

Г – оба промазали.

Геометрическая модель в полном соответствии с бытовой интуицией показывает, что исходы стрельбы двух стрелков определяются площадями ковров, то есть произведениями вероятностей попаданий и промахов обеих стрелков:

Событие А (оба попали) наступает с вероятностью $p_1 \cdot p_2$;

Событие Б (первый попал, второй промазал) – с вероятностью $p_1 \cdot q_2$;

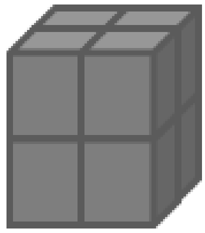
Событие В (первый промазал, второй попал) – с вероятностью $p_2 \cdot q_1$;

Событие Г (оба промазали) – с вероятностью $q_1 \cdot q_2$.

Задача об исходе стрельбы двух стрелков решена.

Теперь можно немного поговорить о понятии независимости событий. С одной стороны, независимость интуитивно понимается как, отсутствия влияния одного события на другое. С другой стороны, в теории вероятностей события называются независимыми, если вероятность совместного наступления двух событий равна произведению вероятностей этих событий. Геометрическая модель хотя бы отчасти демонстрирует, почему используются столь разные определения независимости.

Когда совместное событие конструируется с помощью прямого произведения, как квадрат из двух отрезков, возникает независимость событий.



Если стреляют два стрелка, событий четыре. Они перечислены выше. Если же стреляют три стрелка, то есть к двум добавляется третий, то каждое событие для двух стрелков превращается в два: два стрелка стреляли именно так, при этом третий либо попал, либо не попал. Значит, для трёх стрелков событий 8. Легко понять, что для n стрелков событий 2^n.

Для трёх стрелков события таковы: все трое попали, не попал только первый, не попал только второй, не попал только третий, попал только первый, попал только второй, попал только третий, все трое не попали. (Куб разрезан на 8 частей).

Чтобы получить полное решение задачи о трёх стрелках, то есть для вычисления вероятностей всех восьми событий, нужно перемножить три скобки (найти объём каждой из восьми составляющих куб частей):

$$(p_1 + q_1)(p_2 + q_2)(p_3 + q_3) =$$
$$= p_1p_2p_3 + q_1p_2p_3 + p_1q_2p_3 + p_1p_2q_3 + p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3 + q_1q_2q_3.$$

Часто требуется найти вероятности объединённых событий, например, событие «попал только один стрелок» складывается из трёх событий «попал только первый», «попал только второй», «попал только третий». Его вероятность равна $p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3$.

Аналогичным способом, перемножая скобки, можно решить задачу о нескольких стрелках. Одним из вариантов задачи о многих стрелках является задача об одном стрелке, который стреляет несколько раз. Здесь вероятности попаданий (p) и промахов (q) одинаковы в каждой скобке. Для перемножения скобок можно использовать бином Ньютона.

Наиболее естественный вопрос в данном случае, какова вероятность того, что цель при n выстрелах поражена 0 раз, 1 раз, … n раз. Каждое из этих событий можно рассматривать как объединение событий более простых событий.

Например, событие «стрелок попал один раз» состоит из событий типа «стрелок попал первым выстрелом, остальными промахнулся», «стрелок попал вторым выстрелом, остальными промахнулся» и т. д.

Итак, упомянутая выше триада действует в элементарной теории вероятностей. Она работает там, где события независимы. Перемножение скобок и таблица позволяют определиться с возможными исходами и их вероятностями. Прямоугольник даёт задаче геометрическую интерпретацию. При этом независимость событий увязывается с прямым произведением единичных отрезков.

Следующим этапом изучения является схема испытаний Бернулли. При этом триада продолжает иметь столь же большое значение. В том числе и при выводе формулы бинома Ньютона

Бином Ньютона – это формула для возведения двучлена p + q в n-ю степень. При перемножении n скобок из каждой скобки выбирают либо слагаемое p, либо слагаемое q. Любое произведение слагаемых имеет вид $p^k q^{n-k}$. Поскольку мы вынимаем из каждой скобки или p, или q, возникает вопрос: сколько членов вида $p^k q^{n-k}$ будет получено для каждого конкретного значения k?

Мы приходим к следующей задаче. Дано n коробок, в каждой из которых лежат один белый (p) и один чёрный (q) шар. Из каждой коробки наугад вынимают один шар. Каково количество вариантов, при которых будет вынуто ровно k белых шаров?

По смыслу сочетаний таких вариантов будет C_n^k. Следовательно, произведение $p^k q^{n-k}$ войдёт в окончательный результат с коэффициентом C_n^k. Из этого и следует формула бинома:

$$(p+q)^n = p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \ldots + C_n^{n-k} p^{n-k} q^k + \ldots + C_n^1 p q^{n-1} + q^n.$$

Схема испытаний Бернулли. Задача о стрелках и комбинаторика соединяется в теории, созданной Якобом Бернулли, старшим в семье великих математиков Бернулли. В схеме испытаний Бернулли многократно выполняются однотипные опыты, приводящие к наступлению (с вероятностью p) или ненаступлению (с вероятностью q = 1 – p) одного и того же события A. Например, такая ситуация возникает при многократных выстрелах по цели одного и того же стрелка.

Опыты предполагаются независимыми. По этой причине вероятности событий перемножаются как выше в задаче о стрелках. Только в этом случае стрелок один и стреляет последовательно. Для двух выстрелов вероятность двух попаданий равна p^2. Вероятность двух промахов равна q^2. Наконец, вероятность одного попадания складывается из вероятностей двух несовместных событий – (попадание, промах) и (промах, попадание), то есть эта вероятность равна 2pq.

Легко понять, что указанные вероятности равны слагаемым бинома Ньютона: $(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$. Можно понять, что при многочисленных испытаниях возникнет сходная ситуация.

Пусть проведено n испытаний Бернулли. Обозначим через P(n, k) вероятность того, что в n испытаниях благоприятное событие A наступило ровно k раз. Тогда на основе того, что вероятности совместного наступления независимых событий перемножаются и с помощью бинома, получим формулу: P(n, k) = $C_n^k p^k q^{n-k}$.

Итак, вероятность того, что число успехов при n испытаниях равно m такова:

$P_m = C_n^m p^m q^{n-m}$. Если рассмотреть все вероятности событий от нуля до n успехов будет получено так называемое биномиальное распределение вероятностей.

Наконец, приведём ещё одно рассмотрение в том же ключе.

О понятии независимости. Очевидно, что для возникновения зависимости необходимо наличие хотя бы двух персонажей. Рассмотрим систему из двух субъектов A и B. Пусть субъект A в отсутствии субъекта B может по собственному произволу переходить в одно из состояний (a_1; a_2; … a_n). Соответственно, субъект B в отсутствии субъекта A может по собственному произволу переходить в одно из состояний (b_1; b_2; … b_m).

При совместной деятельности обоих субъектов каждый из них может ограничивать свободу другого. Это выражается, например, в том, что субъект B не может попадать в состояние b_1, когда субъект A находится в состоянии a_1. Таким образом, независимость субъектов друг от друга состоит в том, что при любом состоянии субъекта A субъект B также может принимать любое доступное ему в одиночестве состояние. И наоборот, при любом состоянии субъекта B субъект A также может принимать любое доступное ему состояние.

При описании совместных действий субъектов A и B в качестве состояния системы следует указывать пару (состояние A; состояние B). Итак, состояния системы можно полностью описать двумерной таблицей или, иными словами, матрицей $<a_i, b_j>$:

(a_1, b_1)	(a_2, b_1)	. . .	(a_n, b_1)
(a_1, b_2)	(a_2, b_2)	. . .	(a_n, b_2)
. . .	. . .	. . .	. . .
(a_1, b_m)	(a_2, b_m)	. . .	(a_n, b_m)

Легко понять, что в случае, когда состояния системы, состоящей из двух субъектов, описываются полной матрицей, приведённой выше, субъекты А и В независимы. Если же некоторые состояния запретить, вычеркнув из клеток матрицы, соответствующие элементы, между субъектами возникает зависимость.

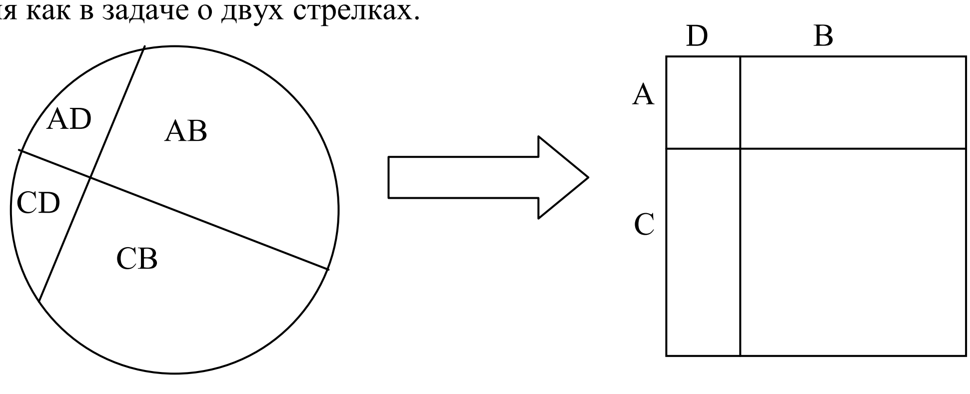
Состояние зависимости описать порой нелегко. Зато независимость описать достаточно просто. Для этой цели следует использовать важное математическое понятие – прямое произведение, созданное Рене Декартом при разработке метода координат. Прямым произведением Х×У двух непустых множеств Х и У называется множество всех упорядоченных пар вида (х, у), где $x \in X$ и $y \in У$.

Множества Х и У могут быть и конечными и бесконечными. Если оба множества конечны, то прямое произведение можно представить, как матрицу, что мы уже и сделали. Наиболее известным примером прямого произведения бесконечных множеств является декартова плоскость.

Можно рассматривать прямое произведение множества на себя. Поскольку множество действительных чисел можно отождествить с точками прямой, то декартова плоскость может рассматриваться и как множество пар действительных чисел (алгебраическая точка зрения), и как евклидова плоскость (геометрическая точка зрения). Произведение $R \times R \times \ldots \times R = R^n$ является множеством упорядоченных n-ок действительных чисел и называется n-мерным пространством.

Теперь обратимся к аксиоматическому определению независимости событий, которое даётся в алгебраической форме и сводит независимость к ситуации, когда вероятность одновременного наступления событий А и В равна произведению вероятностей этих событий.

Пусть события А и В независимы и $P(A) = p_1$, а $P(B) = p_2$. Рассмотрим четыре события А, не А = С ($P(C) = 1 - p_1 = q_1$), В и не В = D ($P(D) = 1 - p_2 = q_2$). Тогда возможно четыре варианта наступления / ненаступления событий А и В: АВ, АD, СВ и CD. При этом $P(AB) = p_1 \cdot p_2$. Тогда $P(CD) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = 1 - p_1 - p_2 + p_1 \cdot p_2 = (1 - p_1)(1 - p_2) = q_1 \cdot q_2$, то есть события С и D независимы. Далее $P(AD) = P(D) - P(CD) = q_2 - q_1 \cdot q_2 = q_2 \cdot (1 - q_1) = p_1 \cdot q_2$. Точно также $P(CB) = p_2 \cdot q_1$. Значит, мы можем изобразить систему событий в виде прямого произведения как в задаче о двух стрелках.

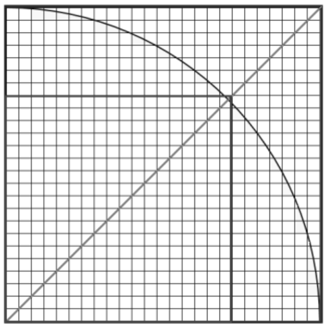


То есть даже чисто алгебраическое определение независимости событий приводит к геометрическому образу, связанному с прямым произведением, а, следовательно, к осмысленному восприятию независимости в реальном мире.

Отметим ещё, что понятие независимости является необходимым и при освоении программирования. Речь идёт о выборе простого (переменные зависимы) или вложенного цикла (переменные независимы).

<u>Тема 2.</u> Число π, радианная мера, тригонометрия.

Личное знакомство с числом π. Число π является важнейшим математическим объектом. Но о его значении учащимся просто сообщают. Желательно, чтобы они сами осуществили хоть какое-то действие в этом направлении, хотя бы и примитивное. Для этого можно раздать студентам (конечно, лучше было начать со школьников) распечатанные заранее чертежи с четвертью круга, покрытой сеткой из единичных квадратов. Далее производится приближённый, и в чём-то субъективный, подсчёт площади круга, что в итоге позволяет, используя формулу площади круга, вычислить приближённое значение числа π. Если Рамануджан был лично знаком с каждым натуральным числом, то студенту полезно лично познакомиться хотя бы с одним иррациональным.



Приведём чертёж и пример вычисления (операция умножения обозначена по-программистски – звёздочкой). Сначала вычисляется площадь сектора, потом площадь круга и, наконец, число π с помощью деления площади на квадрат радиуса (r = 25).

$S_{сектора}$=**<u>18*18</u>**+<u>2*(16+15+14+12+10+7+2)</u>
+<u>*2*(0,9+0,8+0,5+0,5+0,2+0,9+0,5+0,2+0,5+0,2+0,5+0,2+0,5+0,5+0,5)=490,8*</u>

4*490,8 : 625 = 3,14112 ≈ π.

Площадь сектора состоит из площади квадрата, из числа незакрашенных клеток двух полусегментов и из субъективно оцененных площадей разрезанных окружностью клеток.

Радианная мера углов. Тот факт, что все окружности подобны друг другу, лежит в основе формулы для вычисления длины окружности: $c = 2\pi r$. А эта формула в свою очередь положена в основание радианной меры углов. Прежде всего, надо отметить, что понятие угла не является таким уж простым и однозначным. Существует, по крайней мере, три точки зрения на углы.

1. **Угол** – это **фигура**, составленная двумя лучами, исходящими из одной точки. Эта точка называется вершиной угла, а лучи – сторонами угла.
2. **Угол** – это **фаза** вращения луча вокруг его начала. При этом фиксируется как начальное, так и конечное положение луча, т. е. угол в первом смысле, но и количество проделанных лучом оборотов. Обычно вращение против часовой стрелки считается положительным, а по часовой стрелке – отрицательным.
3. **Угол** – это **мера** угла второго типа. **Естественной мерой углов является количество оборотов, которое проделал луч при вращении**. Это количество может быть не только целым или дробным, но и любым действительным числом со знаком. Мерой угла первого типа обычно считают количество оборотов со знаком плюс, получаемое при вращении одной стороны угла до совпадения с другой по кратчайшему пути.

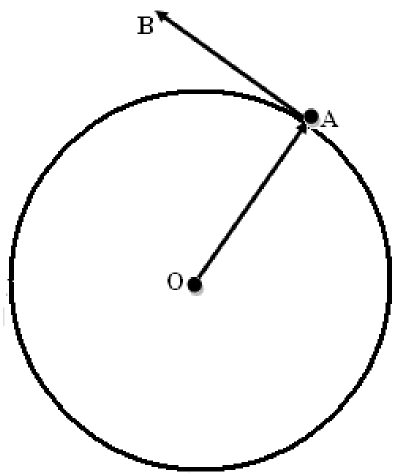
Итак, исходной мерой для измерения углов, являются **обороты** (и их доли). Всякая другая мера получается из оборотов с помощью умножения на избранный по каким-то соображениям коэффициент. Например, **градусы – это обороты, умноженные на 360**. В данном случае коэффициент выбран для астрономических нужд (он близок к количеству дней в году и делится на многие «удобные» числа: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180).

Важнейшей для математики мерой углов является радианная мера (от слова «радиус», указывающего на участие окружности). Рассмотрим угол второго типа. Из центра вращения опишем окружность единичного радиуса. Теперь вращение луча сопровождается движением по окружности точки (это точка пересечения окружности с лучом). Теперь при вращении луча сам луч отмеряет угол, а точка на окружности – дугу. После полного оборота точка пробежит по окружности расстояние равное двум π. Если выбрать коэффициентом для меры угла 2π, то мера угла будет совпадать с длинной дуги, пройденной точкой по окружности. Именно эта мера и называется радианной.

Если вместо единичной окружности использовать окружность радиуса r, то при полном обороте луча точка пройдёт по окружности расстояние 2πr, т. е. радианы умножаются на радиус. Легко понять, что если луч заметёт угол φ, то точка пройдёт по дуге расстояние, равное φr. Установление простой связи между мерой угла и длиной дуги и определяет важность радианной меры углов.

Поясним, почему в математическом анализе используется именно радианная мера углов. При вычислении производной синуса используется замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Для доказательства того факта, что данный предел равен единице, используются неравенства, снизу и сверху оценивающие площадь сектора единичной окружности, соответствующего углу φ. Эта площадь заключена между $\frac{\sin x}{2}$ и $\frac{tgx}{2}$. Площадь окружности единичного радиуса равна $\pi r^2 = \pi$. Она соответствует сектору в 2π радиан. Тогда сектору с углом φ соответствует площадь, равная $\frac{\varphi}{2\pi}\cdot\pi\cdot r^2=\frac{\varphi}{2}$. Отсюда следует, что для радианной меры величина угла заключена между синусом и тангенсом, а любая другая мера нарушает эти неравенства. Замечательный предел в случае другой меры углов не равнялся бы единице.

Тригонометрия. О повторении тригонометрических формул мы уже говорили. Теперь поговорим о вычислении производных синуса и косинуса с помощью соображений, относящихся к кинематике. Возможно, уместнее было бы разместить это рассуждение в рамках темы 8, однако, как верно сказано в «Повести о Ходже Насреддине», таньга не превращается в динар, если переложить её из правого кармана в левый. Отметим, что обращение при изучении математики к кинематическим, механическим и физическим аналогиям бывает довольно продуктивным (см. например [8]).



После того, как дано общее определение синуса и косинуса как абсциссы и ординаты конца единичного радиус-вектора, исходящего из начала координат, можно сразу определить вертикальную и горизонтальную составляющие скорости конца единичного радиус-вектора, то есть производные синуса и косинуса.

Рассмотрим единичный радиус-вектор OA (cosφ; sinφ), вращающийся против часовой стрелки с единичной угловой скоростью. Поскольку величина угла φ задаётся радианной мерой, вектор скорости AB точки A перпендикулярен OA. Кроме того, в силу согласованности радианной меры и длины дуги скорость точки A равна единице. Из этого следует, что вектор AB имеет координаты (–sinφ; cosφ). А это и означает, что производной синуса является косинус, а производной косинуса – минус синус.

<u>Тема 3.</u> Векторная трактовка аналитической геометрии.

Вектор как смещение. Геометрическое определение вектора на плоскости как направленного отрезка AB я предпочитаю заменить определением вектора как сдвига или смещения из точки A в точку B. Кто-то скажет, что разница невелика. Однако для такой замены всё же есть основание. Оно состоит в следующем. Хорошо развитое понимание работы с векторами не только на плоскости, но и в многомерном евклидовом пространстве, основывается на аксиоматике Вейля, которая связывает точки и вектора.

В то же время студенты часто воспринимают точки и вектора порознь. Восприятие вектора как сдвига позволяет донести до студента смысл точечно-векторного равенства типа B = A + AB. Далее приведём фрагмент из электронного конспекта.

Главным понятием векторной алгебры является вектор. На данном этапе рассматриваются только вектора на плоскости. Вектор одновременно может рассматриваться и с геометрической точки зрения, и с точки зрения алгебраической. В геометрическом смысле понятие вектора совпадает с понятием сдвига или перемещения из точки в точку. Сдвиг из точки A в точку B можно изобразить направленным отрезком AB. Каждый сдвиг можно разбить на два последовательных – горизонтальный сдвиг на расстояние x и вертикальный сдвиг на расстояние y. Вектор AB алгебраически записывают в виде пары координат (x; y). При этом координаты точки A (x_A; y_A) и точки B (x_B; y_B) связаны соотношениями $x_B = x_A + x$ и $y_B = y_A + y$.

Пусть на плоскости заданы точки A (x_A; y_A) и B (x_B; y_B). Их координаты называются абсолютными. Координаты вектора AB (x; y) называются относительными координатами точки B относительно точки A, при этом $x = x_B – x_A$ и $y = y_B – y_A$. Успешный расчёт координат точек требует использования абсолютных и относительных координат.

Поскольку смысл вектора состоит в сдвиге из точки в точку, сдвиг из точки A в точку B, а затем из B в точку C, приводит к сдвигу из точки A в точку C. Если заданы координаты двух векторов – AB (x_1; y_1) и BC (x_2; y_2), то вектор AC имеет координаты ($x_1 + x_2$; $y_1 + y_2$). Так определяется операция сложения векторов.

Ещё одной операцией, связанной с векторами является умножение вектора на число. Пусть задан вектор AB (x; y) и любое действительное число λ, тогда λ·AB = AC (λ·x; λ·y). Исключительная важность умножения вектора на число связана с тем, что концы векторов вида λ·AB заметают прямую AB. Кроме того, операция умножения вектора на число позволяет делить отрезок на равные части. Наконец, умножение вектора на число позволяет выполнять гомотетию на плоскости.

Смысл гомотетии лучше всего передаётся процессом фотографирования и проектирования изображения на экран с помощью проектора.

Название «гомотетия» складывается из двух греческих корней: гомо – одинаковый и тетос – расположение, т. е. гомотетия – это одинаковое расположение одинаковых по форме (но не по размеру) фигур или тел. С гомотетией связано важнейшее геометрическое понятие подобие. Любые две подобных фигуры можно расположить так, чтобы они оказались гомотетичными.

Математически гомотетия описывается следующим образом. Пусть задана некоторая фигура $Ф_1$, точка O, называемая центром гомотетии, и число k, называемое коэффициентом гомотетии. Фигура $Ф_2$ гомотетичная фигуре $Ф_1$ с центром O и коэффициентом гомотетии k строится так:

– возьмём любую точку M_1 фигуры $Ф_1$;

– получим вектор OM_2, умножив вектор OM_1 на число k ($OM_2 = k·OM_1$);

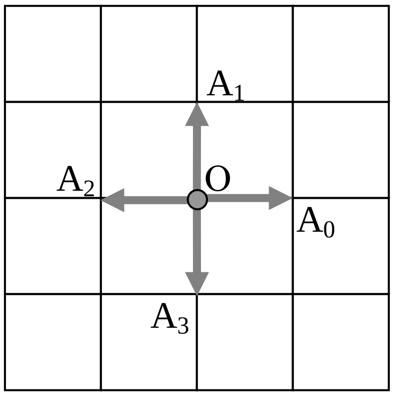
– точка M_2 – конец полученного вектора OM_2, является точкой гомотетичной фигуры $Ф_2$, соответствующей точке M_1;

– пусть точки O, M_1, M_2 имеют координаты (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) соответственно. Тогда, используя координатную запись операции умножения вектора на число, получим следующие результаты: $OM_1 = (x_1 – x_0; y_1 – y_0)$, $OM_2 = k·OM_1 = (k·(x_1 – x_0); k·(y_1 – y_0))$. Наконец, координаты точки M_2 вычисляются по формулам $x_2 = x_0 + k\,(x_1 – x_0)$ и $y_2 = y_0 + k\,(y_1 – y_0)$.

Подвергнув все точки фигуры $Ф_1$ этой операции, получим фигуру $Ф_2$.

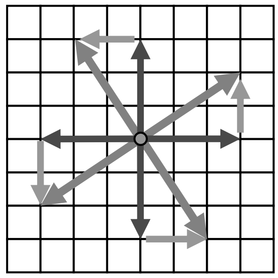
Ортогональность векторов. Рассмотрим элементарный (без использования скалярного произведения) способ поворота вектора на четверть полного оборота. Этот вопрос так или иначе рассматривается в курсе аналитической геометрии, например, при написании уравнения прямой, перпендикулярной данной.

Рассмотрим операцию поворота вектора на 90° (или на $\frac{\pi}{2}$ радиан). Займёмся детальным изучением этой процедуры. Начнём с вектора OA_0 (1; 0). Будем последовательно поворачивать его на 90° против часовой стрелки, получая его новые положения OA_1 (0; 1), OA_2 (–1; 0), OA_3 (0; –1). Изначально горизонтальный вектор становится вертикальным. Таким образом, первая и вторая координаты вектора OA_0 переставляются и становятся координатами вектора OA_1.



При следующем повороте вектор снова становится горизонтальным, но имеет теперь противоположное направление. Чтобы получить вектор OA_2, координаты вектора OA_1 переставляются, и дополнительно первая координата меняет знак. На самом деле точно также можно было поступить и при переходе от вектора OA_0 к OA_1, поскольку смена знака нуля ничего не меняет. Таким же образом осуществляется переход от вектора OA_2 к вектору OA_3 и от вектора OA_3 к вектору OA_0.

Задание. Сформулировать правило поворота вектора на 90° против часовой стрелки и обосновать, что оно действует и для произвольных векторов, то есть для тех, которые имеют обе ненулевые координаты.



Правило поворота вектора на 90° против часовой стрелки: **при повороте вектора на 90° против часовой стрелки переставляются его первая и вторая координаты, новая первая координата при этом меняет знак**.

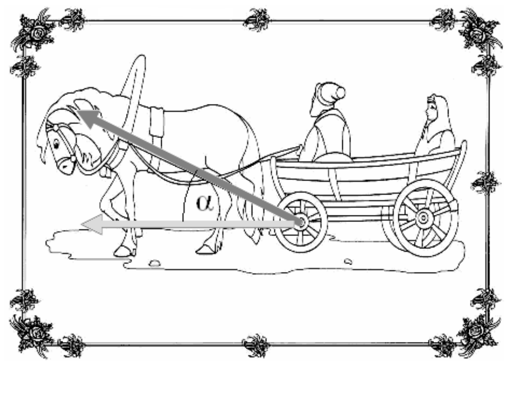
Произвольный вектор может быть разложен на горизонтальную и вертикальную составляющие. При вращении вектора эти составляющие также вращаются и, для них выполняется это правило. Из этого следует, что правило выполняется и в общем случае. Теперь легко сформулировать ещё одно правило.

Правило поворота вектора на 90° по часовой стрелке: **при повороте вектора на 90° по часовой стрелке переставляются его первая и вторая координаты, а новая вторая координата меняет знак**.

Скалярное произведение. Приведём небольшой электронный конспект, посвящённый этому важному понятию с физической мотивировкой.

Введём операцию скалярного умножения векторов. Она кардинально отличается от операции сложения векторов и операции умножения вектора на число. И в том, и в другом случае результатом являются вектора. Результатом же скалярного перемножения двух векторов является число.

Чтобы разобраться с причинами возникновения этой необычной операции, надо отметить, что векторы имеют прямую связь с физикой, поскольку в физических теориях часто встречаются направленные величины: скорости, ускорения, силы. По этой причине введение алгебраической операции, называемой скалярным произведением двух векторов, можно мотивировать с помощью физической аналогии.



Пусть мы перемещаем тело по горизонтали, прилагая к нему силу F, направленную к этой горизонтали под углом α. Примером такой ситуации в быту является перемещение санок, которые любитель кататься тянет за верёвочку, или перемещение повозки, которую тянет лошадь. Разложим силу, приложенную к повозке, на её вертикальную и горизонтальную составляющие. Тогда в перемещении тела будет участвовать только активная горизонтальная составляющая силы. Она равна $F \cdot \cos\alpha$, то есть длине проекции силы F на горизонталь.

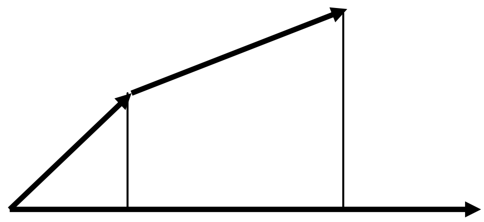
Однако основой для введения скалярного умножения двух векторов стала не проекция одного вектора на другой, а работа, производимая активной составляющей силы, приложенной к перемещаемому телу. Эта работа равна произведению активной составляющей на пройденный путь. И силу, и путь можно рассматривать как вектора, а работа выражается числом – скаляром.

Итак, скалярное произведение двух векторов **a** и **b** равно произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Запись этого факта обычно имеет следующий вид:

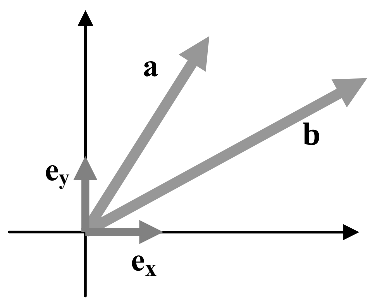
$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\alpha$.

Скалярное произведение обладает теми же свойствами, которыми обладает обычное произведение чисел. Например, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\alpha = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$, то есть Скалярное произведение коммутативно: от перестановки сомножителей произведение не меняется.

Можно записать скалярное произведение и с помощью операции проектирования: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot$проекция **b** на **a**. Легко установить, что проекция суммы векторов на некоторую прямую равна сумме проекций слагаемых на ту же прямую. Это обстоятельство позволяет установить, что скалярное произведение дистрибутивно. Дистрибутивность обычного умножения является правилом умножения суммы на число: $a \cdot (b_1 + b_2) = a \cdot b_1 + a \cdot b_2$. Аналогично выглядит и запись дистрибутивности скалярного произведения: $(\mathbf{a}, \mathbf{b_1} + \mathbf{b_2}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b_1}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b_2})$.



Есть два важных частных случая скалярного произведения. Первый – умножение вектора на себя: $(a, a) = |a| \cdot |a| \cdot \cos 0 = |a|^2$. Второй – перемножение двух перпендикулярных векторов. И поскольку $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, их скалярное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.



Эти два результата позволяют получить формулу скалярного произведения двух векторов, заданных координатами. Пусть $\mathbf{a} = (x_a; y_a)$ и $\mathbf{b} = (x_b; y_b)$.

Зададим на декартовой плоскости два единичных вектора, исходящих из начала координат и направленных вдоль осей. Горизонтальный вектор обозначим через $\mathbf{e_x}$, а вертикальный через $\mathbf{e_y}$. Тогда вектора a и b можно разложить следующим образом:

$$\mathbf{a} = x_a \cdot \mathbf{e_x} + y_a \cdot \mathbf{e_y},\ \mathbf{b} = x_b \cdot \mathbf{e_x} + y_b \cdot \mathbf{e_y}.$$

Тогда

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (x_a \cdot \mathbf{e_x} + y_a \cdot \mathbf{e_y}, x_b \cdot \mathbf{e_x} + y_b \cdot \mathbf{e_y}) = x_a \cdot x_b \cdot (\mathbf{e_x}, \mathbf{e_x}) + y_a \cdot x_b \cdot (\mathbf{e_y}, \mathbf{e_x}) + x_a \cdot y_b \cdot (\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}) + y_a \cdot y_b \cdot (\mathbf{e_y}, \mathbf{e_y}) = \\ = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b.$$

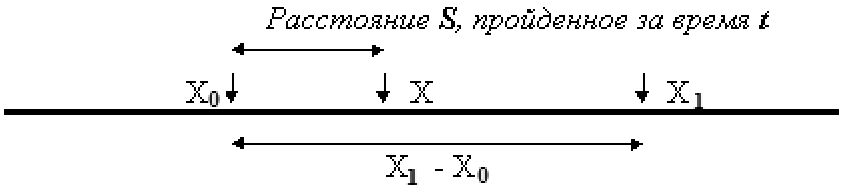
Это и есть формула для получения скалярного произведения в координатах. Выпишем её ещё раз без промежуточных вычислений: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$.

<u>Тема 4.</u> Уравнения прямых и кинематическая форма линейных преобразований. Пропедевтика некоторых вопросов линейной алгебры.

В аналитической геометрии используются различные формы уравнений, описывающих прямые, но основными являются два вида. Первый вид – линейное уравнение с двумя неизвестными, которое выводится с помощью скалярного произведения. Второй вид – параметрическое уравнение, которое выводится с помощью операции умножения направляющего вектора на число-параметр.

Параметрические уравнения можно вывести и с помощью кинематических соображений. При этом уравнения принимают специфическую форму, поскольку эти уравнения будут содержать координаты двух точек, через которые проходит соответствующая прямая. Выведем эти уравнения.

Пусть положение точки М на прямой определяется координатой X. Предположим, что точка М за единицу времени перемещается из положения X_0 в положение X_1 с постоянной скоростью. Путь, пройденный при этом точкой, равен $X_1 - X_0$, а скорость ее движения равна $V = (X_1 - X_0)/1 = X_1 - X_0$.



За произвольное время t точка М с такой скоростью пройдет расстояние S=V·t=(X1–X0)·t, а её координата X в момент времени t будет равна

$$X = X_0 + S = X_0 + (X_1 - X_0) \cdot t$$

Эта формула в общем виде выражает линейную зависимость между двумя переменными и может быть применена к любой равномерно изменяющей свои значения величине. Кроме кинематической интерпретации формулу можно понимать еще и следующим образом: с ее помощью единичный отрезок (время) равномерно растягивается и налагается на отрезок с концами X_0 и X_1. Точка t при этом переходит в точку X.

Пусть точка М прямолинейно и равномерно движется в многомерном пространстве из положения $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ в положение $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$. При этом одновременно меняются n координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. К каждой из них можно применить нашу формулу:

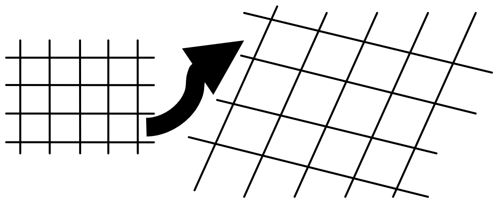
$$\begin{cases} x_1 = v_1 + (w_1 - v_1) \cdot t; \\ x_2 = v_2 + (w_2 - v_2) \cdot t; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = v_n + (w_n - v_n) \cdot t. \end{cases}$$

Таким образом, параметрическое уравнение прямой соответствует разложению единого движения в пространстве на составляющие движения вдоль осей координат со скоростями $(w_i - v_i)$. Ещё раз отметим важность того, что эти уравнения привязывают прямую к координатам двух точек, через которую она проходит.

Простая формула $X = X_0 + (X_1 - X_0) \cdot t$ позволяет рассмотреть интересный процесс, который напоминает своей парадоксальностью апории Зенона. Его можно предложить студентам в виде задачи. Пусть все точки прямой в нулевой момент времени начинают двигаться в начало координат с постоянной скоростью, для каждой точки, выбранной так, чтобы начало координат было достигнуто за единичное время. Докажите, что в любой момент времени, меньший единицы, вся прямая заполнена движущимися точками, и только по прошествии единичного времени, прямая мгновенно схлопывается в точку.

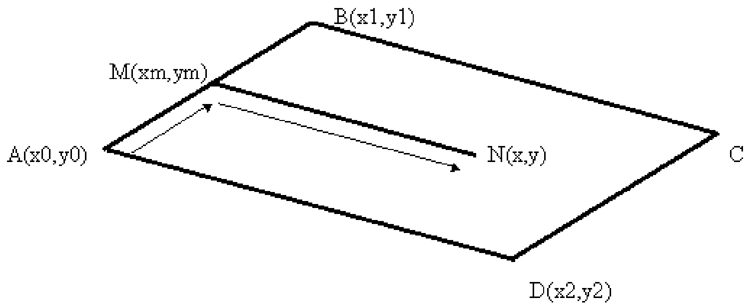
Двинемся далее. Параметрические формулы прямой позволяют вывести кинематический аналог линейных и аффинных преобразований. Аффинные преобразования в известном смысле совпадают с линейными преобразованиями и помогают лучше понять проблемы, связанные с последними. Приступим к выводу.

Аффинная геометрия изучает свойства фигур на плоскости, в трёхмерном пространстве, а также в многомерных пространствах, задаваемых точечно-векторной аксиоматикой. При произвольных аффинных преобразованиях, сохраняются отношение длин параллельных отрезков, параллельность прямых, свойство фигуры быть прямой линией или плоскостью. Аффинное преобразование плоскости переводит сеть, состоящую из единичных квадратов, в сеть, состоящую из равных параллелограммов. Соответственно, аффинное преобразование многомерного пространства переводит укладку, состоящую из единичных многомерных кубов, в сеть, состоящую из равных многомерных параллелепипедов. Используя это обстоятельство, получим сначала формулы для аффинных отображений одной плоскости на другую в кинематической форме, а затем обобщим их на многомерный случай.



Рассмотрим две плоскости, на каждой из которых задана декартова система координат: (t_1, t_2) и (x, y). Кроме того, на второй плоскости задан параллелограмм ABCD. Его положение задаётся координатами трёх его вершин A (x0, y0), B (x1, y1) и D (x2, y2). Отметим, что упомянутые системы координат могут быть определены и на одной плоскости. Наша задача состоит в том, чтобы отобразить точки единичного квадрата, расположенного на первой плоскости, на параллелограмм, лежащий на второй плоскости. Сделаем это с помощью следующей кинематической модели.

Возьмём два секундомера и начнём перемещаться по первой плоскости из начала координат в точку (t_1, t_2). Включим первый секундомер и будем двигаться по горизонтали, согласуя показания секундомера и абсциссу движущейся точки. В момент t_1 отключим первый секундомер, включим второй и будем двигаться вертикально, согласуя показания второго секундомера и ординату движущейся точки. В момент t_2 остановимся.



На второй плоскости организуем синхронное движение второй точки, которая является аффинным образом первой точки. Пусть эта точка движется, ориентируясь на направление сторон параллелограмма ABCD следующим образом. Сначала движение происходит по стороне AB с такой скоростью, что за единицу времени, она переместилась бы в точку B. Однако остановка происходит в момент времени t_1. Обозначим точку, которой мы достигли через M, и обозначим её координаты через xm и ym. Затем будет начато движение точки параллельно стороне AD в течение времени t_2. Во второй фазе движения скорость её такова, что путь от A до D она также прошла бы за единицу времени. Точка N, которая будет достигнута в итоге, и есть аффинный образ точки (t_1, t_2). Наша задача состоит в том, чтобы определить координаты x и y точки N. Это легко сделать, используя параметрические уравнения прямой AB и прямой MN, параллельной к AD.

$$\begin{cases} xm = x0 + (x1 - x0)\cdot t_1 \\ ym = y0 + (y1 - y0)\cdot t_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = xm + (x2 - x0)\cdot t_2 \\ y = ym + (y2 - y0)\cdot t_2 \end{cases}$$

Заменив промежуточные координаты xm, ym подстановкой выражения из первой пары уравнений во вторую, получим уравнения, задающие аффинное отображение плоскостей:

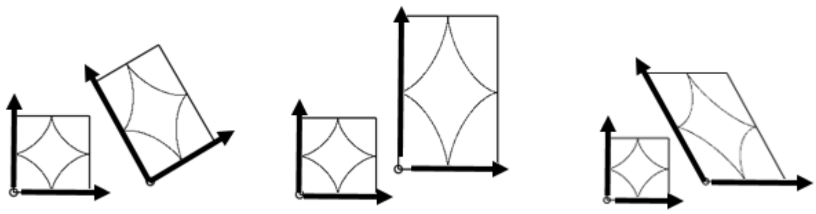
$$\begin{cases} x = x0 + (x1 - x0)\cdot t_1 + (x2 - x0)\cdot t_2 \\ y = y0 + (y1 - y0)\cdot t_1 + (y2 - y0)\cdot t_2 \end{cases}$$

Аффинное отображение налагает не только единичный квадрат на параллелограмм, но и всю первую плоскость на вторую. При этом точка с координатами (t_1, t_2) переходит в точку параллелограмма с координатами (x, y). При использовании формул удобна следующая словесная формулировка: значение переменной x равно координате x0 точки A плюс произведение первого времени t_1 на смещение по x от A до B плюс произведение второго времени t_2 на смещение по x от A до D. Аналогичная формулировка используется и для y. Следует отметить, что соответствующие смещения одновременно являются и составляющими скоростей движения вдоль сторон параллелограмма.

Нет никаких проблем с обобщением полученных формул на аффинные отображения многомерных пространств. Вместо единичного квадрата используется n-мерный куб и система координат (t_1, t_2, …, t_n), а вместо параллелограмма – n-мерный параллелепипед, определяемый n вершинами A_i (p_{i1}, p_{i2}, …, p_{in}), где i = 0, 1, …, n в системе координат (x_1, x_2, …, x_n). Уравнения принимают вид $x_j = p_{0j} + \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot (p_{ij} - p_{0j})$, где i = 0, 1, …, n и j = 1, …, n. Эти уравнения в вычислительном плане в полной мере аналогичны матричной форме аффинных отображений и тесно связанных с ними линейных отображений векторных пространств. Однако они имеют, так сказать, ряд инструментальных преимуществ, поскольку привязывают отображения к координатам конкретных точек. Если отбросить несколько последних уравнений, оставив только m них (m < n), будут получены формулы, описывающие аффинное отображение n-мерного пространства в m-мерное.

Если же n-мерный куб нужно вложить в пространство большей размерности m (m > n), то всё равно в m-мерном пространстве выбирается n+1 базовая точка. Вывод формул остаётся прежним, а сами эти формулы осуществляют вложение исходного пространства в n-мерное подпространство m-мерного пространства.

Важным способом применения формул в указанной форме является изучение линейных отображений, их собственных векторов и соответствующих им значений. Пользуясь тем, что линейное отображение определяется выбором точек можно легко построить отображения различных видов и, в том числе, провести классификацию отображений в двумерном случае.

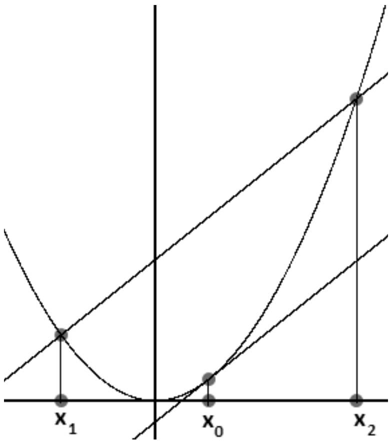


<u>Тема 5.</u> Секущие кривых второго порядка и метод построения касательных с помощью параллельных секущих. Пучки прямых и кривых.

Кривые второго порядка открывают большие возможности пропедевтики идей математического анализа, в частности связанных с проведением касательных. Одним с способов работы с касательными предоставляет аппарат квадратных уравнений. Очень эффектными и эффективными являются и методы Роберваля, связанные с разложением скоростей точки, двигающейся по кривой, на две составляющие [9]. Мы же опишем применяемый нами метод построения касательных с помощью параллельных секущих, который будет развит в Теме 8. Этот метод позволяет обойти явное применение пределов.

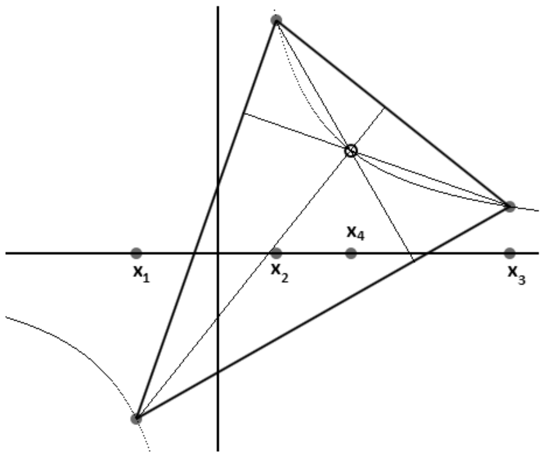
Метод построения касательных с помощью параллельных секущих. Поясним эффективность работы с секущими на трёх примерах. Рассмотрим функцию $y = x^2$. Секущая, проходящая через точки x_1 и x_2 имеет уравнение $y = (x_1 + x_2)\cdot x - x_1 x_2$. Допустим, что $(x_1 + x_2)\cdot = 2x_0$, где x_0 постоянное число. Тогда всевозможные секущие вида $y = (x_1 + x_2)\cdot x + b$ параллельны друг другу. Если точки x_0 и x_1 сольются, то секущая превратится в касательную.

Её уравнение примет вид $y = 2x_0 - x_0^2$. Тем самым получено не только уравнение касательной, но и вычислена производная соответствующей функции.



Перейдём к гиперболе с уравнением $y = \frac{1}{x}$. У секущей, проходящей через точки x_1 и x_2, тангенс угла наклона равен $-\frac{1}{x_1 x_2}$. Положим, что $x_0 = \sqrt{x_1 x_2}$, тогда именно в этой точке происходит превращение секущих в касательную. При этом фактически получена формула $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$.

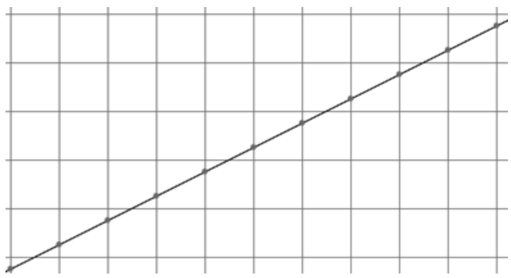
Наконец, благодаря предыдущему результату докажем следующую геометрическую теорему: *Если вершины треугольника лежат на равнобочной гиперболе* $y = \frac{1}{x}$, *то на ней же лежит и точка пересечения высот треугольника*. Пусть вершины треугольника определяются координатами x_1, x_2 и x_3. Тангенс угла наклона стороны, заданной координатами x_1 и x_2 равен $-\frac{1}{x_1 x_2}$. Из точки, соответствующей x_3 опустим высоту на эту сторону. Пусть она пересекается с гиперболой в точке x_4. Тогда тангенс угла наклона высоты, заданной координатами x_3 и x_4 равен $-\frac{1}{x_3 x_4}$. Условие же ортогональности примет вид $\frac{1}{x_1 x_2 x_3 x_4} = -1$. Рассмотрим теперь сторону треугольника, заданную координатами x_2 и x_3, а также прямую, заданную координатами x_1 и x_4. По тому же симметричному относительно всех координат условию ортогональности прямых эти прямые перпендикулярны. Значит, точка x_4 определяет точка пересечения высот треугольника. Теорема доказана.



Пучки прямых и кривых. Рассмотрение пучков прямых, окружностей и кривых второго порядка может быть проведён без особых проблем, например, следуя [10]. Нам представляется, что это очень полезно, поскольку готовит студента к восприятию таких принципиально связанных с семействами функций разделами математики как теория дифференциальных уравнений.

<u>Тема 6.</u> Линейная функция, элементарные функции (показательная функция), число *e*.

Линейная функция и арифметическая прогрессия. Графики функций являются непрерывными кривыми, но, рассматривая только целые значения x, из функций можно получать последовательности. Поведение последовательностей иногда легче себе представить, чем поведение функций.

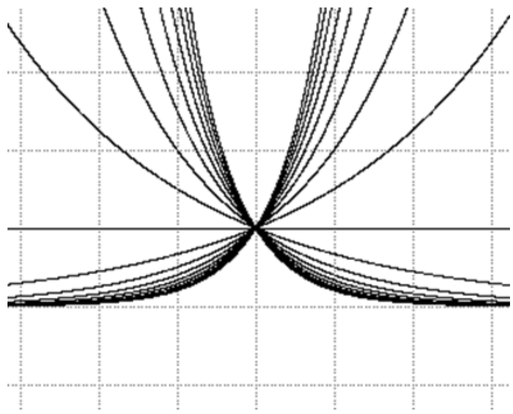


Задача. Какая последовательность порождается линейной функцией?

Решение. Линейная функция описывается формулой $y = kx + b$. Взяв вместо x натуральные числа $n = 1, 2, 3, \ldots$, и, использовав вместо y для обозначения членов последовательности символ a_n, получим формулу $a_n = k \cdot n + b$. Это формула арифметической прогрессии с разностью равной k.

Иногда наоборот следует переходить от последовательности к функции. Взяв за основу арифметическую прогрессию, можно определить любые её члены с натуральными и даже целыми индексами. Затем можно «уплотнить» прогрессию введя индексы вида $\frac{2n+1}{2}$. Такому индексу соответствует значение, равное среднему арифметическому a_n и a_{n+1}. В результате такого уплотнения можно от последовательности чисел прийти к линейной функции (см. [11]).

Показательная функция и число *e*. Будем теперь рассматривать геометрические прогрессии вида $b_n = a^n$ (число a называется основанием степени, число n – показателем степени). Тогда посредине между соседними членами последовательности можно вставлять их среднее геометрическое, то есть квадратный корень из их произведения. Например, между b_1 и b_2 можно вставить $b_{\frac{3}{2}} = \sqrt{b_1 \cdot b_2}$.



В результате уплотнения геометрической прогрессии со знаменателем a, будет получена показательная функция $y = a^x$ (независимой переменной является показатель). Если $a > 1$, то функция растёт, причём, тем быстрее, чем больше a. Если $a < 1$, то функция убывает, причём, тем быстрее, чем меньше a. Если $a > 1$, то при $x \to -\infty$, a^x стремится к нулю. При $x = 0$ показательная функция всегда равна 1.

Отметим, что поскольку при уплотнении геометрической прогрессии используется среднее геометрическое, которое меньше среднего арифметического, без особых усилий можно доказать, что на любом отрезке $[x_1; x_2]$ отрезок соответствующей секущей лежит выше графика показательной функции, то есть график показательной функции является выпуклым (вниз).

С показательной функцией связано число e. Это число в учебниках математического анализа, например в [12], обычно определяется как предел последовательности: $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$. При этом не ясно, откуда эта последовательность возникла, и какова связь между этим определением числа e и определением числа e как основания степенной функции, имеющей в нуле производную равную единице. (Особо оговоримся, что хотя ссылка на учебник, изданный более года назад, не попадает в инновационный тренд и является серьёзным нарушением либеральной дисциплины, мы всё же совершаем этот проступок).

В [12] доказывается, что последовательность $(1+\frac{1}{n})^n$ является монотонно возрастающей и ограниченной. Из этого следует, что указанный предел, названный в честь Эйлера числом e, действительно существует. Доказательство ведётся с использованием бинома Ньютона. При этом выкладки студенту могут показаться довольно сложными, как и вообще любые вычисления, основанные исключительно на загадочной для новичка технике преобразований. Ему неясно, почему делается именно так, и как можно было именно это преобразование придумать.

Далее в курсе анализа устанавливается, что показательная функция, с основанием равным e, обладает замечательным свойством. Её производная равна самой этой функции, т. е. $(e^x)' = e^x$. Однако не совсем понятна причина этого обстоятельства: сначала вводится какой-то замысловатый предел, а его введение почему-то даёт такой удачный результат. Мы хотим показать, что объяснить причины, по которым такая «хитрая» последовательность приводит к хорошему результату, довольно легко без сложных вычислений. Сделаем это по пунктам.

1. Графики всех показательных функций $y = a^x$ (a > 1) проходят через точку (0; 1).

2. Любая показательная функция $y = a^x$ (a > 1) является «уплотнением» геометрической прогрессии $1, a, a^2, a^3, \ldots$, начиная с натуральных показателей, через рациональные показатели к вещественным. Из этого следует, что график показательной функции $y = a^x$ при всех положительных значениях аргумента x лежит выше графика функции $y = b^x$, если a > b. Кроме того, получается, что функция $y = a^x$ в точке x = 0 имеет производную больше, чем функция $y = b^x$ (a >b).

3. Если менять основание a показательной функции $y = a^x$ от нуля до плюс бесконечности, то тангенс угла наклона касательных в точке x = 0 будет изменяться также от нуля до бесконечности. Это даёт нам основание назвать числом e такое основание показательной функции, для которого тангенс угла наклона касательной при x = 0 равен 1. Это и есть второе определение числа e. Из всего сказанного следует, что такое число существует, поскольку, непрерывно меняясь от нуля до бесконечности, тангенс обязательно примет значение 1.

4. По известному определению касательная является предельным положением секущих в момент слиянии двух точек сечения в одну. Обычно это определение используется в отношении единственной функции.

Мы же поступим несколько иначе. Нам нужно найти число e, исходя из второго определения. По этой причине мы будем искать одно за другим новые основания a_n показательных функций. При этом меняться будут функции, а секущая для всех графиков будет одна и та же: прямая с уравнением $y = x + 1$. Последовательность точек с координатами $(\frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n})$ при n, стремящемся к бесконечности (n = 1, 2, 3, …) сходится к точке (0; 1). Основания же показательных функций a_n мы будем выбирать следующим образом. Функция $y = a_n{}^x$ должна проходить через точку $(\frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n})$..

5. Итак, совпадающие секущие наклонены под углом 45º. Их вторая точка сечения соответствует $x = \frac{1}{n}$, а первой всегда является x = 0. Таким образом, при изменении функций фиксированная секущая превращается в касательную итоговой функции.

6. Покажем, что последовательность a_n является монотонно возрастающей. Хотя и без этого ясно, что $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = e$ (по второму определению). Все точки графика функции $y = a_n{}^x$ на отрезке [0; $\frac{1}{n}$] лежат ниже секущей. В том числе и в точке $x = \frac{1}{n+1}$. Значит, чтобы функция $y = a_{n+1}{}^x$ проходила через эту точку необходимо, чтобы выполнялось неравенство $a_{n+1} > a_n$.

7. Теперь выясним, каким должно быть значение числа a_n. Точка с координатами $(\frac{1}{n}; (a_n)^{\frac{1}{n}})$ должна лежать на графике функции $y = a_n{}^x$. Далее, она должна обеспечить нужный наклон секущей, то есть $(a_n)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}$. Следовательно, $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Итак, $e = \lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ как раз по второму определению числа e.

Теперь связь между двумя определениями числа e становится понятной.

Нам остаётся получить результат, связанный с дифференцированием функции $y = e^x$.

Пока мы знаем, что её производная в нуле равна единице, то есть $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1$. Но теперь мы можем найти производную в любой точке:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0}.$$

Тема 7. Понятие предела и маятник. Непрерывные функции, классификация точек. Роль контрпримеров. Точки колебания функций.

Важное понятие предела может быть обсуждено с помощью наглядного образа – затухающего маятника.

Смысл предела функции – приближение значений функций к некоторому числу (предел – число) при стремлении аргумента к фиксированному значению. Понятие предела возникает по той причине, что при движении по числовой прямой точки x в точку x_0 либо точка уже достигнута, то есть $x = x_0$, либо между ними лежит бесконечно много внутренних точек отрезка $[x, x_0]$. Единственным признаком, с помощью которого можно зафиксировать приближение x к x_0, является расстояние.

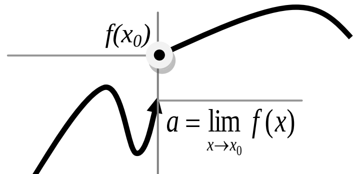
Расстояние между точками на числовой прямой, имеющими координаты x и x_0, равно модулю разности между координатами, то есть $|x - x_0|$. Приближение x к x_0 можно зафиксировать так: точка с координатой x приблизились к точке с координатой x_0 ближе чем сколь угодно малое расстояние δ, если $|x - x_0| < \delta$.

Функция – это зависимость одной переменной от другой. По этой причине нужно увязать приближение аргумента к некоторому числу с приближением функции к некоторому пределу. Аргумент можно воспринимать как время, а функцию – как отклонение маятника. При таком подходе существование предела можно сравнить с затуханием маятника к моменту времени x_0.

Затухание маятника-функции состоит в том, что какое бы малое отклонение **ε** функции от положения равновесия **a** (предела) мы не задали, при достаточной близости **δ** к моменту равновесия $\mathbf{x_0}$ отклонение будет меньше **ε**.

Из этого вытекает формальное определение предела. Число **a** называется пределом функции **f(x)** при **x** стремящемся к $\mathbf{x_0}$ (этот факт записывается следующим образом: $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$), если для любого сколь угодно малого (отклонения) **ε** > 0 найдётся такое **δ** > 0 (характеризующее близость к моменту равновесия), что как только $|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}| < \boldsymbol{\delta}$ (настаёт время затухания с отклонением меньше **ε**), выполняется неравенство $|\mathbf{f(x)} - \mathbf{a}| < \boldsymbol{\varepsilon}$ (условие того, что затухание мало).

Смысл таков: какую бы малую амплитуду отклонения мы не выбрали, настанет время, когда она не будет превышаться.



Пример разрывной функции: $f(x_0) \ne \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

С помощью понятия предела определяется такое важное понятие как непрерывность функции. Смысл непрерывности очень прост: если при приближении аргумента x к x_0, значение функции f(x) стремится к значению функции в точке x_0, то есть к значению $f(x_0)$.

Итак, функция непрерывна, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Поскольку большинство элементарных функций непрерывно, многие пределы вычисляются просто подстановкой конечного значения аргумента в функцию $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$:. Однако порой такие вычисления не приводят к результату, например $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{0}{0}$. В таких случаях используются более сложные методы вычисления пределов.

Отметим также следующее обстоятельство. Изучение непрерывных и гладких функций ведётся со следующих позиций: определяются интервалы возрастания и убывания функций, а также точки экстремума. В результате у студентов невольно возникает ощущение, что других точек на непрерывных функциях нет. Как известно это не так. И по этой причине необходимо указать, что на непрерывных функциях есть точки иного типа – точки колебания функций. Примером является функция $y = x\cdot\sin\frac{1}{x}$ (у = 0 при х = 0). Данный контрпример должен быть не только приведён на занятиях, но необходимо зафиксировать демонстрируемый им факт в памяти студентов. Вообще же книга [13] должна быть настольной книгой преподавателя, читающего курс математического анализа.

<u>Тема 8.</u> Вычисление производных элементарными методами. Построение касательных методами кинематики. О связи производной и интеграла.

Прежде всего, мы перенесём метод, изложенный в Теме 5 на довольно широкий круг функций. Отметим, что наши рассуждения в чём-то не являются достаточно строгими, на их основе возможно проведения строгих доказательств. Отметим, между прочим, тот факт, что методика должна определять удельный вес строгих и нестрогих рассуждений.

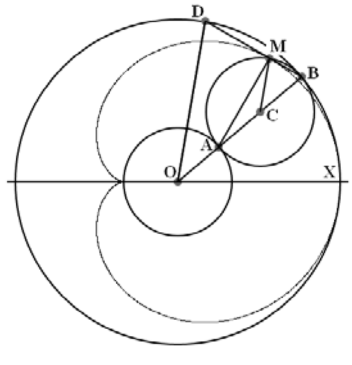
Распространение метода параллельных сечений на степенные функции. Получим с помощью данного метода производные степенной функции для любых целых показателей и для показателей вида $\frac{1}{n}$, то есть для корней n-й степени. Изложение будет кратким, поскольку суть метода, изложенного в Теме 5, остаётся прежней. Ограничимся при этом только вычислением производной.

Натуральные показатели. Тангенс угла наклона секущей равен $\frac{x_2^n - x_1^n}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^n\cdot(1-x_1^n/x_2^n)}{x_2\cdot(1-x_1/x_2)} = x_2^{n-1}(1+\frac{x_1}{x_2}+\ldots+\frac{x_1^{n-1}}{x_2^{n-1}})$. В вычислениях использована формула суммы конечной геометрической прогрессии. При слиянии точек x1 и x2 в точку x0 получаем производную nx_0^{n-1}.

Целые отрицательные показатели. Тангенс угла наклона секущей равен $\frac{1/x_2^n - 1/x_1^n}{x_2 - x_1} = \frac{1}{x_1^n x_2^n}\cdot\frac{x_1^n - x_2^n}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{x_1^n x_2^n}\cdot\frac{x_2^n - x_1^n}{x_2 - x_1}$. Использовав полученный ранее результат, получаем производную при слиянии двух точек в одну $-\frac{1}{x_0^{2n}}\cdot n\cdot x_0^{n-1} = -n\cdot\frac{1}{x_0^{n+1}}$.

Корни n-й степени. Положим, что $\sqrt[n]{x_i} = z_i$. Тогда тангенс угла наклона секущей равен $\frac{\sqrt[n]{x_2}-\sqrt[n]{x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_2^n - z_1^n}$. Используя предыдущий результат, получаем производную: $\frac{1}{n\cdot z_0^{n-1}} = \frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x_0^{n-1}}}$.

Построение касательных методами кинематики (см. также [14], [15]). Покажем эффективность кинематических методов на примере кардиоиды. Если закрепить окружность и катить по ней равную ей окружность с пером на ободе, будет построена



одна из бесконечного числа улиток Паскаля, за сходство с сердцем названная кардиоидой. Кардиоида, как и прочие улитки Паскаля, является благодарным предметом для исследователя. Все доказательства её свойств основаны на простейших теоремах элементарной геометрии.

Теорема. Пусть точки B и D движутся по окружности радиуса 3r с постоянными скоростями, причём скорость точки D в два раза больше скорости точки B. Точка M, которая отсекает треть хорды BD (BM = $\frac{1}{3}$ BD) описывает кардиоиду, а любая хорда BD является касательной к этой кардиоиде.

Доказательство. Кардиоида построена с помощью неподвижной окружности радиуса r с центром O и катящейся окружности радиуса r с центром C. Пусть $\angle$BOX = u. Выберем точку D так, чтобы $\angle$BOD = u

Соприкоснувшиеся при качении дуги обеих окружностей имеют длину r·u. Из исходного положения X перо переместилось в точку M. При этом горизонтальная линия OX перешла в линию OB, а перо же за счёт качения отклонилось от этой линии на угол u, то есть $\angle$BCM = u. Треугольники OBD и CBM являются равнобедренными и имеют углы при вершинах равные u. Значит у них равны и углы при основании, то есть $\angle$CBM = $\angle$OBD = $\frac{\pi - u}{2}$. Из этого следует, что точка M лежит на хорде BD. Из подобия названных треугольников следует, что BM = $\frac{1}{3}$ BD.

Далее $\angle$BAM = u/2, как вписанный в окружность и опирающийся на дугу, соответствующую центральному углу u. Таким образом, треугольник MAB является прямоугольным, то есть хорда BD перпендикулярна отрезку AM, исходящему из неподвижный в данный момент точки A. Как указано выше, это означает, что хорда BD является касательной к этой кардиоиде в точке M. Теорема доказана.

Теорема позволяет без всяких проблем получить параметрические уравнения кардиоиды. Точка B имеет координаты (3r·cos u; 3r·sin u), а точка D – координаты (3r·cos 2u; 3r·sin 2u). Из теоремы следует, что отрезки с концами, имеющими соответствующие координаты, являются огибающими кардиоиды. Координаты точки M вычисляются по формулам, которые и являются нужными уравнениями:

$$x_м = 3\cdot r\cdot\cos u + \frac{1}{3}\,3\cdot r\cdot(\cos 2u - \cos u) = r\cdot(2\cdot\cos u + \cos 2u);$$

$$y_м = 3\cdot r\cdot\sin u + \frac{1}{3}\,3\cdot r\cdot(\sin 2u - \sin u) = r\cdot(2\cdot\sin u + \sin 2u).$$

Отметим, что фактически рассматривались вопросы, относящиеся к дифференциальной геометрии, но методы использовались элементарные.

О связи производной и интеграла. Как известно, в курсе математического анализа принято выявлять механический и геометрический смыслы производной. При введении интеграла полезно каким-то образом обосновать связь между производной и интегралом. При этом слова Барроу о том, что задача проведения касательных является обратной к задаче вычисления площадей, могут только озадачить студентов. Иное дело, когда мы говорим, что дифференцированию соответствует задача отыскания скорости в случае, когда известна зависимость пройденного пути от времени, а интегрированию соответствует задача отыскания пути в случае, когда известна зависимость скорости движения от времени. Здесь очевидным образом проявляется тот факт, что задачи дифференцирования и интегрирования являются обратными друг к другу. Таким образом, связь между производной и интегралом должна объясняться через механический смысл производной.

Тема 9. Определение интеграла и простейшее дифференциальное уравнение вида $y' = f(x)$. Пропедевтика дифференциальных уравнений первого порядка. Приёмы использования интеграла как суммы с опорой на символику Лейбница.

Определение интеграла. Определённые сложности при введении интеграла возникают из-за того, что сразу появляется несколько понятий таких, как первообразная, неопределённый интеграл, определённый интеграл. К тому же определение первообразной не является слишком кратким и удобным.

Возможно, наиболее удобно определять первообразную и неопределённый интеграл как решение дифференциального уравнение вида $y' = f(x)$, а самоё это уравнение следует назвать простейшим дифференциальным уравнением. Это позволяет сразу же готовить студентов к восприятию дифференциальных уравнений, к тому, что существует бесконечное множество решений, каждое из которых является функцией. А единственное решение можно выбрать, указав на плоскости точку, через которую проходит кривая, соответствующая единственному решению. Полезно также сразу изобразить векторное поле, соответствующее простейшему дифференциальному уравнению.

Приёмы использования интеграла как суммы с опорой на символику Лейбница. Для вычисления площадей криволинейных трапеций вводится понятие определенного интеграла. Интуитивно он является пределом суммы бесконечно малых величин *f(x)dx*. Согласно обозначениям Лейбница интеграл записывается следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Смысл этого обозначения прост: знак $\int$ – стилизованная буква S символизирует сумму. Буквы a и b указывают отрезок, на котором задана величина *f(x)*. Они называются пределами интегрирования. Произведение *f(x)dx* выражает бесконечно малые суммируемые порции вычисляемой величины – длины, площади, объёма и т.д.

Для решения задач, состоящих в вычислении некоторой величины, с помощью определённого интеграла нужно представить эту величину, как сумму произведений вида *f(x)dx*. При этом не имеет значения, являются ли слагаемые площадями, длинами, объёмами, массами, зарядами и т. д. Далее рассматриваются примеры вычисления величин различного характера.

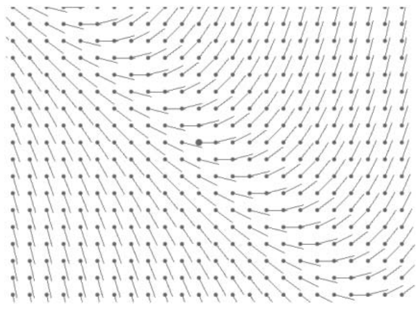
Тема 10. Пропедевтика дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными с помощью дифференциальных уравнений вида $y' = f(y)$.

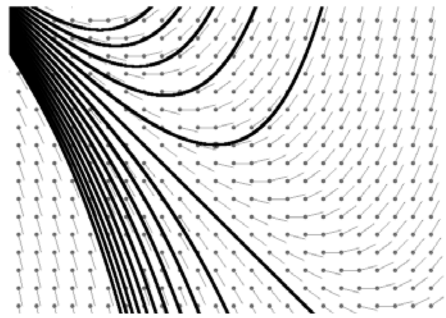
Простейшее дифференциальное уравнение имеет вид $y' = f(x)$. Его решением является первообразная $y = \int f(x)dx$. Теперь рассмотрим более сложное уравнение $y' = f(y)$. Для его решения используем обратную функцию, то есть будем искать решение в виде x = x(y). Как известно, $x'_y = \dfrac{1}{y'}$, но из уравнения следует, что $y' = f(y)$. Таким образом, мы приходим к уравнению $x' = \dfrac{1}{f(y)}$. Фактически мы возвращаемся к простейшему дифференциальному уравнению для обратной функции. Оно имеет решение $x = \int \dfrac{dy}{f(y)}$.

Далее можно приступить к решению задач, связанных с размножением бактерий и радиоактивным распадом.

Тема 11. Образное описание дифференциальных уравнений первого порядка.

Уравнения первого порядка вида $y' = f(x, y)$ задаёт на плоскости векторное поле. Можно сравнить ситуацию либо с устоявшимися ветрами над озером, либо с устоявшимися течениями в водах того же озера. Решением же этого уравнения является траектория парусного кораблика или лодочки, движущихся под влиянием ветров, либо под влиянием течений. Ясно, что траектория существенным образом зависит от начального положения судёнышка, то есть от того, где оно опущено на воду.





<u>Тема 12.</u> Аналогия между множеством решений дифференциального уравнения второго порядка и множеством прямых на плоскости.

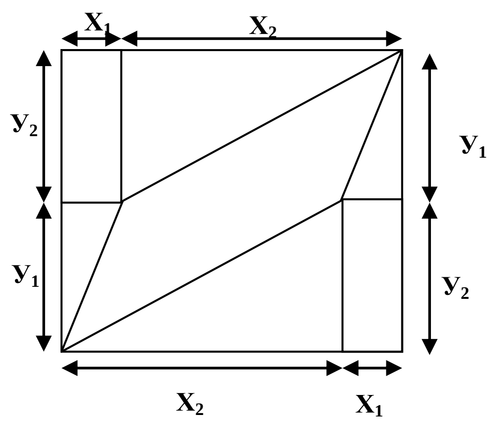
Поскольку обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка имеет множество решений, зависящих от одного параметра, студенту легко представить совокупность всех решений по аналогии с решениями простейшего дифференциального уравнения $y' = f(x)$. Множество решений дифференциального уравнения второго порядка характеризуется тем, что через каждую точку плоскости проходит решение имеющее своё направление (мы не рассматриваем случаи существования особых точек). По этой причине можно сказать, что структурно множество решений дифференциального уравнения второго порядка напоминает множество прямых на плоскости. С каждой точкой связан своеобразный пучок решений.

Что касается множества решений дифференциального уравнения третьего порядка, то с каждой точкой плоскости и с каждым направлением связано семейство решений отличающихся друг от друга кривизной. Наглядной моделью здесь может послужить пучок касающихся друг от друга окружностей.

<u>Тема 13.</u> Вопрос об определителе как объёме.

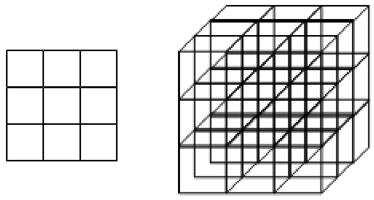
Очень важным для математики вообще является то обстоятельство, что определитель квадратной матрицы равен объёму параллелепипеда, натянутого на вектора, соответствующие столбцам (строкам) этой матрицы. Этот факт доказывается в рамках аналитической геометрии при рассмотрении смешанного произведения. Однако для матриц всех остальных размерностей, включая и матрицу 2 на 2 об этом факте едва ли не умалчивают. Возможно, я ошибаюсь, но, например, в таких прекрасных книгах как [16] и [17] об этом не говорится, по крайней мере, специально.

По этой причине желательно уделить данному вопросу особое внимание. Для этой цели нужно акцентировать внимание студентов на этом вопросе и хотя бы для матрицы 2 на 2 получить указанный результат, что не представляет труда:



$S_{\text{параллелограмма}} = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - 2x_1y_2 - x_2y_2 - x_1y_1 =$
$= x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y - 2x_1y_2 - x_2y_2 - x_1y_1 = x_2y_1 - x_1y_2.$

Что касается матриц большего размера, то, конечно, здесь всё обстоит куда сложней. Разбираться в деталях многомерных конструкций трудно, хотя и полезно. Нарастание сложности ситуации можно оценить по двум картинкам, плоской и объёмной.



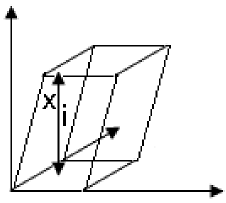
Тем не менее, и в общем случае можно сообщить студентам, что можно вычислить определитель вида $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{vmatrix}$ подобно тому, как это делалось в двумерном случае. Из произведения $(x_1 + \dots + w_1)\dots(x_n + \dots + w_n)$ вычитаются «лишние объёмы». При этом те слагаемые, в которых есть одинаковые индексы, уничтожаются, а некоторые (в зависимости от чётности подстановки) меняют знак. Конечно, для детального видения ситуации требуется небольшое исследование.

<u>Тема 14</u>. Геометрическое истолкование правила Крамера.

Пусть нам дана система из n линейных уравнений с n неизвестными, записанная в матричной форме в виде: A**x** = **b**.

Единичный куб под действием линейного преобразования A переходит в параллелепипед П, рёбрами которого являются столбцы матрицы. Объём этого параллелепипеда равен определителю Δ квадратной матрицы A. Далее, если мы возьмём произвольный параллелепипед с объёмом V, то линейное преобразование A переведёт его в новый определитель с объёмом Δ·V.

Заменим в единичном кубе i-тый орт на вектор **x** (x_1; x_2; … x_i, … x_n). Объём нового параллелепипеда S будет равен x_i. Вектор **x** переводится линейным преобразованием A в вектор **b**. Следовательно, параллелепипед S линейным преобразованием A переводится в модифицированный параллелепипед $П_1$. Он получается из П заменой ребра, соответствующая i-му столбцу матрицы A на вектор **b**. Объём параллелепипеда $П_1$ с одной стороны равен определителю Δ_i матрицы, полученной из матрицы A заменой i-го столбца этой матрицы на вектор b. А с другой стороны он равен $x_i \cdot \Delta$.



Таким образом, $x_i \cdot \Delta = \Delta_i$. Иными словами $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, что и обосновывает правило Крамера.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрены некоторые вопросы методики преподавания высшей математики. Многие из обсуждаемых автором методических проблем связаны с современной ситуацией, возникшей в школьном и вузовском образовании.

Рассматриваются и конкретные вопросы методики. Прежде всего, речь идёт о математическом анализе и линейной алгебре. Например, в статье показано, что определение числа e через предел известной числовой последовательности является следствием определения числа e как основания степенной функции, имеющей в нуле производную равную единице. Приведён также метод построения касательных с помощью параллельных секущих, как и многие другие методические результаты. Рассмотрение этого и других вопросов ведётся с позиции геометрической наглядности

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Л. Ершов. Алгебра и логика: старые и новые связи. В Библиографическом указателе работ Ершова. Новосибирск, Изд. Института математики, 2015.
2. А. Б. Сосинский. Умер ли Никола Бурбаки? Ega-math.narod.ru.
3. А. Пуанкаре, Л. Кутюра. Математика и логика. М., Изд. ЛКИ, 2010.
4. Сайт Математического института им. В. А. Стеклова РАН. Наиболее важные результаты научных исследований (mi.ras.ru).
5. И. М. Глазман, Ю. И. Любич. Конечномерный линейный анализ в задачах. М., Наука, 1969.
6. М. Е. Степанов. Метод сложных движений в компьютерной геометрии. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. – Вып. 1, 2011.
7. М. Е. Степанов. Метод криволинейных координат в компьютерной геометрии. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. – Вып. 3, 2013.
8. М. Е. Степанов. Образ силового поля как эвристическая модель в математике. Моделирование и анализ данных. Труды факультета информационных технологий. – Вып. 3, 2007.
9. Е. Н. Берёзкин. Курс теоретической механики, М., Изд. МГУ, 1974.
10. П. С. Александров. Лекции по аналитической геометрии. М., Наука, 1968.
11. М. Е. Степанов. Об одном классе непрерывных функций. Моделирование и анализ данных. Труды факультета информационных технологий. – Вып. 4, 2009.
12. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., Физматгиз, 1962.
13. Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. Контрпримеры в анализы. М., Мир, 1967.
14. М. Е. Степанов. Эрлангенская программа Клейна и геометрия треугольника (часть первая). Моделирование и анализ данных. Научный журнал. – Вып. 1, 2015
15. М. Е. Степанов. Эрлангенская программа Клейна и геометрия треугольника (часть вторая). Моделирование и анализ данных. Научный журнал. – Вып. 1, 2016.
16. А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. М., Физматгиз, 1962.
17. И. М. Гельфанд. Лекции по линейной алгебре. М., Наука, 1966.

Работа поступила 25.12.2017г.

УДК 004.942

ИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА ДИАГНОСТИКИ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ВЫГОРАНИЯ ПЕДАГОГОВ

И.М. Нуркаева, К.А. Коморина

В статье рассматриваются вопросы разработки информационной системы по диагностики профессионального выгорания педагогов. Определены основные требования для разрабатываемой системы.

The article discusses the development of the information system on occupational burnout of teachers. Defines the main requirements for a software system.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА
Профессиональное выгорание, тестирование, информационные технологии, web сервер, интернет

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы в России и развитых странах все чаще стали говорит о синдроме эмоционального выгорания работников, которое рассматривают не просто как профессиональный стресс.

Синдром эмоциональное выгорание – это неблагоприятное явление в профессиональной сфере, которое можно рассматривать как комплекс психических переживаний и поведения, которые отрицательно сказываются на работоспособности, физическом и психологическом самочувствии.

Причинами эмоционального выгорания могут выступать неуверенность в стабильности социального и материального положения, изменяющиеся запросы на рынке труда, конкуренция за престижную и высокооплачиваемую работу, что требует от человека мобилизации его потенциала.

Синдром эмоционального выгорания развивается, как правило, у людей профессий «человек – человек» и связан с межличностным отношением. Педагоги общеобразовательных школ, врачи, медицинский персонал, социальные работники наиболее подвержены данному синдрому.

На данное явление впервые обратил внимание американский ученый Х. Фрейденберг (1974 г.). Позднее Кристина Маслач (1976 г.) определила синдром эмоционального выгорания как «синдром физического и эмоционального истощения, включающий развитие отрицательной самооценки, отрицательного отношения к работе и утрату понимания и сочувствуя по отношению к клиентам».

На сегодня существует единогласное мнение на сущность психологического выгорания и его структуру. Термин «психологического выгорания» трактуется как состояние физического и умственного истощения, который проявляется в специальностях связанных с социальной сферой. Синдром содержит в себе три главных составляющих, выделенные Кристиной Маслач: эмоциональная истощенность, деперсонализация, редукция профессиональных достижения.

Эмоциональная истощенность – это ощущение опустошенности, эмоционального утомления, вызванное трудовой деятельностью.

Деперсонализация – это циничный взгляд на трудовую деятельность и объекты своей трудовой деятельность. Деперсонализация подразумевает холодные взаимоотношения с учениками.

Под редукцией профессиональных достижений понимают чувство некомпетентности в своей профессиональной сфере, осознание того, что ты не добился успеха в ней.

Все исследователи обращают внимание, что эмоциональное выгорание - это состояние психически здорового человека. Поэтому очень важно во время диагностировать данное состояние и оказать помощь.

Диагностика профессионального выгорания является актуальной, поскольку каждый человек подвержен эту симптому. Автоматизация диагностики профессионального выгорания позволяет психологу экономить время на подсчетах результатов, риск ошибиться в подсчетах снижается до нуля. Психологу остается правильно интерпретировать результаты и работать уже с теми людьми, у кого обнаружилось профессиональное выгорание и с тем, кто нуждается в помощи. Педагог может проконтролировать свое эмоциональное состояние, отследить его уровень и при необходимости обратиться за консультацией к психологу.

2. СТРУКТУРА ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Информационная система диагностики профессионального выгорания педагогов рассчитана на четыре категории пользователей: новый пользователь (не зарегистрированный), испытуемый, психолог и администратор. Для каждого из них (кроме нового пользователя) реализован свой личный кабинет.

Структуру информационной системы можно представить в виде таблицы 1.

Таблица 1. Структура информационной системы

Страница	Имя файла	Содержание	Особенности реализации
Титульная страница	index.php	Окно авторизации, описание теста, описание доступных функций, в зависимости от категории авторизованного пользователя.	Вначале выводим окно авторизации. Если авторизовался пользователь, то выводим описание теста и предлагаем его пройти. Если авторизовался психолог или администратор, то выводим функции доступные им.
Регистрация	registration.php	Вывод формы для регистрации пользователя.	После заполнения всех полей формы, происходит добавление нового пользователя, путем добавление записи в БД
Страница с вопросами	voprosy.php	Вывод вопросов и формы для ответов.	Вывод вопросов из базы данных и запись ответов пользователя в базу данных.

Личный кабинет пользователя	private.php	Вывод результата последнего тестирования пользователя.	Результаты выводятся из БД
Личный кабинет психолога	psycholog.php	Общий вывод результатов тестирования каждого пользователя и информации об испытуемом.	Результаты выводятся из БД
Личный кабинет психолога	us.php	Вывод всех результатов тестирования конкретного пользователя (с рассмотрением ответов по каждому вопросу)	Результаты выводятся из БД
Личный кабинет администратора	admin.php	Вывод вопросов теста с возможностью их редактирования	Вывод вопросов тестирования из БД
Личный кабинет администратора	user.php	Вывод зарегистрированных пользователей с возможностью их удаления	Вывод информации о пользователях из БД

Навигационная схема информационной системы спроектирована на программной платформе StarUML (рис. 1).

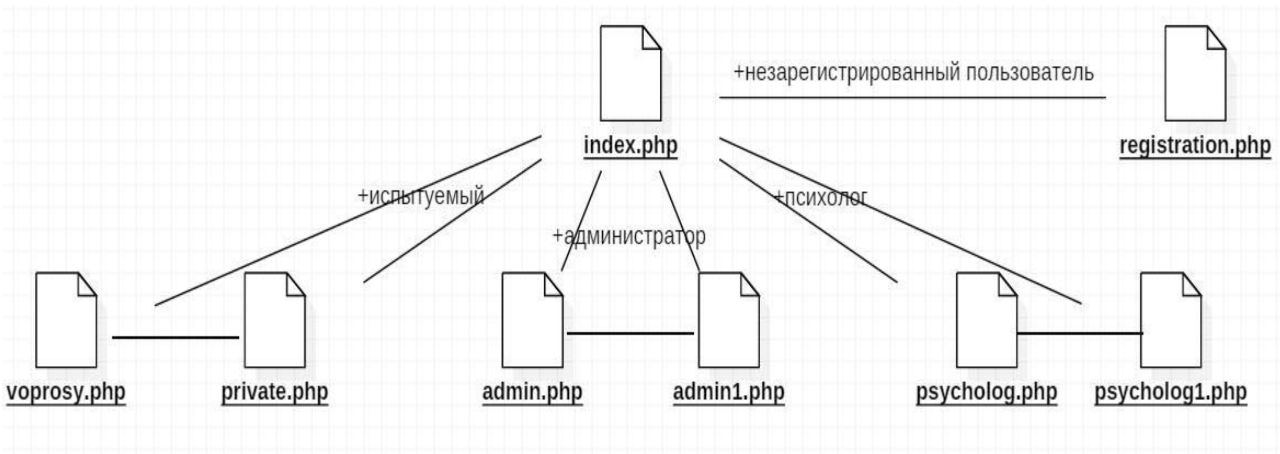


Рис. 1. Навигационная схема

3. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Проектирование информационной системы строилось с использованием методологий IDEF0 и DFD, которые позволяют создать модель функций процесса. В качестве инструментального средства создания моделей использовался пакет BPWin.

Методология IDEF0 позволяет создать функциональную модель всех взаимодействующих в системе процессов. На диаграмме IDEF0 отображаются основные функции процесса, входы, выходы, управляющие воздействия и устройства, взаимосвязанные с основными функциями.

На графической модели (рис. 2) видно, что на вход тестирования подаются пользователи и вопросы теста. На выходе, все те же пользователи, и результаты тестирования. Всем этим управляет ключ опросника, благодаря которому, подсчитываются результаты тестирования.

Рис. 2. Подуровень IDEF0 диаграммы

Дальнейшая декомпозиция позволяет перейти на нижний уровень моделирования процессов тестирования. На рис. 3 представлена диаграмма DFD.

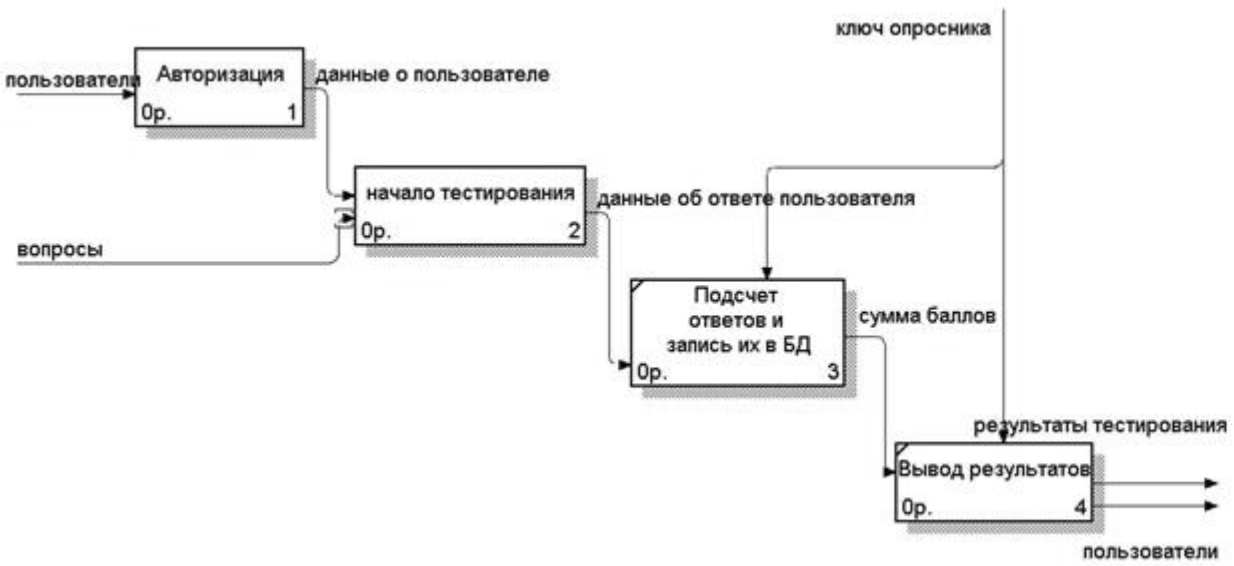


Рис. 3. Диаграмма DFD

Система разбита на четыре процесса: авторизация, начало тестирования, подсчет ответов и запись их в базу данных, вывод результатов тестирования.

В процесс авторизации на вход подаются пользователи, которые должны быть зарегистрированы (если не зарегистрирован – предложение регистрации в системе), а на выходе получаем данные о пользователе, которые необходимы.

Далее происходит начало тестирования, на вход которого идут данные пользователя, полученные на этапе авторизации, и вопросы тестирования.

Затем происходит процесс подсчетов ответов и их запись в базу данных. На вход идут данные об ответе пользователя, которые получают с этапа тестирования. Управляет все этим ключ опросника, в соответствии с которым и подсчитываются баллы, так как у каждого вопроса по-своему происходит подсчет результатов. На выходе этого этапа имеем сумму баллов, полученную в результате тестирования.

Последний процесс – вывод результатов, которым управляет ключ опросника, так как результаты интерпретируются по принадлежности к тому или иному половому признаку. И на выходе получаем результаты тестирования и пользователей, которые уже прошли тестирование.

Дальнейшая декомпозиция не проводилась, так как разработанная функциональная модель позволила полно описать все процессы, происходящие в системе.

После создания функциональной модели было выполнено проектирование базы данных средствами пакета ERWin (рис. 4). При проектировании базы данных учитывались требования:

- в базе данных должна храниться вся необходимая информация;
- сокращение избыточности и дублирования данных;
- обеспечение целостности базы данных.

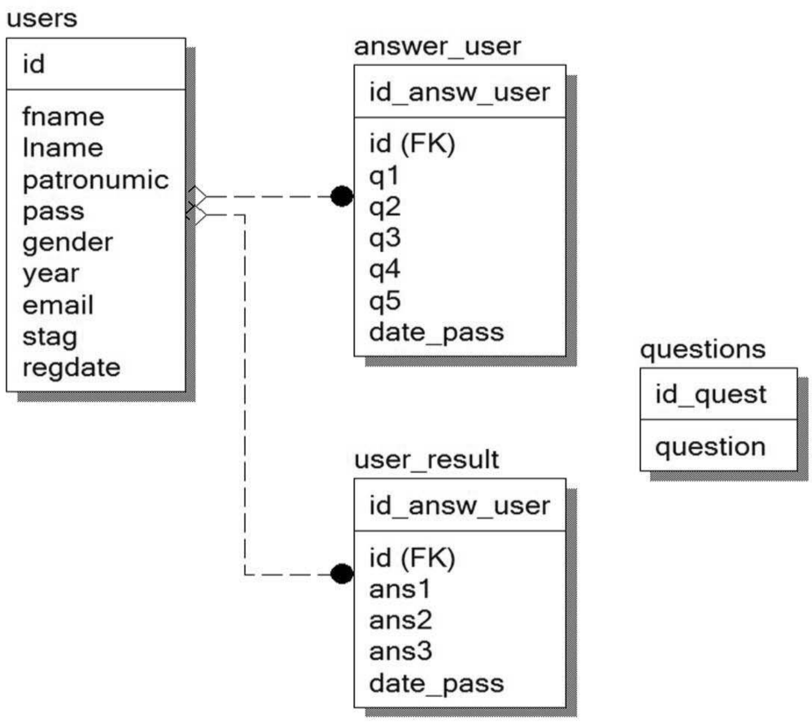


Рис. 4. Логическая модель базы данных

4 АЛГОРИТМ ПОДСЧЕТА РЕЗУЛЬТАТОВ

Процесс обработки результатов тестирования строится по следующему алгоритму: ответ пользователя на каждый вопрос теста записывается в базу данных и скрытые переменные, которые соответствуют трем шкалам: эмоциональное истощение, деперсонализация, редукция личностных достижений.

Для того, что бы система могла правильно проверить, в какую из скрытых переменных нужно записать ответ на данный вопрос, задаются три массива, в которых находятся номера соответствующих вопросов.

По окончанию тестирования выдаются результаты по трем шкалам и интегральный индекс выгорания.

На рис. 5 представлен алгоритм подсчета результатов тестирования.

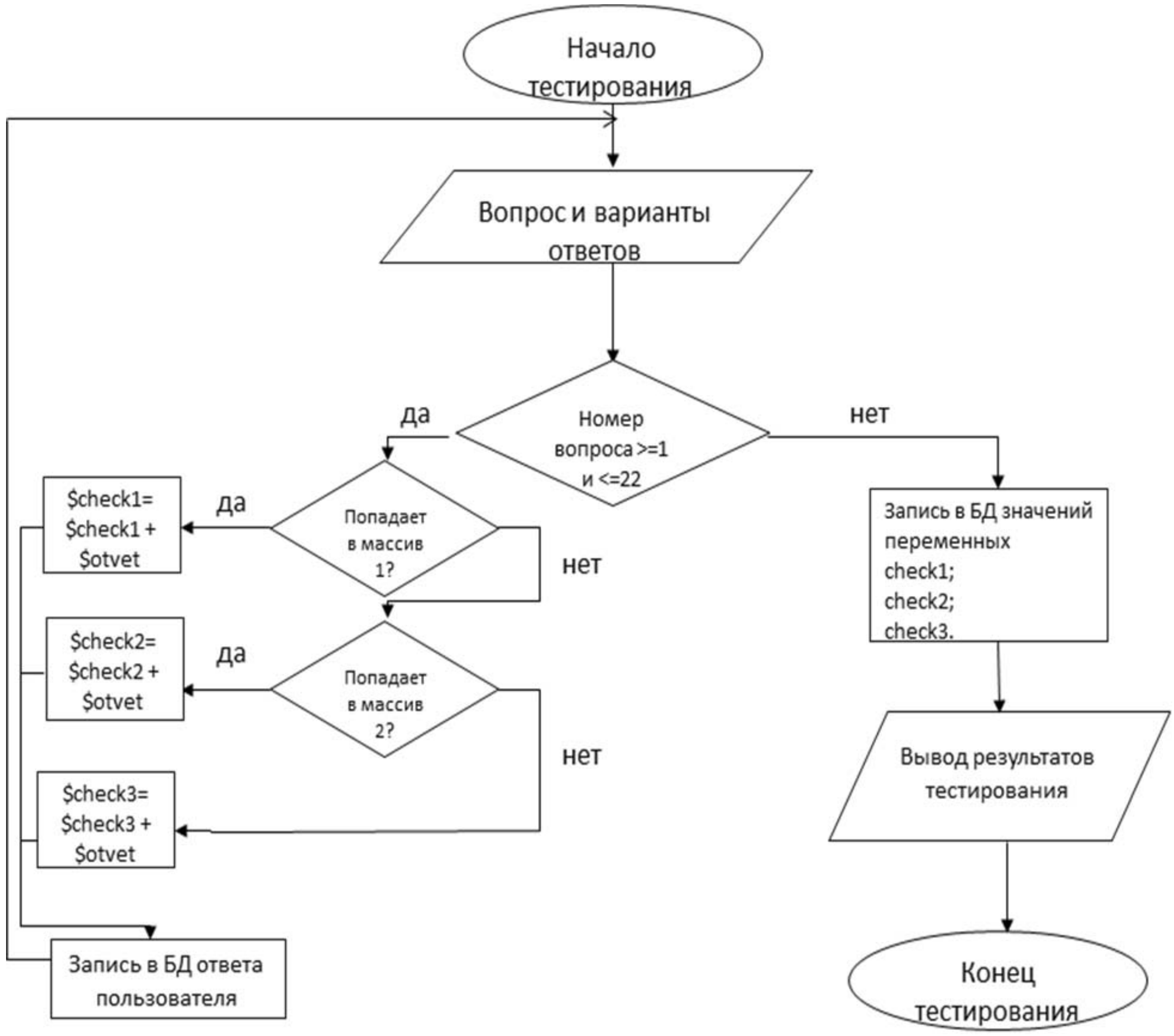


Рис. 5. Алгоритм подсчета результатов тестирования

5. ВЫБОР ПРОГРАММНЫХ СТРЕДСТВ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Следуя спроектированной информационной системе, было реализовано web-тестирование по выявлению профессионального выгорания у педагогов с использованием следующих программных средств: веб-сервер Denver, СУБД MySQL, скриптовые языки программирования PHP и JavaScript, язык разметки гипертекста HTML, каскадная таблица стилей CSS; библиотека jQuery.

Разработанная информационная система представляет собой комплекс серверного и прикладного программного обеспечения, включающего web-сервер, СУБД, интерфейсы администратора, психолога и тестируемого.

6. ОСНОВНЫЕ РЕЖИМЫ РАБОТЫ СИСТЕМЫ

Система рассчитана на работу четырех групп пользователей. Страницы с регистрацией и авторизацией пользователей выглядят стандартно, мы не будем на них останавливаться. После авторизации пользователя, ему предлагается пройти тестирование (рис. 6, рис. 7).

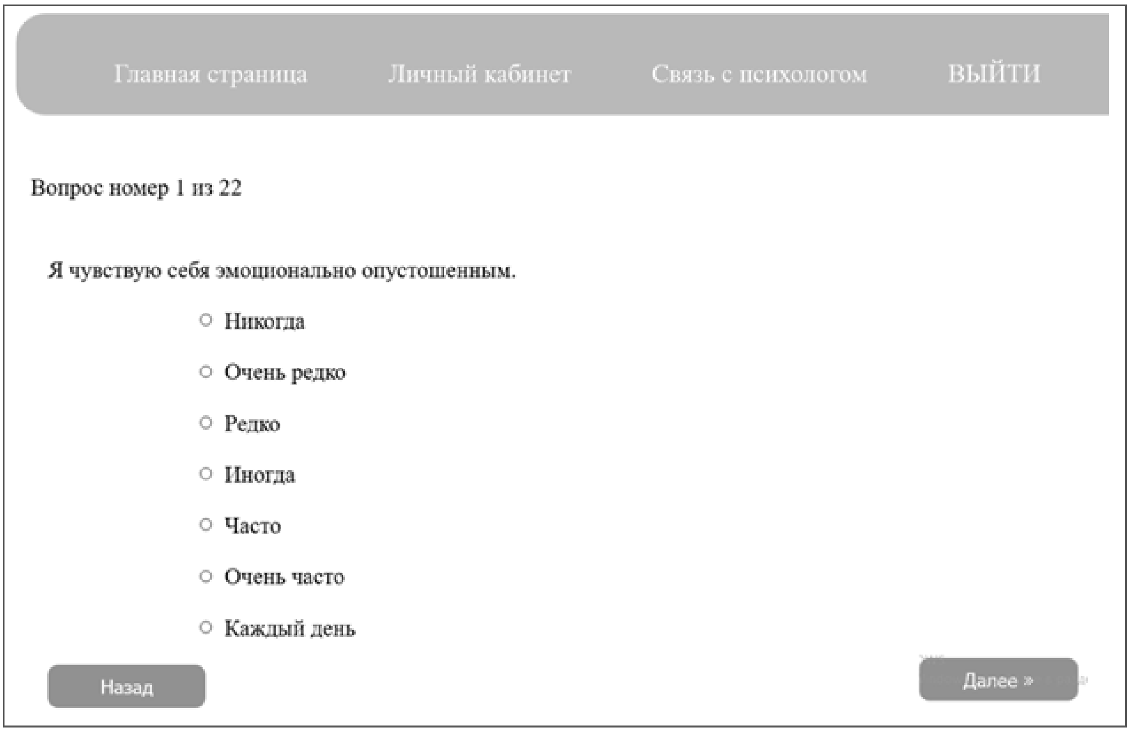


Рис. 6. Страница с вопросами тестирования

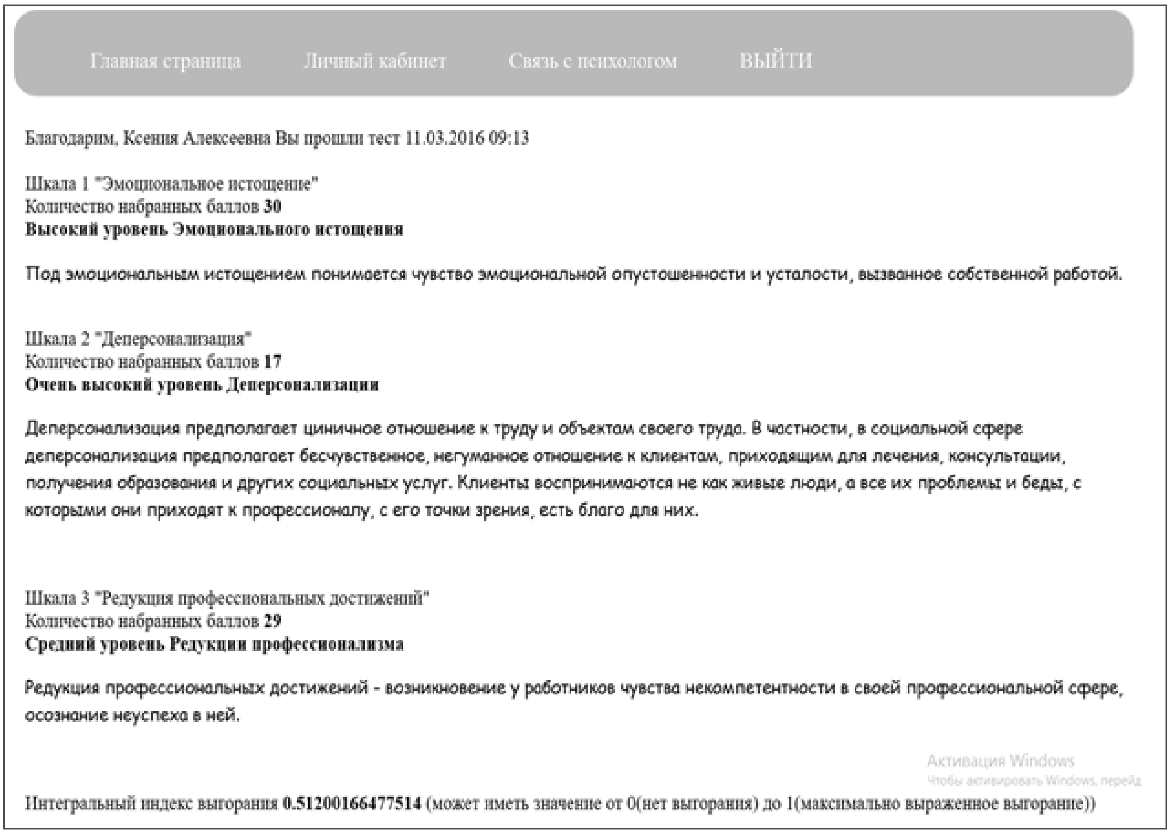
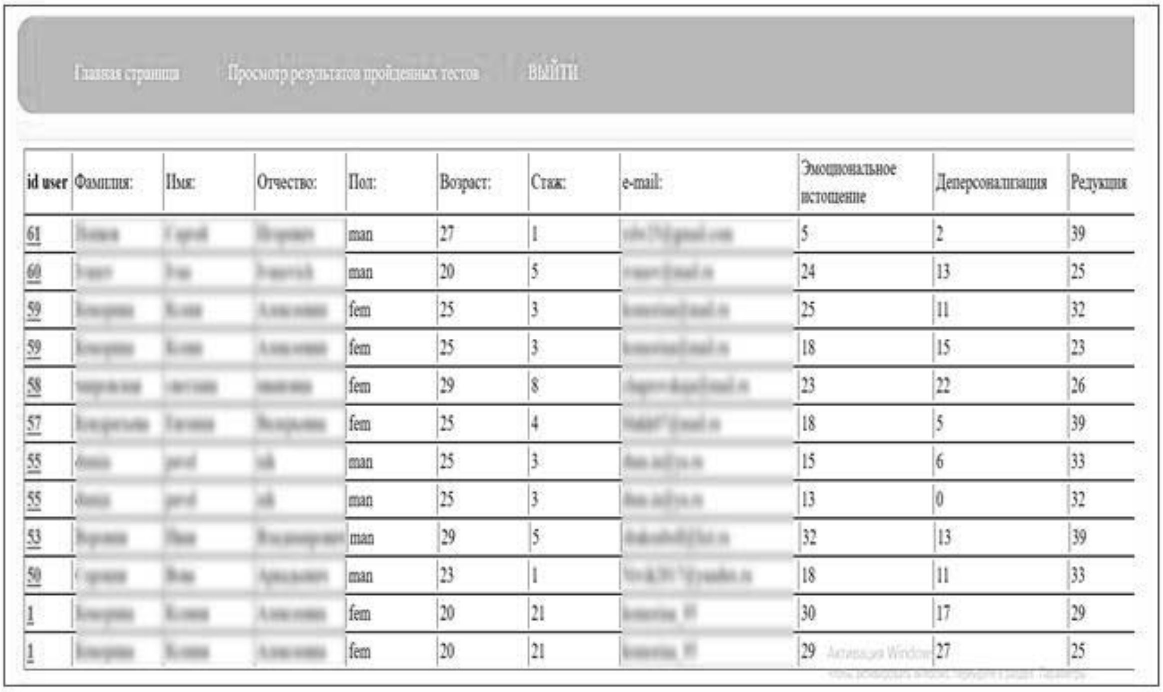


Рис. 7. Страница с результатами тестирования

У администратора есть две функции, которые он может выполнять: просмотр зарегистрированных пользователей, с возможностью их удаления и просмотр вопросов тестирования, с возможностью их редактирования. Страницы администратора выглядят стандартно.

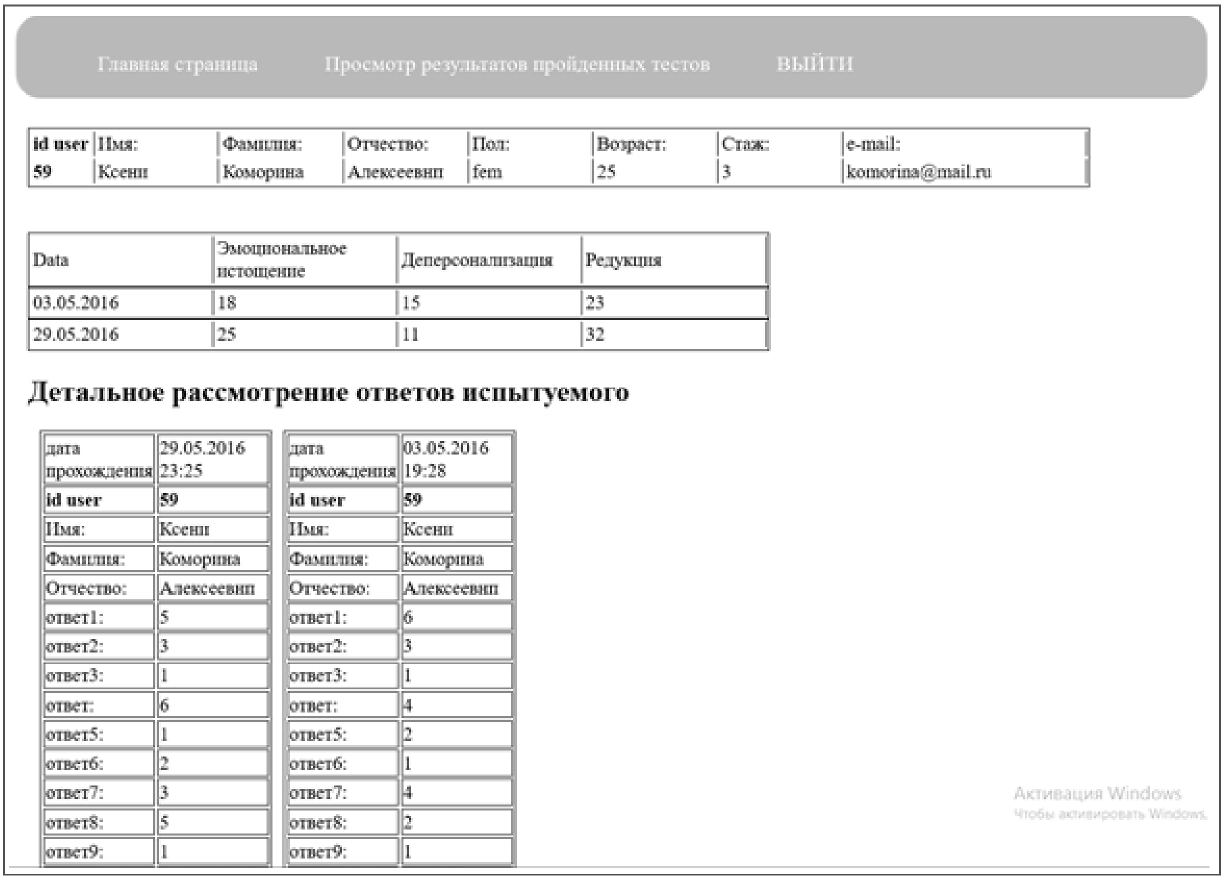
Психолог может просматривать результатов тестирования и связываться с тестируемым, если результаты выходят за пределы нормы (рис. 8, 9, 10).



Главная страница Просмотр результатов пройденных тестов ВЫЙТИ

id user	Фамилия:	Имя:	Отчество:	Пол:	Возраст:	Стаж:	e-mail:	Эмоциональное истощение	Деперсонализация	Редукция
61	[illegible]	[illegible]	[illegible]	man	27	1	[illegible]	5	2	39
60	[illegible]	[illegible]	[illegible]	man	20	5	[illegible]	24	13	25
59	[illegible]	[illegible]	[illegible]	fem	25	3	[illegible]	25	11	32
59	[illegible]	[illegible]	[illegible]	fem	25	3	[illegible]	18	15	23
58	[illegible]	[illegible]	[illegible]	fem	29	8	[illegible]	23	22	26
57	[illegible]	[illegible]	[illegible]	fem	25	4	[illegible]	18	5	39
55	[illegible]	[illegible]	[illegible]	man	25	3	[illegible]	15	6	33
55	[illegible]	[illegible]	[illegible]	man	25	3	[illegible]	13	0	32
53	[illegible]	[illegible]	[illegible]	man	29	5	[illegible]	32	13	39
50	[illegible]	[illegible]	[illegible]	man	23	1	[illegible]	18	11	33
1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	fem	20	21	[illegible]	30	17	29
1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	fem	20	21	[illegible]	29	27	25

Рис. 8. Реализация страницы психолога



Главная страница Просмотр результатов пройденных тестов ВЫЙТИ

id user	Имя:	Фамилия:	Отчество:	Пол:	Возраст:	Стаж:	e-mail:
59	Ксени	Коморина	Алексеевнп	fem	25	3	komorina@mail.ru

Data	Эмоциональное истощение	Деперсонализация	Редукция
03.05.2016	18	15	23
29.05.2016	25	11	32

Детальное рассмотрение ответов испытуемого

дата прохождения	29.05.2016 23:25
id user	59
Имя:	Ксени
Фамилия:	Коморина
Отчество:	Алексеевнп
ответ1:	5
ответ2:	3
ответ3:	1
ответ:	6
ответ5:	1
ответ6:	2
ответ7:	3
ответ8:	5
ответ9:	1

дата прохождения	03.05.2016 19:28
id user	59
Имя:	Ксени
Фамилия:	Коморина
Отчество:	Алексеевнп
ответ1:	6
ответ2:	3
ответ3:	1
ответ:	4
ответ5:	2
ответ6:	1
ответ7:	4
ответ8:	2
ответ9:	1

Рис. 9. Реализация страницы психолога

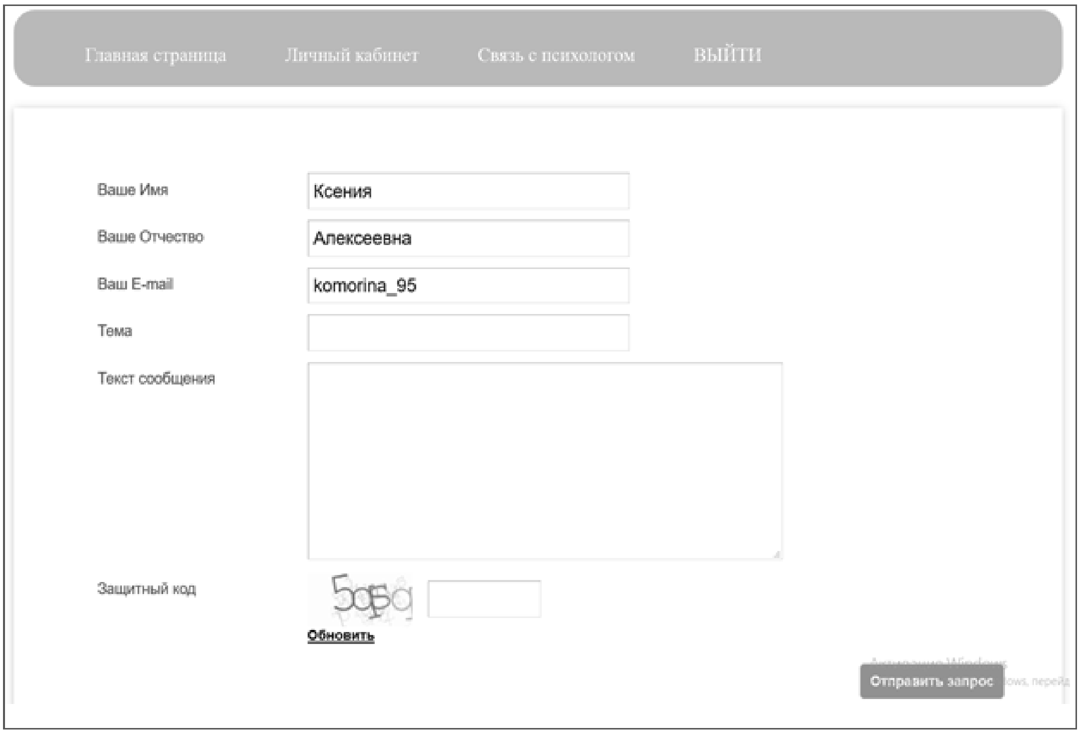


Рис. 10. Реализация страницы психолога с обратной связью

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная система позволяет проходить тестирование и получать данные об эмоциональном состоянии педагогов. Она упрощает работу психолога путем автоматизации подсчета и интерпретации результатов, колоссально экономя время психолога, позволяя сосредоточится на оказании психологической помощи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Водопьянова, Н.Е. Профилактика и коррекция синдрома выгорания: методология, теория, практика. – Издательство: СПбГУ, 2011. – 160 с.
2. Куравский Л.С., Нуркаева И.М., Юрьев Г.А. Дисциплина «Информатика и программирование»: программа, методические рекомендации и учебные пособия: Учебное пособие. – 2-е издание дополненное. – М.: ФГБОУ ВО МГППУ, 2017. – 102 с.
3. Лоусон Б., Шарп Р. Изучаем HTML5. Библиотека специалиста. – СПб: Питер, 2012, 303 с.
4. Макфарланд Д. Большая книга CSS3. – СПб.: Питер, 2016. – 720 с.
5. Никсон Р. Создаем динамические веб-сайты с помощью PHP, MySQL, JavaScript, CSS и HTML5. 3-е изд. – СПб.: Питер, 2015. — 688 с.

Работа поступила 13.12.2017г.

УДК 004.942

ОСОБЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ С ОВЗ ПО ЗРЕНИЮ ДИСЦИПЛИНАМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И КОМПЬЮТЕРНОГО ЦИКЛОВ НА ФАКУЛЬТЕТЕ «ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

В.В. Соколов, Е.Б.Червен-Водали, В.Б.Сидорова

Рассматриваются вопросы, связанные с решением задач организации и сопровождения образовательного процесса для студентов-инвалидов по зрению в МГППУ (факультет «Информационные технологии»). Описаны необходимые технические условия для успешной организации образовательного процесса по программам высшего образования.

The issues addressed in the article are aimed at solving the problems of organization and support of the educational process for students with disabilities and visualy impaired persons in the Moscow State University of Psychology and Education (Faculty of Information Technology), suitable technical conditions for the successful organization of the educational process in higher education programs is under consideration.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА
Понятия «лицо с ограниченными возможностями здоровья», понятие «лица с ОВЗ», категории лиц с нарушениями в развитии, техническое сопровождение учебного процесса, формы представления информации, определение контингента, особенности восприятия информации, методическое сопровождение учебного процесса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Организация образовательного процесса по программам высшего образования для лиц с ограниченными возможностями здоровья направлены на создание условий, обеспечивающих получения ими профессиональной подготовки и профессионального образования с учетом требований рынка труда и перспектив развития профессий, а также условий для их социальной адаптации и интеграции в общественную инфраструктуру.

В вузе для получения высшего образования основой являются Федеральные государственные образовательные стандарты (ФГОС). ФГОС представляет собой совокупность обязательных требований к высшему образованию, в том числе и для лиц с ограниченными возможностями здоровья. Для решения организации образовательного процесса для лиц с ограниченными возможностями здоровья необходимо выполнить следующие условия:

- разработка технологий обучения лиц с ограниченными возможностями здоровья (дополнительные индивидуальные занятия);
- использование технических средств сопровождения обучения в соответствии с (нарушением зрения) нозологией;

- осуществление методического сопровождения учебного процесса;
- создание системы психолого-педагогического сопровождения, профессионального становления лиц с ограниченными возможностями здоровья и их социально-профессиональной поддержки;
- создание безбарьерной архитектурной среды.

При таком подходе к обучению инвалидов они как профессионалы в дальнейшем могут быть конкурентоспособны на рынке труда.

Определение понятия «лицо с ограниченными возможностями здоровья»

Термин лицо с ограниченными возможностями здоровья появился в российском законодательстве сравнительно недавно. В соответствии с Федеральным законом от 30 июня 2007 г. № 120-ФЗ о внесении изменений в отдельные законодательные акты Российской Федерации по вопросу о гражданах с ограниченными возможностями здоровья, употребляемые в нормативных правовых актах слова «с отклонениями в развитии», … заменены термином «с ОВЗ». Так было введено в действие понятие «лицо с ОВЗ». Однако, законодатель при этом не дал четкого нормативного определения этого понятия. Это привело к тому, что этот термин воспринимался как равнозначный или близкий термину «инвалиды».

Необходимо специально отметить тот факт, что эти понятия не равнозначны. Наличие у человека правового статуса инвалида не означает необходимости создания для него дополнительных гарантий реализации права на образование. А лицо с ОВЗ, не будучи признанным в установленном законом порядке инвалидом, может иметь особые образовательные потребности. Они подразумевают, в т.ч. и возможность обучения в вузе по адаптированной образовательной программе.

Понятие «лица с ОВЗ» охватывает категорию лиц, жизнедеятельность которых характеризуется какими-либо ограничениями или отсутствием способности осуществлять деятельность способом или в рамках, считающихся нормальными для человека данного возраста.

Лица с ОВЗ - это люди, имеющие недостатки в физическом и (или) психическом развитии, имеющие значительные отклонения от нормального психического и физического развития, вызванные серьезными врожденными или приобретенными дефектами и в силу этого нуждающиеся в специальных условиях обучения и воспитания. К группе людей с ОВЗ относятся лица, состояние здоровья которых препятствует освоению ими всех или отдельных разделов образовательной программы вне специальных условий воспитания и обучения.

Понятие ограничения рассматривается с разных точек зрения и соответственно по-разному обозначается в разных профессиональных сферах, имеющих отношение к человеку с нарушенным развитием: в медицине, социологии, сфере социального права, педагогике, психологии. В соответствии с этим, понятие «лицо с ОВЗ» позволяет рассматривать данную категорию лиц как имеющих функциональные ограничения, неспособных к какой-либо деятельности в результате заболевания, отклонений или недостатков развития, нетипичного состояния здоровья, вследствие неадаптированности внешней среды к основным нуждам индивида, из-за негативных стереотипов, предрассудков, выделяющих нетипичных людей в социокультурной системе.

Различают следующие категории лиц с нарушениями в развитии:

1) лица с нарушениями зрения (слепые, слабовидящие);
2) лица с нарушениями слуха (глухие, слабослышащие, позднооглохшие);
3) лица с нарушениями речи;
4) лица с нарушениями интеллекта (умственно отсталые дети);
5) лица с задержкой психического развития (ЗПР);
6) лица с нарушениями опорно-двигательного аппарата (ДЦП);
7) лица с нарушениями эмоционально-волевой сферы;

8) лица с множественными нарушениями (сочетание 2-х или 3-х нарушений).

Вопросы, рассматриваемые в статье, ориентированы на решение задач организации образовательного процесса для студентов-инвалидов и лиц с ОВЗ по зрению в МГППУ (факультет «Информационные технологии»).

2. ТЕХНИЧЕСКОЕ СОПРОВОЖДЕНИЕ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Одним из требований Федерального образовательного стандарта высшего образования (ФГОС ВО) является то, что обучающиеся из лиц с ограниченными возможностями здоровья должны быть обеспечены печатными и (или) электронными образовательными ресурсами в формах, адаптированных к ограничениям из здоровья.

Компьютерные тифлотехнологии базируются на комплексе аппаратных и программных средств, обеспечивающих преобразование компьютерной информации в доступные для незрячих и слабовидящих формы (звуковое воспроизведение, рельефно-точечный или укрупненный текст), и позволяют им самостоятельно работать на обычном персональном компьютере с программами общего назначения. Тифлотехнические средства, используемые в учебном процессе студентов с нарушениями зрения, условно делятся на две группы: средства для усиления остаточного зрения и средства преобразования визуальной информации в аудио и тактильные сигналы. Для слабовидящих студентов в лекционных и учебных аудиториях необходимо предусмотреть возможность просмотра удаленных объектов (например, текста на доске или слайда на экране) при помощи видеоувеличителей для удаленного просмотра.

Изучение математических дисциплин для студентов с нарушением зрения сопряжено со значительными трудностями. При обучении дисциплинам из области математики основными являются визуальные источники информации - записи формул на доске, плоскопечатные учебники. Не имея возможности следить за записью преподавателя, незрячие студенты вынуждены воспринимать лекционный материал на слух. Конспектирование материала студенты ведут одновременно двумя доступными им способами: запись услышанного с помощью письменных принадлежностей по системе Брайля и ведение аудиозаписи происходящего в аудитории. Т. е. незрячие студенты полностью полагаются на речь преподавателя при получении лекционного материала. Громоздкость письменных принадлежностей и специфика записи по системе Брайля не позволяют вести хороших конспективных материалов. Это можно назвать рабочим черновиком, слабо способным помочь студенту при подготовке к экзамену или при выполнении домашнего задания. Следует отметить, что многие лекторы вообще не произносят все формулы, написанные на доске. В этом случае незрячий вообще лишен возможности записать материал лекции.

Темп письма по рельефно-точечной системе Брайля ниже, чем темп письма обычной авторучкой. Зрячие студенты имеют возможность проработать пройденный материал по учебникам, которые любая ВУЗовская библиотека имеет в достаточном количестве. Незрячие студенты лишены такой возможности. Хотя и существует учебная литература по высшей математике для незрячих, но это всего лишь несколько книг, изданных еще в СССР. В настоящее время в связи с высокой себестоимостью и трудоемкостью издания, математическая литература рельефно-точечным шрифтом не издается. Немногие, сохранившиеся до настоящего времени учебники можно взять только в специальных библиотеках для незрячих, ни один ВУЗ не может предоставить студентам с нарушением зрения учебную литературу в доступной форме.

Необходимо сделать информационную среду более доступной для студентов с нарушением зрения. Тем самым, будет внесен значительный вклад в расширение возможностей людей, имеющих проблемы со зрением. В дальнейшем, открытие новых возможностей для инвалидов отзовется новыми научными работами при участии этой категории граждан. Заинтересованность в улучшении условий и качестве обучения студентов с нарушением зрения способствует созданию современных методов адаптации текстовой и графической информации. Необходимо привлечь все современные технические средства для создания доступной информационной среды, которая является основой системы высшего образования.

3. ДОСТУПНЫЕ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ

Чтобы быть доступным для незрячего, материал может быть представлен в двух видах: рельефно-точечные записи шрифтом Брайля или аудиальной речевой информации. Существуют современные компьютерные технологии, позволяющие сканировать и озвучивать плоскопечатную информацию с помощью специализированного программного обеспечения. Но эти технологии не позволяют озвучить математические формулы, схемы, графики и любую другую не текстовую информацию. Таким образом они совершенно не подходят для студентов, изучающих математические дисциплины.

На факультете разработана технология изготовления учебно-методических комплексов для студентов со зрительными патологиями, слушающих курс математики. При разработке данной технологии были решены следующие задачи:

- исследование общих принципов записи математических выражений с помощью системы Брайля;
- оценка существующих программных средств подготовки математических текстов для печати на брайлевском принтере;
- разработка программного обеспечения для преобразования файлов в формате TEX в файлы для распечатки рельефно-точечным шрифтом Брайля и в файлы для чтения программой речевого доступа Jaws for Windows;
- использование брайлевского принтера для мелкотиражного производства материала, отпечатанного по системе Брайля;
- разработка программного обеспечения для навигации по аудио файлам;
- адаптация и разметка аудиозаписи для работы в режиме учебного пособия.

Таким образом, удалось разработать и внедрить технологию изготовления учебно-методических комплексов для студентов с нарушением зрения. Используя особенности издательской системы TEX данная технология позволяет подготовить в доступной для незрячего форме любые математические тексты. Используются обе доступные формы информации – рельефно-точечная и речевая. Причем преобразование в речевую форму может быть осуществлено как диктором, так и в автоматическом режиме с помощью программного синтезатора речи. Второй способ преобразования в речь, хотя гораздо быстрее и дешевле, но для конечного пользователя менее предпочтителен так, как синтезированная речь менее разборчива и гораздо больше утомляет слушателя.

Система LaTex и аналогии с системой Брайля

Tex – это компьютерная программа, созданная Дональдом Кнутом, предназначенная для верстки текста и математических формул. Кнут начал писать Tex в 1977 году. Tex, в том виде, в каком он используется сегодня, был выпущен в 1982 году и слегка улучшен с годами. Последние несколько лет Tex стал чрезвычайно стабилен. Кнут утверждает, что в нем практически нет ошибок.

LaTex – макропакет, позволяющий авторам верстать в печать их работы с высоким типографским качеством, при помощи заранее определенных, профессиональных макетов. LaTex подходит так же для создания книг содержащих большое количество математических формул и выражений. Первая версия была выпущена Лесли Лампортом в 1984 г. Пакет позволяет автоматизировать многие задачи набора текста и подготовки статей, включая набор текста на нескольких языках, нумерацию разделов и формул, перекрёстные ссылки, размещение иллюстраций и таблиц на странице, ведение библиографии и др. Кроме базового набора существует множество пакетов расширения LaTeX. Текущая версия — LaTeX2ε, после создания в 1994 году испытывала некоторый период нестабильности, окончившийся к концу 90-х годов, а в настоящее время стабилизировалась (хотя раз в год выходит новая версия).

Общий внешний вид документа в LaTeX определяется стилевым файлом. Существует несколько стандартных стилевых файлов для статей, книг, писем и т. д., кроме того, многие издательства и журналы предоставляют свои собственные стилевые файлы, что позволяет быстро оформить публикацию, соответствующую стандартам издания.

Между системой LaTex и системой Брайля есть много общего. Так, например, в системе LaTex есть специальные символы, которые имеют особое значение. Если ввести их в тексте напрямую, то они обычно не печатаются. Можно привести несколько примеров таких символов: «_» - нижний индекс, «^» - верхний индекс. В системе Брайля так же используются символы для обозначения верхних и нижних индексов. Есть и еще одно сходство, позволившее реализовать преобразование в систему Брайля. Информация в формате TEX представляется линейно, что упрощает процесс преобразования TEX-файлов в речь или файлы для печати рельефно-точечным шрифтом Брайля.

Система Брайля стала единственным способом записи текстовой информации на бумагу незрячими людьми. Запись математических формул с помощью системы Брайля – процесс более сложный в отличии от литературного текста. В настоящее время, при письме по системе Брайля сохранились принципы записи, сложившиеся и утверждённые комиссией Всероссийского Общества Слепых ещё в 70-х годах прошлого столетия. В те годы была выпущена книга «советская система обозначений для слепых по математике и другим естественным наукам». Разобраться человеку, не знакомому с принципами письма по системе брайля, в записи математических выражений очень сложно.

В основе записи многострочных и многоуровневых выражений, таких как дробь, интеграл, предел и др., лежит принцип линеаризации.

Письмо системой Брайля идёт по строго разграниченным строкам. Это связано с относительной ориентацией символов в тексте и удобством поиска следующего символа, что делает недопустимым смещение текста относительно оси строки вверх или вниз. Иначе говоря, читатель перемещает пальцы только в направлении слева на право по строке, чтобы перейти к следующему знаку, и, достигнув конца строки, переходит к началу следующей.

Построчная запись всего материала вынуждает незрячих переструктурировать принципы записи многих математических выражений. Тем не менее, упорядочив правила, мы имеем возможность получить аналоги всех математических выражений в рельефно-точечном шрифте Брайля.

Рассмотрим структуру любого математического выражения. Иначе говоря, представим его в виде составных частей. При записи авторучкой мы последовательно вырисовываем символы, составляющие это выражение. Любую математическую запись можно рассматривать как функцию с несколькими параметрами. Например, для задания дроби мы должны определить два параметра: числитель дроби и знаменатель дроби. Если оба параметра указаны, то данное выражение однозначно определено. Теперь указав общий синтаксис и порядок записи параметров для дробей, мы получим правило записи дробей. Можно провести аналогию с чтением дробей, ведь сначала читается числитель дроби, а затем знаменатель. Максимально сохраняя порядок чтения с порядком написания, мы установим очерёдность записи составляющих элементов математических выражений.

Учитывая вышесказанное, приходим к тому, что общий вид записи дроби по системе Брайля имеет следующий вид:

Сначала, записывается спецзнак, предупреждающий о том, что началась запись дроби. Далее в строчку, числитель дроби, затем специальный символ «дробной черты», а затем знаменатель. Запись дроби оканчивается опять же спецзнаком, говорящим о том, что дробь окончилась.

Тем самым, дробь записывается в одну строку, т. е. линеаризируется.

Это лишь немногое, что можно выделить из множества правил рельефно-точечной системы записи математических выражений. Многоуровневые выражения, такие как дроби, интегралы, выражения с показателем степени и т. п. невозможно записать так, как это можно записать в плоскопечатном виде. Все эти выражения записываются в строчку. Поддерживается только линейная запись.

Используя сходство системы TEX и рельефно-точечной системы Брайля на факультете информационных технологий МГППУ была создана программа TeXToBraille. Программа TeXToBraille (TeX в Брайль) принимает на вход файл, размеченный по правилам языка LaTeX. За основу синтаксиса взят язык, описанный в книге С. Львовского "Набор и верстка в пакете LaTeX". Используя словарь макросов, программа в результате обработки файла подставляет вместо макросов LaTeX описательные конструкции на русском языке, или формирует запись по правилам системы Брайля. В общем виде результат работы программы имеет вид: "Начало выражения ... вторая часть выражения ... третья часть выражения ... конец выражения" Более конкретный пример: выражение "\sqrt{x^2+y^2}" после обработки превращается в выражение: "Корень из x малое в степени 2 +y малое в степени два конец корня".

В случае описательных выражений на русском языке текст может быть прослушан с помощью программного синтезатора речи на персональном компьютере, в случае конвертации исходного файла LaTeX в синтаксис системы Брайля текст может быть распечатан на специальном принтере.

Система может использоваться в учебных учреждениях, в специализированных издательствах и библиотеках, частными лицами для подготовки учебных и научных материалов по разделам высшей математики для печати рельефным шрифтом Брайля с целью последующего использования их незрячими и слабовидящими школьниками, студентами, специалистами в ходе учебной или профессиональной деятельности.

Программа обрабатывает следующие выражения и формулы:

- интегралы;
- пределы;
- дробные выражения;
- верхние и нижние индексы;
- степени с различными показателями;
- корни.

Целесообразно, материалы конспективного плана производить по месту обучения с учётом специфики читаемого курса. Тем самым, будет достигнут максимальный эффект от мелкотиражного производства учебной и методической литературы. Изготовленные таким образом методические пособия позволят оперативно восполнить недостаток литературы, так необходимой незрячим студентам для подготовки к экзаменам.

Изучение математических текстов с помощью программы речевого доступа JAWS

При работе за компьютером у зрячего пользователя основным устройством вывода информации является монитор. Незрячий студент использует специальное программное обеспечение, осуществляющее озвучивание информации на экране компьютера. Эти программы позволяют контролировать информацию, вводимую с клавиатуры и выводимую на экран персонального IBM-совместимого компьютера в текстовом режиме. Это дает незрячему пользователю возможность работы с любыми программами различного назначения, например, с текстовыми и табличными процессорами, системами программирования.

Основные функции программ речевого доступа:

- озвучивание информации, вводимой с клавиатуры;
- автоматическое озвучивание текстовой информации, выводимой на экран другими программами;

- чтение фрагментов экрана по командам пользователя (символа, слова, строки, заданной области и т.д.) в процессе функционирования других прикладных и системных программ;
- отслеживание изменений на экране и оповещение о них пользователя;
- автоматическая загрузка конфигураций, приспособленных для работы с конкретной прикладной программой при ее запуске.

Незрячие пользователи, работающие с операционной системой Windows, используют одну из таких программ "JAWS for Windows". Это название составлено из первых букв фразы: job access with speech (доступ к рабочему месту с помощью речи). Требуемая информация озвучивается с помощью установленного синтезатора речи. Бывают как аппаратные, так и программные синтезаторы речи. Программные синтезаторы вытиснили аппаратные из-за удобства эксплуатации. Среди русских голосов большую популярность получил синтезатор "speaking mouse" ("говорящая мышь"). Главным преимуществом этого голоса является высокая скорость речи, что не маловажно при чтении текстов большого объёма. Качество речи оставляет желать лучшего, но возможность самостоятельно незрячему работать за компьютером открывает большие перспективы.

Компьютер применяется и в процессе обучения. Чтение учебной литературы с помощью синтезированной речи возмещает студенту недостающее звено восприятия информации. Чтение литературы математического курса требует дополнительных разработок для корректного построения речевых единиц.

Учебные материалы в аудио формате

Из доступных электронных материалов по математическим дисциплинам отметим документы формата LaTex. Озвучиванию подлежит код, содержащийся в файле с расширением tex. При чтении с помощью синтезатора для удобства восприятия сложных математических выражений требуется осуществить замену конструкций языка LaTex на их соответствующие описательные выражения.

Такую замену может осуществлять программа TeXToBraille. Рассмотрим вторую возможность данного конвертера. Программа получает на вход файл формата Tex. Конвертер, используя словарь для подстановок, создаёт на основе полученного файла текстовый файл, не содержащий элементов языка Tex.

Использование записей диктора для доступа к математической литературе

Как уже отмечалось, синтезированная речь менее разборчива и утомительна, но позволяет осуществлять навигацию по изучаемому материалу. Запись диктора гораздо лучше воспринимается слушателем, но не позволяет быстро найти нужный фрагмент текста. Для преодоления основного недостатка (отсутствия возможности навигации) учебных материалов, представленных в виде записей речи диктора, по заказу факультета информационных технологий была разработана программа Giper Sound. Программа состоит из двух модулей: модуль для разметки и модуль для воспроизведения размеченной книги.

Разметка говорящей книги заключается в том, что опытный слушатель (желательно специалист в предметной области, которой посвящена книга) в реальном времени прослушивает всю книгу и в определенных местах (на началах глав, разделов, параграфов, на более мелких заголовках) ставит закладки. Информация, хранящаяся в закладке, состоит из трех частей: имя закладки, имя файла и время от начала файла, с которого начинается важный звуковой фрагмент. Все закладки сохраняются в XML-файле, который после завершения всей разметки должен распространяться вместе с самой аудиокнигой. В процессе разметки закладки можно группировать, устанавливая иерархический порядок. Например, все закладки, относящиеся к параграфам первой главы, можно сгруппировать в раздел "Глава первая. *** *** ***". Закладки можно устанавливать не только на заголовки разделов книги, но и вообще на начало любого важного по смыслу фрагмента (например, формулы).

Модуль воспроизведения включает в себя плеер - для воспроизведения звуковых файлов и древовидный визуальный компонент - для отображения иерархической структуры закладок. Для работы второму модулю требуется наличие звуковых файлов в формате MP3 и XML-файл, созданных с помощью первого модуля.

Работа пользователя состоит из двух шагов: необходимо выбрать закладку с подходящим названием и запустить воспроизведение звука. Программа, пользуясь информацией из XML-файла, автоматически перейдет к нужному файлу и произведет смещение по времени внутри него. Книга будет звучать непрерывно до тех пор, пока пользователь не активирует другую закладку или не остановит воспроизведение.

"Говорящая книга" давно и успешно используется незрячими читателями-слушателями. При чтении (прослушивании) учебника, часто возникает необходимость оперативно ознакомиться с содержанием одного из предыдущих разделов. Иногда, например, при повторении материала, приходится конспективно прослушивать короткие фрагменты из нескольких разделов. Вообще, найдя нужный раздел по содержанию (содержание книги обычно записывается в начале или конце всей аудиокниги), надо перейти к началу самого раздела и начать слушать. Обычно любое из перечисленных действий занимает много времени. В настоящее время широкое распространение получил формат MP3 для компактного хранения звука. Несмотря на значительное преимущество компьютера (или аппаратного MP3-плеера), поиск фрагмента записи по-прежнему является достаточно длительным процессом. Для поиска приходится по очереди прослушивать несколько десятков MP3-файлов.

4. ДИСЦИПЛИНЫ ОБЛАСТИ ПРИКЛАДНОЙ ИНФОРМАТИКИ

На сегодняшний день незрячие и слабовидящие используют компьютер, как для учебы и работы, так и для отдыха: программируют, читают книги, слушают и сочиняют музыку. Для того чтобы компьютер мог служить средством реабилитации, необходимо оснастить его программами, обеспечивающими специальный интерфейс. Наиболее распространенные из них – синтезатор речи, программа экранного доступа для чтения экрана, программа оптического распознавания текста (со сканером).

Однако в любом случае слабовидящий сталкивается с проблемой обнаружения и опознания необходимой ему информации на экране дисплея, следовательно, успех или неудача его деятельности напрямую зависит от свойств пользовательского интерфейса.

Если интерфейс, как в операционной системе *Unix*, исходно представлен текстовыми строками, казалось бы, проблемы решаются не так сложно: текст можно озвучить специальной программой. Однако для ОС *Unix* как раз этого и нет! Под эту операционную систему в настоящее время разработано слишком мало специальных средств. При проведении занятий по основам администрирования ОС *Unix*, т.е. по работе с командной строкой, приходится сажать зрячего и незрячего студентов вместе, чтобы первый мог контролировать набор текста, поскольку второй вынужден все делать вслепую. Чтобы незрячий студент мог проанализировать результат своей деятельности, приходится специально ставить программу-клиент SecureCrt, записывающую сеанс работы в текстовый файл, а потом, озвучив в Windows этот текст, незрячий может «посмотреть», что он делал и какие результаты получил.

В современных средствах программирования и проектирования существенное значение имеет графическое представление информации, что ставит слушателей рассматриваемой категории в тяжелое положение. Нельзя сказать, что нет никаких средств для улучшения ситуации. Существует компонент «лупа», позволяющий увеличить фрагмент экрана, есть программы озвучивания текста. Однако этого недостаточно, да и сами компоненты неудовлетворительны. В частности, лупа занимает полосу экрана, что достаточно удобно для текста, но для представления графики лучше, если бы она увеличивала произвольную прямоугольную область. Изображение в ней состоит из квадратиков, символизирующих пиксели, что дробит изображение и делает его непонятным. Далее, такой популярный пакет как *Delphi* дает возможность создавать проекты с любым масштабом компонентов, но интерфейс среды разработки не масштабируется. То же самое можно сказать и о других инструментальных средствах.

Таким образом, для организации полноценного процесса совместного обучения и предоставления равных возможностей всем обучаемым независимо от того, в какой мере у них имеются проблемы по здоровью, необходимо решить целый ряд задач:

– выделение классов обучаемых с точки зрения ограничения возможностей и потребностей в специализированных средствах;
– определение специфики преподаваемых дисциплин с позиций их восприятия слабовидящими и незрячими;
– анализ и оценка опыта преподавания отдельных дисциплин с точки зрения соответствия результата обучения желаемому (вариант для сравнения – обучение аудитории без ограничения возможностей);
– анализ традиционных средств подачи учебной информации с точки зрения их применимости в обучении рассматриваемой категории;
– возможность реализации специфических потребностей аудитории наличными средствами (например, каким должен быть текст, чтобы он воспринимался на слух, как представлять схемы, как организовать элементы интерфейса компьютерного продукта для эффективной работы и др.);
– анализ потребностей аудитории в специфических средствах обучения;
– описание сформировавшихся принципов, методик и приемов обучения, показавших себя как эффективные;
– формулирования достигнутых результатов и постановки перспективных задач.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНТИНГЕНТА

Существуют разные степени потери зрения: абсолютная (тотальная) слепота на оба глаза, при которой полностью утрачиваются светоощущение и цветоразличение; практическая слепота, при которой сохраняется либо светоощущение, либо остаточное зрение, позволяющие в известной мере воспринимать свет, цвета, контуры и силуэты предметов.

По установленной классификации к слепым относятся лица, острота зрения которых находится в пределах от 0% до 0,04%. Таким образом, контингент слепых включает людей, полностью лишенных зрения (тотальные слепые) и обладающих остаточным зрением (с остротой зрения от светоощущения до 0,04%).

Люди с остротой зрения от 0,05% до 0,2% входят в категорию слабовидящих, и уже могут работать с помощью зрения при соблюдении определенных гигиенических требований.

Люди с пониженным зрением, или с пограничным зрением между слабовидением и нормой, - это лица с остротой зрения от 0,5 (50%) до 0,8 (80%) на лучше видящем глазу с коррекцией.

Проблема подачи сложного материала из области информатики на занятиях со слабовидящими студентами возникает в силу того, что они работают вместе с хорошо видящими. Это существенно, так как при раздельных занятиях, в условиях однородной аудитории, можно было бы как структуру курса, так и способ подачи адаптировать под конкретный контингент.

Незрячие

К этой категории пользователей будем относить тех, кто принципиально не способен к зрительному восприятию информации. С точки зрения обучения информатике, приходится рассчитывать лишь на слух и, в некоторых случаях, осязание.

Слабовидящих студентов, не имеющих возможности использовать зрение для восприятия учебной информации, тоже будем относить к этой категории. Отличие данной категории от полностью незрячих состоит лишь в возможности более свободно ориентироваться в реальной обстановке. С точки зрения проблем обучения они практически не отличаются от первых. Реально время от времени они могут пользоваться остатками зрения, но практически на методике обучения это не сказывается.

Здесь основным (и, кроме голоса, единственным) способом подачи информации становится электронный текст, а основным инструментом, позволяющим полноценно его воспринимать, – программы экранного доступа, среди которых одной из самых известных является *JAWS for Windows*, разработанная специально для семейства операционных систем *Windows*. При этом особенно стоит отметить три момента:

– основные разработки такого рода ориентированы на ОС Windows, хотя в настоящее время разрабатываются программы и под ОС Linux;

– эти инструменты обладают широкими возможностями, позволяющими воспринимать практически любой текст;

– с их помощью обучаемые достаточно свободно используют все формы электронного представления информации, сопровождаемые текстом, например, визуальные элементы интерфейсов используемых готовых программных приложений, компоненты визуальных сред разработки приложений (Delphi, C++ Builder) при разработке собственных приложений;

Незрячие студенты способны освоить курс программирования в визуальных системах Borland Delphi или Borland C++ Builder и создавать полноценные Windows-приложения при соблюдении определенных условий:

- при наличии специализированного программного обеспечения;
- при аудио записи лекций и наличии учебных пособий в электронном виде;
- более медленного темпа работы и, как следствие, большего объема самостоятельной работы.

Слабовидящие

К слабовидящим студентам будем относить тех, у которых наблюдаются нарушения различительной способности, глазодвигательной координации, цветоразличения, сужение границ поля зрения, что приводит к изменениям в процессах зрительного восприятия: фрагментарности, уменьшению объема усвояемого материала, прослушанному на лекции, и сокращению его содержания, замедлению темпа работы.

Слабовидящий может использовать, а может и не использовать специальные средства, но в любом случае он максимально пользуется имеющимся зрением. Не каждый человек, считающийся слабовидящим, в действительности нуждается в озвучивающих или других специальных программах. В некоторых случаях это становится скорее не физической, а психологической проблемой. Если у человека есть возможность продолжать обычное использование компьютера, он не всегда готов начать пользоваться специальным программным средством. Такой пользователь попадает в своеобразный замкнутый круг – с одной стороны личностные причины не позволяют ему отказаться от глаз, а с другой – ослабленное зрение нуждается в тщательной защите и поддержке, особенно при работе за компьютером. Центральную роль в этом должно сыграть программное обеспечение, разработанное для снижения нагрузки на зрение, но не отталкивающее от компьютера неэффективностью взаимодействия.

Для слабовидящих студентов подготовки всех материалов в электронном виде оказывается достаточно, особенно при использовании ими диктофонов и ноутбуков. В первом случае студент имеет «звуковой конспект» и возможность наложить его на электронный текст в режиме индивидуальной работы и при подготовке к занятиям и экзаменам, во втором – делать отметки в электронном тексте (например, путем выделений) непосредственно на лекциях и занятиях. Слабовидящие студенты используют иногда программы, увеличивающие фрагменты текста. Разумеется, это требует дополнительных усилий со стороны обучаемого, но результативность этих усилий представляется адекватной компенсацией ограничения возможностей. В целом работа с такими студентами не требует особых усилий, и по успешности обучения они не отличаются от обычной аудитории.

6. ОСОБЕННОСТИ ВОСПРИЯТИЯ ИНФОРМАЦИИ

Рассмотрим некоторые факторы, от которых зависит восприятие информации на экране компьютера. С точки зрения обычного пользователя они не имеют существенного значения, тогда как для слабовидящих могут стать решающими. В связи с этим перед разработчиком дополнительно встает задача учета этих особенностей.

Острота зрения. Фактор потери остроты зрения начинает действовать, когда численные характеристики зрения снижаются до определенных пределов. Острота зрения определяет ряд ограничений: большой размер элементов управления, четкий курсор, четкие границы между элементами.

Поле зрения. Слабовидящий пользователь может сравнительно хорошо распознавать текст и графику, но иметь узкое поле зрения. Интерфейс должен обеспечивать возможность работы в ограниченной области экрана. Работа с отдельными окнами должна быть похожа на работу в одном окне, в котором меняется содержимое. Несколько связанных с помощью меню окон лучше, чем разбросанные по экрану логически связанные диалоги.

По стилю взаимодействия с пользователем диалоговые окна делятся на модальные, которые не допускают перехода в другое окно без закрытия текущего, и немодальные. В настоящее время существует тенденция к преимущественному использованию немодальных окон, но при ограниченном поле зрения, учитывая сложность запоминания текущей деятельности, модальные окна представляются более удобными. Появление на экране немодального окна не приостанавливает работу пользователя, что может вызвать проблемы у пользователя, не увидевшего или не успевшего увидеть открывшееся окно. Кроме того, при работе с модальным окном любая попытка использования элемента, не принадлежащего этому окну, приведет к звуковому сигналу. Это заставит пользователя заняться поиском «потерянного» элемента.

В программах нередко используются диалоговые окна, представляющие собой немодальную полосу в левой или правой части экрана, на которой расположены элементы управления (рис. 1.). Появления такого окна не сопровождается сигналом, внимание пользователя на появившееся окно никак не обращается. В такой ситуации возможна существенная потеря времени, так как пользователь будет либо ждать появления окна, либо вообще не подозревать о его появлении.

Таким образом, каждое действие пользователя, будь то выбор пункта меню, нажатие на кнопку, закрытие программы и т.п., должно сопровождаться ожидаемым событием в одной и той же области экрана.

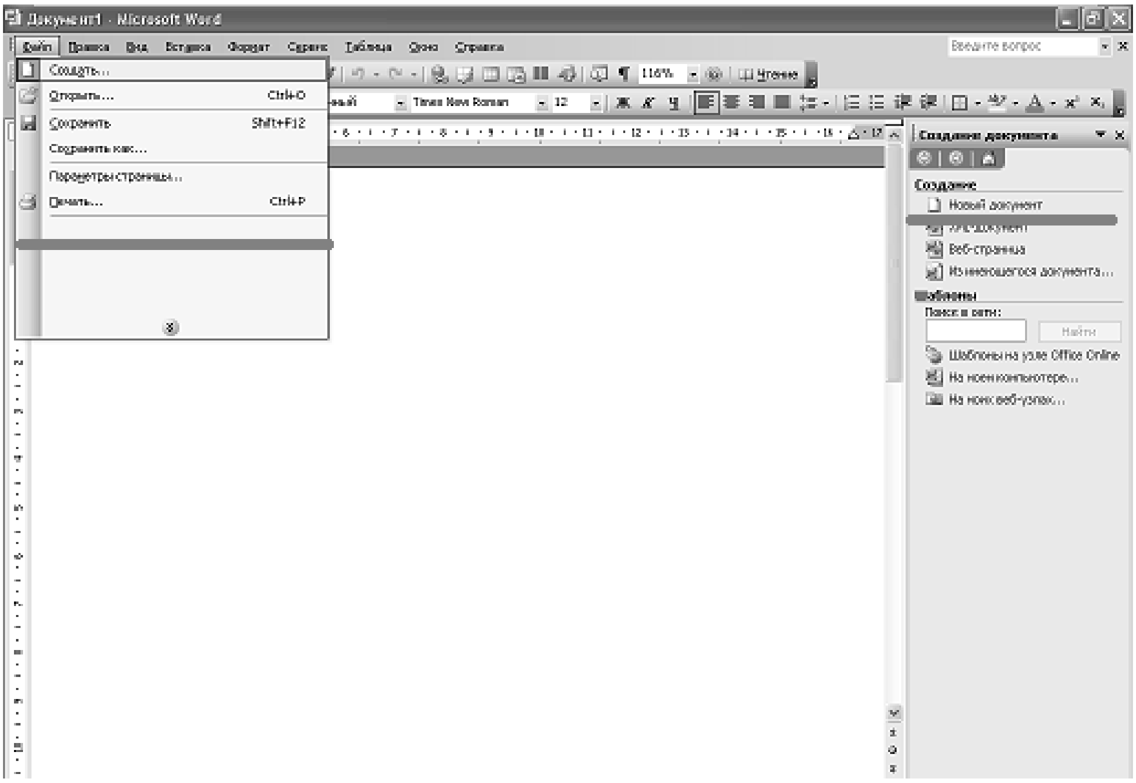


Рис. 1. Пример немодального окна в противоположной области экрана

Фокус внимания. При работе за компьютером довольно значительное время тратится на отвлекающие факторы, например, требуется посмотреть на бумажный документ. В это время пользователь теряет зрительную связь с местом на экране, с которым он работает. Для возвращения внимания необходимо делать по возможности более заметными текущие указатели: курсоры мыши и ввода, позицию таблицы и т.п.

В ходе выполнения длительного процесса без вмешательства оператора слабовидящий пользователь отодвигается от экрана значительно дальше, чем обычно, и перестает различать даже сравнительно крупные детали интерфейса. Поэтому необходима индикация хода выполнения и четкое отображение, а лучше звуковой сигнал, завершения процесса. Это требование можно выполнить при помощи контрастной полосы, отображающей выполнение процесса. Полоса должна находиться в центре экрана или в той области, где происходила предшествующая работа пользователя. При этом графический сигнал окончания процесса также должен быть контрастным и располагаться в той же области (рис. 2).

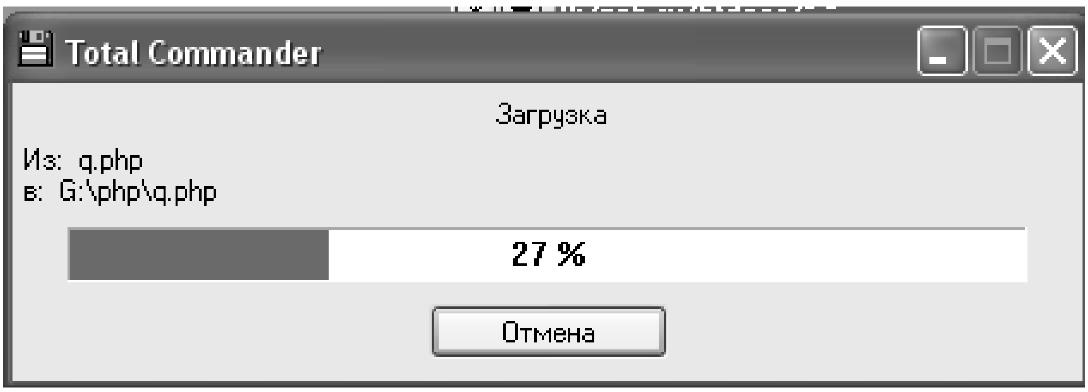


Рис. 2. Пример достаточно контрастной индикации хода выполнения

Опыт преподавания

Универсальным способом частичной компенсации ограничений представляется подготовка всех материалов в электронном виде. Именно так в большинстве случаев материалы всех курсов выдаются обучаемым на лекциях и семинарах; для обеспечения свободного доступа они также представлены в Интернете в виде отдельных небольших сайтов.

Методическое сопровождение учебного процесса

Необходимым компонентом системы сопровождения учебы инвалидов является и методическая работа. Это, прежде всего, содействие персональному обеспечению студентов-инвалидов учебно-методическими материалами по дисциплинам учебного плана. Факультет проводит работу по организации дополнительных консультации, контроль и помощь в обеспечении методической литературой, доступ в Интернет. Кроме этого, учебные и методические материалы необходимо переводить на аудио-, видео- и электронные носители, обучать студентов пользоваться ими, помогать в этом. Целесообразно создавать банк обучающих мультимедийных программ и разрабатывать методики их использования, применять методики дистанционного обучения. Большая работа требуется для овладения и использования специальных компьютерных методик, компенсирующих дефекты зрения.

В качестве механизма, компенсирующего недостатки зрительного восприятия, у слабовидящих лиц выступают слуховое и осязательное восприятия. Лица с нарушениями зрения уступают лицам с нормальным зрением в точности и оценке движений, степени мышечного напряжения в процессе освоения и выполнения заданий. Ограниченность информации, получаемой слабовидящими, обусловливает схематизм зрительного образа, его скудность; нарушение целостности восприятия, когда в образе объекта отсутствуют не только второстепенные, но и определяющие детали, что ведет к фрагментарности или неточности образа. При слабовидении страдает скорость зрительного восприятия; нарушение бинокулярного зрения (полноценного видения двумя глазами) у слабовидящих может приводить к так называемой пространственной слепоте (нарушению восприятия перспективы и глубины пространства), что важно при черчении и чтении чертежей. При зрительной работе у слабовидящих быстро наступает утомление, что снижает их работоспособность. Поэтому необходимо проводить небольшие перерывы. Слабовидящим могут быть противопоказаны многие обычные действия, например, наклоны, резкие прыжки, поднятие тяжестей, так как они могут способствовать ухудшению зрения.

Для усвоения информации слабовидящим требуется большее количество повторений и тренировок. При проведении занятий следует учитывать значение слуха в необходимости пространственной ориентации, которая требует локализовать источники звуков, что способствует развитию слуховой чувствительности. У лиц с нарушениями зрения при проведении занятий в условиях повышенного уровня шума, вибрации, длительных звуковых воздействий, может развиться чувство усталости слухового анализатора и дезориентации в пространстве.

При лекционной форме занятий слабовидящим следует разрешить использовать звукозаписывающие устройства и компьютеры, как способ конспектирования, во время занятий. Информацию необходимо представлять исходя из специфики слабовидящего студента: крупный шрифт (16 –18 размер), дисковый накопитель (чтобы прочитать с помощью компьютера со звуковой программой), аудиофайлы.

Всѐ записанное на доске должно быть озвучено. Необходимо комментировать свои жесты и надписи на доске и передавать словами то, что часто выражается мимикой и жестами. При чтении вслух необходимо сначала предупредить об этом. Не следует заменять чтение пересказом. В построении предложений не нужно использовать расплывчатых определений и описаний, которые обычно сопровождаются жестами, выражений вроде: «предмет находится где-то там, на столе, это поблизости от вас...». Старайтесь быть точным: «Предмет справа от вас».

При работе со слабовидящими возможно использование сети Интернет, подачи материала на принципах мультимедиа, использование «on-line» семинаров и консультаций, консультаций в режиме «off-line» посредством электронной почты. При работе на компьютере следует использовать принцип максимального снижения зрительных нагрузок. Для этого нужно обеспечить:

– подбор индивидуальных настроек экрана монитора в зависимости от диагноза зрительного заболевания и от индивидуальных особенностей восприятия визуальной информации;

– дозирование и чередование зрительных нагрузок с другими видами деятельности;

– использование специальных программных средств для увеличения изображения на экране или для озвучивания информации;

– принцип работы с помощью клавиатуры, а не с помощью мыши, в том числе с использованием «горячих» клавиш и освоение слепого десятипальцевого метода печати на клавиатуре.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Специфика профессионального обучения студентов с нарушением зрения состоит в ограничении доступа к информации. Отсутствие возможности самостоятельного чтения учебной литературы, восприятия информации с доски или экрана проектора, существенно затрудняют для незрячих студентов процесс обучения в вузе.

Основная задача при организации учебного процесса для студентов с нарушением зрения состоит в необходимости снизить дефицит информации и, тем самым, сделать процесс обучения доступным для них.

Для этого необходимо организовать работу по следующим направлениям:

1. Основой любого обучения незрячих (а в особенности обучения математическим дисциплинам) является рельефно-точечная система Брайля. Необходимо создать, постоянно пополнять и обновлять библиотеку брайлевской литературы. Процесс подготовки брайлевской математической литературы очень долог и требует от редактора специальной подготовки.

2. Для изучения математических дисциплин крайне необходимы рисунки (геометрические чертежи, различные стандартные кривые, графики функций, области на комплексной плоскости, графы и т. п.). Важно сформировать у незрячего студента правильные геометрические представления об основных математических объектах. Для этого необходимо выбрать наиболее важные для обучения рисунки и на их основе создать постоянно пополняемый банк рельефно-графических пособий.

3. Т. к. длительность и трудоемкость подготовки и печати брайлевской книги не позволяют оперативно обеспечивать потребности студентов, необходимо развивать электронные формы представления информации – цифровая аудио запись и документы в формате TEX. При реализации этого направления необходимо учитывать методику начитывания математической литературы.

4. Для обеспечения возможности самостоятельной работы слабовидящим и слепым студентам необходимо специальное обслуживание компьютеров, используемых в процессе обучения – установка и поддержание в рабочем состоянии программ речевого доступа, разработка скриптов для работы с прикладным программным обеспечением, а так же адаптация интерфейсов и разработка специального программного обеспечения.

5. Необходима разработка методических рекомендаций для преподавателей, а так же повышение квалификации сотрудников на соответствующих курсах, посвященных организации учебного процесса для студентов с нарушением зрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федеральный закон "Об образовании в РФ" от 29 декабря 2012 г. № 273-ФЗ.
2. Федеральный закон «О внесении изменений в статью 71 Федерального закона «Об образовании в Российской Федерации» от 1 мая 2017 года №93-ФЗ.
3. Федеральный закон «О внесении изменений в отдельные законодательные акты Российской Федерации по вопросам социальной защиты инвалидов в связи с ратификацией Конвенции о правах инвалидов» от 1 декабря 2014 года № 419-ФЗ.
4. Постановление Правительства Российской Федерации от 17 марта 2011 г. N 175 г. Москва "О государственной программе Российской Федерации "Доступная среда" на 2011-2015 годы"
5. Приказ Минобрнауки от 16.04.2014 г. № 05-785 «О направлении методических рекомендаций по организации образовательного процесса для обучения инвалидов».
6. Методические рекомендации по организации образовательного процесса для обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья в образовательных организациях высшего образования, в том числе оснащенности образовательного процесса" (утв. Минобрнауки России 08.04.2014 N АК-44/05вн)..

Работа поступила 12.12.2017г.

УДК 004.942

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ВЫПОЛНЕНИЯ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

П. Н. Думин, С. Н. Антипова

Представлены особенности практического применения подхода к вероятностному моделированию процесса выполнения тестовых заданий на примере тестов на рабочую память. Данный подход позволяет учитывать динамику способностей испытуемых и трудностей заданий во время их выполнения. Для построения количественных оценок вводится модифицированная функция Раша, аргументы которой, в отличие от классического варианта, задаются в вероятностной шкале. Рассмотрены способы идентификации представленных расчётных зависимостей с использованием результатов прохождения тестов на рабочую память.

Features of practical application of the approach to probabilistic modeling of the process of performing test tasks on the example of tests for working memory are presented. This approach allows you to take into account the dynamics of the abilities of the subjects and the difficulties of tasks during their execution. To construct quantitative estimates, we introduce a modified Rush function whose arguments, unlike the classical variant, are given in a probability scale. The ways of identifying the presented calculated dependencies using the results of passing the tests for working memory are considered.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА
Тестирование, функция раша, вероятностное моделирование.

1. ВВЕДЕНИЕ

Компьютерное тестирование в настоящее время активно применяется в различных областях деятельности человека, решая различные задачи. Благодаря компьютерному тестированию повышаются информационные возможности процесса контроля, появляется возможность сбора дополнительных данных о динамике прохождения теста отдельными испытуемыми.

Основные преимущества компьютерного тестирования – высокая точность обработки, обеспечение одинаковых условий тестирования для испытуемых, контроль процедуры тестирования, при необходимости может быть фиксация времени каждого ответа, что особенно важно для тестов на интеллект, объективность тестирования, хранение и представление результатов тестирования, автоматизированная обработка.

Компьютерное тестирование позволяет формировать большое количество вариантов теста, используя банк тестовых заданий; создавать тесты, соответствующие различным уровням подготовленности испытуемых; управлять как содержанием теста, так и стратегией проверок в ходе тестирования; вводить временные ограничения на выполнение тестовых заданий или проводить временное отслеживание процесса тестирования, что позволяет учитывать результаты тестирования для последующих проведений тестов. Качество тестирования и достоверность его результатов в значительной степени зависят от технологий проведения тестов, которые в последние десятилетия стали предметом активных научных исследований.

В настоящее время доминирующим подходом в этой области является использование технологий, построенных на базе так называемой современной теории тестирования (*Item Response Theory – IRT*), основанной на латентно-структурном анализе (Rasch, G., 1960/1980; Baker F.B., 2001; Тюменева Ю.А., 2007; Шмелев А.Г., 2013). Основная концепция данного подхода, предложенного Г. Рашем в 1960 году, предполагает, что вероятность правильного ответа на задание определяется разностью уровня способностей или знаний и трудности теста. В зависимости от условий прикладной задачи на практике используются и другие, более сложные модели, построенные на базе данной концепции (Rasch, G., 1960/1980; Wright B.D., Masters G.N., 1982; Wright B.D., Stone M.N., 1979).

Применение технологии IRT приводит к следующим проблемам:

- «статичность» оценок: игнорирование того факта, что результат тестирования вследствие усталости испытуемых и других факторов может, вообще говоря, существенно изменяться со временем, принимая различные значения в процессе сеанса тестирования;
- невозможность учёта времени, затрачиваемого на решение тестовых задач, при построении расчётных оценок;
- необходимость выполнения достаточно большого числа заданий для получения оценок с приемлемой точностью;
- сравнительно сложная для практической реализации процедура оценки точности результата, связанная с применением метода максимального правдоподобия и расчётом доверительных интервалов.

Указанные проблемы сделали актуальными поиск и разработку новых принципов построения технологий тестирования. Одним из наиболее перспективных результатов в этой области стал новый подход (Куравский Л.С., Марголис А.А., Мармалюк П.А., Юрьев Г.А., Думин П.Н., 2000-2014), построенный на использовании обучаемых структур в форме марковских моделей с дискретным и непрерывным временем. Его особенностями, обеспечивающими преимущества перед аналогичными способами тестирования, являются:

- выявление и использование при построении расчётных оценок временной динамики изменения способности справляться с заданиями теста;
- возможность учёта при построении расчётных оценок времени, затрачиваемого на решение тестовых задач;
- возможность исследования временной динамики знаний или способностей, как в дискретной, так и в непрерывной временной шкале;
- меньшее по сравнению с другими подходами число заданий, которое следует предъявлять испытуемому для получения оценок знаний или способностей с заданной точностью, что ускоряет процесс тестирования;
- получение распределения вероятностей возможных результатов теста в качестве конечного результата;
- развитая техника идентификации параметров моделей.

На основе рассмотренных выше технологий тестирования были разработаны системы поддержки принятия решений (Куравский Л.С., Марголис А.А., Мармалюк П.А., Юрьев Г.А., Думин П.Н., 2013; Панфилова А.С., 2013; Марковские модели: уч. пособие, 2013), которые ускоряют процесс тестирования, оптимизируя предъявление тестовых заданий. Диагностические выводы строятся на основе уточняющихся в процессе тестирования вероятностных оценок принадлежности испытуемых к различным категориям. Подобные инструменты дают практикующему специалисту дополнительную информацию для анализа и, в случае марковских моделей, предоставляют рекомендации по выбору следующего теста, обладающего, по сравнению с прочими, наибольшей для данного испытуемого дифференцирующей способностью.

Все рассмотренные выше технологии тестирования объединяет общий признак: итоговые оценки, как правило, определяются только по формальным результатам прохождения тестовых заданий, предъявляемых испытуемому, без учёта изменений в процессе их выполнения когнитивных способностей и психофизиологического состояния человека. Это существенно ограничивает возможности измерительной процедуры.

Чтобы решить эту проблему, предложен подход к вероятностному моделированию процесса прохождения тестов, позволяющий учесть динамику способностей испытуемых и трудностей заданий во время их выполнения, при этом используется модифицированная функция Раша, аргументы которой, в отличие от классического варианта, задаются в вероятностной шкале. Внедрение нового подхода в практику компьютерного тестирования требует исследования особенностей его практического применения на конкретных примерах, а, в частности, этот подход был применен на результатах тестов на рабочую память.

Был решен ряд задач:

– адаптировать вероятностную модель и методы моделирования процесса выполнения заданий для тестирования рабочей памяти;
– реализовать указанную модель и методы в одной из современных сред программирования;
– идентифицировать созданную модель по результатам прохождения теста на рабочую память;
– провести анализ полученных зависимостей;
– определить оптимальное время, которое следует отводить для выполнения заданий теста на рабочую память.

Кроме того, актуальной для практических приложений рассматриваемого подхода задачей является проверка следующих *гипотез*:

– результаты теста не зависят от уровня подготовки испытуемых;
– результаты теста не зависят от фактора пола.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЫПОЛНЕНИЯ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И МЕТОД

Определим величины, необходимые для представления процесса выполнения задания. Для этого рассмотрим конечные генеральные совокупности заданий I и испытуемых J, состоящие, соответственно, из N и M элементов. Пусть $p_{ij}(t)$ есть вероятность того, что j-й испытуемый выполнит i-е задание до момента времени t включительно; $v_i(t)$ есть вероятность того, что произвольно выбранный испытуемый не выполнит i-е задание до момента времени t включительно при условии, что все испытуемые из генеральной совокупности J имеют равную вероятность быть выбранными; $u_j(t)$ есть вероятность того, что j-й испытуемый выполнит произвольно выбранное задание до момента времени t включительно при условии, что все задания из генеральной совокупности I имеют равную вероятность быть выбранными. Величины $v_i(t)$ и $u_j(t)$ рассматриваются, соответственно, как *меры трудности* i-го задания и *способностей* j-го испытуемого.

Пусть τ есть продолжительность малого минимального интервала времени, в течение которого возможно выполнение задания. Эта величина является параметром исследуемой системы тестовых заданий. Тогда, рассматривая полную систему из двух событий $\mathrm{A_j}$ и $\overline{\mathrm{A}}_\mathrm{j}$, где $\mathrm{A_j}$ есть наличие выполненного j-го задания в момент времени t, и используя формулу полной вероятности, вероятность $p_{ij}(t)$ того, что j-й испытуемый выполнит i-е задание до момента времени t+τ включительно, выражается следующим образом:

$$p_{ij}(t+\tau)=p_{ij}(t)r_p+\left(1-p_{ij}\ (t)\right)L(u_j(t)-v_i(t),a_\tau,b_\tau),$$

где $p_{ij}\ (0)=0$; r_p есть вероятность не найти ошибку в представленном ранее к моменту t решении в течение интервала времени $[t;t+\tau]$; функция $L(u_j(t)-v_i(t),a_\tau,b_\tau)$ выражает вероятность выполнения задания в течение интервала времени $[t;t+\tau]$ при условии, что в момент времени t задание не выполнено; a_τ и b_τ – параметры, идентифицируемые по результатам наблюдений.

Функция L зависит от разности мер способностей испытуемого $u_j(t)$ и трудности задания $v_i(t)$, а также некоторых параметров, обусловленных величиной τ. В качестве аппроксимации этой функции целесообразно использовать *модифицированную функцию Раша* (Rasch, G, 1980) следующего вида:

$$L\left(u_j(t)-v_i(t),a_\tau,b_\tau\right)=\frac{e^{a_\tau(u_j(t)-v_i(t)-b_\tau)}}{1+e^{a_\tau(u_j(t)-v_i(t)-b_\tau)}}=\frac{1}{1+e^{a_\tau(v_i(t)-u_j(t)+b_\tau)}}.$$

Модифицированная функция Раша представлена логистической функцией. Её отличие от классической функции Раша состоит в том, что рассматривается вероятностная шкала (в случае классического подхода используется шкала логитов; вид классической функции Раша: $\mathrm{P}(u,v)=\frac{e^{1,7(u-v)}}{1+e^{1,7(u-v)}}$).

Выбор указанной аппроксимации обусловлен её асимптотическими свойствами: при существенном превышении уровня трудности уровнем способностей вероятность выполнения задания стремится к единице, а в случае обратного соотношения – к нулю.

Пусть $v_i^*(t)=1-v_i(t)$ есть вероятность того, что произвольно выбранный испытуемый выполнит i-е задание до момента времени t включительно при условии, что все испытуемые из генеральной совокупности J имеют равную вероятность быть выбранными. Тогда, рассматривая полную систему из двух событий B_i и $\overline{\mathrm{B}}_\mathrm{i}$, где B_i есть наличие выполненного i-го задания в момент времени t, и используя формулу полной вероятности, величина $v_i^*(t+\tau)$ выражается следующим образом:

$$v_i^*(t+\tau)=v_i^*(t)r_v+\left(1-v_i^*(t)\right)P_{v,i}(a_\tau,b_\tau,t),$$

где величина r_v аналогична r_p и представляет вероятность не найти ошибку в представленном ранее к моменту t результате выполнения соответствующего задания в течение интервала времени $[t;t+\tau]$, $P_{v,i}(a_\tau,b_\tau,t)$ есть вероятность выполнения произвольно выбранным испытуемым i-го задания в течение интервала времени $[t;t+\tau]$.

Используя формулу полной вероятности, величину $P_{v,i}$ можно выразить через функцию L:

$$P_{v,i}(a_\tau,b_\tau,t)=\sum_{j=1}^{M}p_{v,j}L\left(u_j(t)-v_i(t),a_\tau,b_\tau\right),$$

где $p_{v,j}$ есть вероятность выбора j-го испытуемого. Поскольку все испытуемые имеют равную вероятность быть выбранными, то $p_{v,j}=\frac{1}{M}$, а

$$P_{v,i}(a_\tau,b_\tau,t)=\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}L\left(u_j(t)-v_i(t),a_\tau,b_\tau\right).$$

Рассуждая аналогично, несложно выразить $u_j(t+\tau)$:

$$u_j(t+\tau)=u_j(t)r_u+\left(1-u_j(t)\right)P_{u,j}(a_\tau,b_\tau,t),$$

где величина r_u аналогична r_p и r_v, $P_{u,j}$ есть вероятность выполнения j-м испытуемым произвольно выбранного задания в течение интервала времени $[t; t+\tau]$. Как и в случае $P_{v,i}$, величину $P_{u,j}$ можно выразить через функцию L:

$$P_{u,j}(a_\tau, b_\tau, t) = \sum_{i=1}^{N} p_{u,i} L\big(u_j(t) - v_i(t), a_\tau, b_\tau\big),$$

где $p_{u,i}$ есть вероятность выбора i-го задания. Поскольку все задания имеют равную вероятность быть выбранными, то $p_{u,i} = \frac{1}{N}$, а

$$P_{u,j}(a_\tau, b_\tau, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} L\big(u_j(t) - v_i(t), a_\tau, b_\tau\big).$$

Таким образом, предположение об адекватности модифицированной функции Раша наблюдениям определяет следующие рекуррентные формулы для вычисления вероятностей $v_i^*(t)$, $u_j(t)$ и $p_{ij}(t)$ при $i = 1, \dots, N$ и $j = 1, \dots, M$ в дискретные моменты времени $\{k\tau\}_{k=1}^{\infty}$:

$$p_{ij}(t+\tau) = p_{ij}(t) r_p + \Big(1 - p_{ij}(t)\Big) L\big(u_j(t) - v_i(t), a_\tau, b_\tau\big),$$
$$v_i^*(t+\tau) = v_i^*(t) r_v + \frac{1}{M}\big(1 - v_i^*(t)\big) \sum_{j=1}^{M} L\big(u_j(t) - v_i(t), a_\tau, b_\tau\big),$$
$$u_j(t+\tau) = u_j(t) r_u + \frac{1}{N}\Big(1 - u_j(t)\Big) \sum_{i=1}^{N} L\big(u_j(t) - v_i(t), a_\tau, b_\tau\big), -$$

с начальными условиями $p_{ij}(\tau), v_i^*(\tau)$ и $u_j(\tau)$ и идентифицируемыми по результатам наблюдений параметрами a_τ, b_τ, r_p, r_v и r_u. Параметр τ задаётся заранее и является частью постановки задачи.

Вычисление значений функций $p_{i_0 j_0}(t)$ при фиксированных i_0 и j_0 в дискретные моменты времени $\{k\tau\}_{k=1}^{\infty}$ требует одновременного использования всех представленных выше рекуррентных формул для $v_i^*(t)$, $u_j(t)$ при $i = 1, \dots, N$ и $j = 1, \dots, M$, что является преодолимой проблемой при решении практических задач, включая прогнозирование и идентификацию. Однако, для упрощения расчётов, в определённые моменты времени целесообразно использовать предположение об *идеальности* генеральных совокупностей заданий I и испытуемых J. Назовём указанные генеральные совокупности *идеальными* в момент времени t, если в них в этот момент времени различные уровни способностей испытуемых и трудностей заданий представлены так, что $v_i(t) = \frac{i}{N}$, $u_j(t) = \frac{j}{M}$. В этом случае расчётные формулы для $p_{i_0 j_0}(t)$ используют только функции $v_{i_0}^*(t)$и $u_{j_0}(t)$, приобретая простой вид автономной системы из трёх уравнений:

$$p_{i_0 j_0}(t+\tau) = p_{i_0 j_0}(t) r_p + \Big(1 - p_{i_0 j_0}(t)\Big) L\big(u_{j_0}(t) - v_{i_0}(t), a_\tau, b_\tau\big),$$
$$v_{i_0}^*(t+\tau) = v_{i_0}^*(t) r_v + \frac{1}{M}\Big(1 - v_{i_0}^*(t)\Big) \sum_{j=1}^{M} L\left(\frac{j}{M} - v_{i_0}(t), a_\tau, b_\tau\right),$$
$$u_{j_0}(t+\tau) = u_{j_0}(t) r_u + \frac{1}{N}\Big(1 - u_{j_0}(t)\Big) \sum_{i=1}^{N} L\left(u_{j_0}(t) - \frac{i}{N}, a_\tau, b_\tau\right).$$

Полагая τ малым параметром и используя приближения Тейлора:

$$p_{ij}(t+\tau) = p_{ij}(t) + \frac{dp_{ij}(t)}{dt}\tau + o(\tau),$$
$$v_i^*(t+\tau) = v_i^*(t) + \frac{dv_i^*(t)}{dt}\tau + o(\tau),$$
$$u_j(t+\tau) = u_j(t) + \frac{du_j(t)}{dt}\tau + o(\tau), -$$

указанные выше соотношения с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $o(\tau)$, можно преобразовать в следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая интегрируется подходящими численными методами:

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \frac{1}{\tau}\Big[p_{ij}(t)(r_p - 1) + \Big(1 - p_{ij}\,(t)\Big)L\big(u_j(t) - v_i(t), a_\tau, b_\tau\big)\Big],$$
$$\frac{dv_i^*(t)}{dt} = \frac{1}{\tau}\Big[v_i^*(t)(r_v - 1) + \frac{1}{M}\big(1 - v_i^*(t)\big)\sum_{j=1}^{M} L\big(u_j(t) - v_i(t), a_\tau, b_\tau\big)\Big],$$
$$\frac{du_j(t)}{dt} = \frac{1}{\tau}\Big[u_j(t)(r_u - 1) + \frac{1}{N}\Big(1 - u_j(t)\Big)\sum_{i=1}^{N} L\big(u_j(t) - v_i(t), a_\tau, b_\tau\big)\Big], -$$

с начальными условиями $p_{ij}(0), v_i^*(0)$ и $u_j(0)$ и идентифицируемыми по результатам наблюдений параметрами a_τ, b_τ, r_p, r_v и r_u. С целью уменьшения числа интегрируемых уравнений, к этой системе может быть применено указанное выше упрощение.

При решении практических задач, использование рекуррентных формул для дискретных моментов времени является предпочтительным, однако, если задача предполагает применение только модели с непрерывным временем, динамика вероятностей может прогнозироваться с помощью приведённых выше дифференциальных уравнений.

3. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ РЕКУРРЕНТНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Данными наблюдений, по которым идентифицируются параметры рекуррентных зависимостей a_τ, b_τ, r_p, r_v и r_u, являются *матрицы ответов*, определяемые для заданных контрольных моментов времени по результатам выполнения корректно подготовленных наборов тестовых заданий репрезентативными группами испытуемых. Каждая из этих матриц представляют собой прямоугольную таблицу, на пересечении k-й строки и l-го столбца которой находится единица, если k-й испытуемый выполнил l-е задание к моменту времени t, которому соответствует рассматриваемая таблица, и нуль – в противном случае. Вычисление для каждой строки и столбца отношения числа содержащихся в них единиц к общему количеству столбцов или строк в матрице ответов определяет выборочные оценки вероятностей $u_j(t)$ и $v_i^*(t)$, соответственно.

Эти оценки вероятностей позволяют идентифицировать параметры a_τ, b_τ, r_p, r_v и r_u (как правило, для упрощения задачи можно полагать, что $r_p = r_v = r_u = r$). Используя представленное выше упрощающее предположение об идеальности генеральных совокупностей заданий I и испытуемых J, параметры a_τ, b_τ и r целесообразно идентифицировать для каждой пары вероятностей $u_j(t)$ и $v_i^*(t)$, где $i \in \{1, \dots, N\}$ и $j \in \{1, \dots, M\}$, автономно. Идентифицированные параметры, которые можно обозначить как $a_{\tau,ij}, b_{\tau,ij}$ и r_{ij}, используются для вычисления функций $u_j(t), v_i^*(t)$ и $p_{ij}(t)$ в заданные моменты времени с помощью определённых выше рекуррентных зависимостей или дифференциальных уравнений (очевидно, что параметры $a_{\tau,ij}, b_{\tau,ij}$ и r_{ij} для рекуррентных зависимостей и дифференциальных уравнений идентифицируются отдельно и, в общем случае, должны различаться). Очевидно, что идентификация без привязки к i и j даёт менее точные результаты.

Оценки наших идентифицируемых параметров могут быть определены, опираясь на критерий, характеризующий меру соответствия прогнозируемым значениям ций $v_i^*(t_k)$ и $u_j(t_k)$ в контрольные моменты времени $\{t_k\}_{k=1}^{K}$ наблюдаемых оценок, представляющих распределения по заданному подмножеству генеральной совокупности заданий $I_0 \in I$ объёмом N_0 количеств испытуемых $F_i(t_k)$, успешно выполнивших i-е задания, и распределения по заданному подмножеству генеральной совокупности испытуемых $J_0 \in J$ объёмом M_0 количеств заданий $Q_j(t_k)$, успешно выполненных j-ми испытуемыми. В качестве такого критерия используется *статистика Пирсона*

$$X^2 = \sum_{k=1}^{K}\left[\sum_{i=1}^{N_0}\frac{(F_i(t_k) - v_i^*(t_k)N_0\,)^2}{v_i^*(t_k)N_0} + \sum_{j=1}^{M_0}\frac{\left(Q_j(t_k) - u_j(t_k)M_0\,\right)^2}{u_j(t_k)M_0}\right].$$

Величина X^2 является мерой соответствия в том смысле, что ее большие значения означают плохое согласование прогнозируемых и наблюдаемых данных, а малые значения – хорошее согласование. Таким образом, решение задачи идентификации сводится к нахождению таких параметров a_τ, b_τ и r, которые обеспечивают минимальное значение указанного критерия, что обеспечивается выполнением численной процедуры многомерной нелинейной оптимизации (Kuravsky L.S., Marmalyuk P.A., Yuryev G.A., Dumin P.N., 2015).

Приведённый выше способ идентификации называется *методом минимума* χ^2 (Куравский Л.С., Баранов С.Н., Юрьев Г.А., 2011). Согласно теореме Крамера (Cramer, H.,1999), при выполнении ряда общих условий, в случае адекватности прогнозируемых процессов наблюдениям, рассмотренная задача имеет единственное решение, которое сходится по вероятности к искомому решению, а значения статистики X^2 асимптотически описываются распределением χ^2 с $K(N_0\ +\ M_0\ ) - \gamma - 1$ степенями свободы, где γ – число идентифицируемых параметров. Это позволяет использовать приведённую выше статистику для проверки гипотезы о том, что прогнозируемые оценки согласуются с результатами наблюдений.

Использование статистики Пирсона корректно только при выполнении условий указанной выше теоремы. Если эти условия не выполнены, то вычисление оценок идентифицируемых параметров с использованием критерия X^2 остаётся возможным, однако полученное решение может быть не единственным, а значения соответствующей статистики не обязаны быть распределены как χ^2. Следует отметить, что одним из признаков нарушения условий теоремы является невыполнение неравенства $K(N_0\ +\ M_0\ ) > \gamma + 1$. В случае нарушения условий теоремы для оценки степени соответствия модели наблюдениям следует подобрать критерий, отличный от указанного выше. Один из таких критериев строится на основе представленного в работе (Kuravsky L.S., Marmalyuk P.A., Baranov S.N., Alkhimov V.I., Yuryev G.A., Artyukhina S.V.) анализа регрессионной зависимости между наблюдаемыми и прогнозируемыми оценками сравниваемых величин в контрольные моменты времени.

4. ОПИСАНИЕ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ: РАБОЧАЯ ПАМЯТЬ И ЕЁ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Память — это одна из психических функций и видов умственной деятельности, предназначенная сохранять, накапливать и воспроизводить информацию. Способность длительно хранить информацию о событиях внешнего мира и реакциях организма и многократно использовать её в сфере сознания для организации последующей деятельности.

Рабочая память – это вид памяти, который может одновременно оперировать несколькими элементами. Она отличается от других типов моментальным временем своего действия – она сразу же избавляется от ненужной переработанной информации. Это самый быстрый и часто используемый вид памяти, позволяющий решать мелкие повседневные задачи.

Например, рабочая память – это способность управлять и манипулировать запомненным: тасовать числа, складывать их, определять, четные они или нечетные, и т. д., а, если говорить о языке, то именно рабочая память позволяет нам не просто запоминать предложения, но и понимать их смысл и даже обдумывать, каких последствий стоит ждать после их произнесения. Рабочая память характеризует способность человека манипулировать информацией, хранящейся короткое время в его памяти. Такая манипуляция лежит в основе процессов мышления: рассуждения, обучения, понимания.

Для оценки рабочей памяти используются различные методики, любой человек может пройти такой тест. Хороший и правильный тест памяти, не просто дает какое-то значение результата, но и предлагает методику восстановления или улучшения памяти, исходя из полученных результатов.

Ученые пришли к выводу, что уровень интеллекта напрямую зависит от рабочей памяти. Весьма правдоподобно, что способность к решению интеллектуальных задач выше у тех людей, которые способны одновременно держать в голове большее число идей. Логические познавательные процессы также находятся в постоянной зависимости от ее состояния. Объем информации, который можно одновременно удерживать в голове, влияет непосредственно на способность делать умозаключения. Чем больше этот объем, тем логичней и быстрей будут умозаключения.

В область интеллекта проблема рабочей памяти была открыто внесена в статье П. Киллонена и Р. Кристала «Способность к рассуждению – это (немногим больше, чем) рабочая память». (Kyllonen, Christal, 1990) Авторами была разработана специальная серия тестов для измерения рабочей памяти. Она показала настолько высокие корреляции интеллекта и рабочей памяти, что, по мнению авторов, эти два понятия близки к тому, чтобы совпасть.

Различные авторы по-разному трактуют механизмы, стоящие за задачами на рабочую память. Так, Р. Ингл считает, что успешность выполнения как задач на рабочую память, так и тестов интеллекта следует искать в управляющих процессах.

Учеными доказано, что рабочая память обеспечивается тесной связью с вниманием. Внимание необходимо для качественного удержания нескольких его объектов в уме одновременно. Именно поэтому люди, имеющие большой объем кратковременной или рабочей памяти, гораздо лучше способны сосредотачиваться и длительно сохранять внимание на одном объекте. Обладающие же довольно неустойчивым вниманием, наоборот, достаточно часто отвлекаются на посторонние объекты.

Рабочая память лежит в основе понимания, усвоения и запоминания новой информации. Недостаток рабочей памяти вызывает трудности в обучении, лишает человека возможности работать в многозадачном режиме. Рабочую память можно улучшить с помощью различных тренажеров и тестов.

5. ТЕСТ НА РАБОЧУЮ ПАМЯТЬ

Параметры на рабочую память оцениваются с помощью комплексных задач на рабочую память, в которых испытуемый должен одновременно перерабатывать информацию и удерживать в памяти промежуточные результаты.

Средства для оценки рабочей памяти человека включают в себя нескольких тестов, в которых испытуемому предъявляется последовательность изображений или слов, матрицы которых необходимо запомнить. Во время тестирования длина последовательности увеличивается. Результаты заносятся в базу данных.

В настоящее время в сети Интернет функционирует несколько тестов, входящих в эту систему. Вход в систему можно осуществить по адресу: http://it-span.mgppu.ru/u3rem/.

Тесты на рабочую память разрабатываются и апробируются лабораторией психологии и психофизиологии творчества Института психологии РАН под руководством члена-корреспондента РАН Д. В. Ушакова совместно с факультетом информационных технологий МГППУ в рамках проводимых исследований влияния рабочей памяти на интеллект.

Рассмотрим один из таких тестов на рабочую память (Тест Visual MUT) и проанализируем его результаты с помощью модифицированной функции Раша.

Тест состоит в следующем: предъявляется последовательность стимулов, которые во время тестирования удлиняются и усложняются.

Испытуемому выводится на экран квадратная таблица с меткой в одной ячейке. Затем предъявляется серия знаков в виде стрелок 'вверх', 'вниз', 'вправо', 'влево'. Необходимо мысленно переместить метку в запомненной таблице в указанном направлении на одну клетку для каждого знака. Затем предъявляется пустая таблица для ответа, где следует указать, в какой из ячеек окажется метка. При прохождении теста длина серии знаков возрастает.

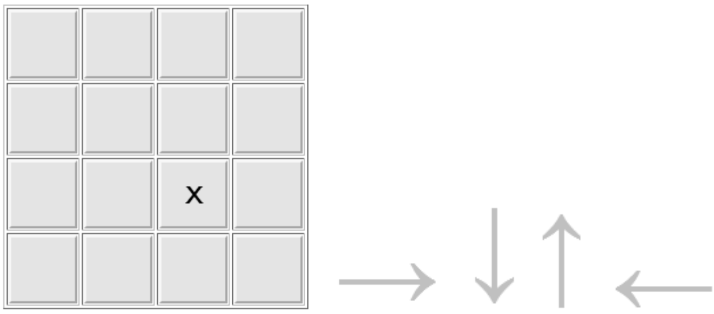


Рис.1.

Размерность таблицы и количество матриц может меняться.

6. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

6.1. Практическое применение

В качестве наблюдаемых зависимостей трудностей и способностей использовались выборочные оценки, полученные по результатам тестирования двух групп испытуемых, одна из которых – студенты (возраст от 19 до 22 лет), а вторая – школьники (возраст 14-15 лет).

Результаты тестирования студентов и школьников

Результаты тестирования на рабочую память студентов и школьников представлены двумя матрицами, одна из которых показывает ответы испытуемых в виде метки верного/неверного (1/0) ответа, а вторая матрица - время решения каждого задания.
Далее по матрице, содержащей время решения каждого задания, оцениваются выборочные зависимости трудностей всех заданий и способностей всех испытуемых-студентов и школьников от времени. Оценка выборочной зависимости трудности задания от времени выполняется следующим образом: по матрице времён выполнения заданий для каждого из значений параметра времени, выбранных с единичным шагом в диапазоне от 0 до 500 секунд, рассчитывается доля испытуемых в выборке, которые не выполнили задание к соответствующему моменту. Оценка выборочной зависимости способности испытуемого от времени выполняется аналогично: по матрице времён выполнения заданий для каждого из указанных выше значений параметра времени рассчитывается доля заданий в выборке, которые были выполнены испытуемым к соответствующему моменту.

В нижеприведенных таблицах 1-2 показаны расчеты для студентов и школьников на примере тестового задания 1.

Таблица 1. Количество заданий, которые были выполнены испытуемыми-студентами к заданному моменту времени.

	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500	6000	6500
t1	0	3	4	6	9	9	10	14	14	14	14	14	14

Таблица 2. Количество заданий, которые были выполнены испытуемыми-школьниками к заданному моменту времени.

t1	<500	<1000	<1500	<2000	<2500	<3000	<3500	<4000	<4500		
	0	2	5	7	7	7	7	7	7		

6.2. Описание инструмента и метод оптимизации

Для решения задачи идентификации был использован метод, программно реализованный в среде графического программирования LabVIEW (версия 2010).

Поскольку число идентифицируемых параметров мало, а диапазоны их изменения известны и ограничены, то решение задачи осуществлялось перебором всех возможных сочетаний значений определяемых параметров с шагом, равным заданной точности решения.

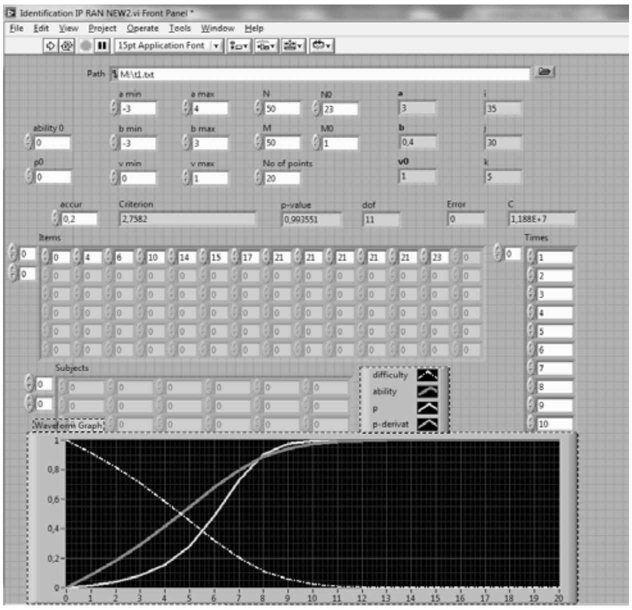


Рис.2. Интерфейс виртуального инструмента, реализованного в среде графического программирования LabVIEW.

6.3. Результаты идентификации модели для студентов и школьников

В результате идентификации модели получили следующие параметры для студентов:

Таблица3. Значения идентифицируемых параметров, полученных по тестовым заданиям

	t1	t 3	t 5	t 8	t10	t 15	t 17	t 20	t 24	t 26	t 28	t 30	t 32
a_τ	0,8	3,8	-0,6	1,6	2,4	-0,8	-0,8	1	0,8	0,4	2,6	-0,8	-0,8
b_τ	2,8	0,2	-3	0,6	0,2	-2	-2	0,6	1,4	2,4	0,2	-2,6	-2,2
χ^2	3,28	2,59	6,72	1,33	1,77	5,43	4,60	2,70	7,06	8,72	10,39	4,41	7,84
p-значение	0,99	0,99	0,88	0,99	0,99	0,49	0,97	0,99	0,53	0,56	0,94	0,93	0,80
df	12	12	4	12	12	6	12	12	8	10	12	10	9

В результате идентификации модели получили следующие параметры для школьников:

Таблица 4. Значения идентифицируемых параметров, полученных по тестовым заданиям

	t1	t 3	t 5	t 8	t10	t 15	t 17	t 20	t 24	t 26	t 28	t 30	t 32
a_τ	-3	-2,8	2	3,4	-3	-2,2	-2	-2,8	-3	-1,4	-2	1,4	3,2
b_τ	-1,4	-1,6	0,8	0,4	-1,6	-1.8	-2	-1,6	-1,4	-2,6	-2,8	2	0,6
χ^2	3,50	3,96	2,20	2,16	3,57	1,60	2,19	3,96	1,71	1,61	5,38	1,23	1,02
p-значение	0,99	0,98	0,99	0,99	0,99	0,99	0,82	0,95	0,99	0,90	0,50	0,99	0,96
df	12	12	12	12	12	12	5	10	12	5	6	13	5

Для всех построенных моделей выбранных тестовых заданий получено высокое p-значение, позволяющее говорить об адекватности модели наблюдениям. Малые значения величины X^2 свидетельствуют о хорошем согласовании прогнозируемых и наблюдаемых данных.

В результате идентификации модели были получены графики вероятностей решения тестовых заданий студентами. Так, например, выглядят графики вероятностей решения задания испытуемыми – студентами задания 1(t1) (рис. 3) и испытуемыми – школьниками задания 1(t1) (рис. 4).

Кривая трудности на графиках показана белым цветом, кривая способности – красным цветом, кривая вероятности $p_{ij}(t)$ – зеленым цветом.

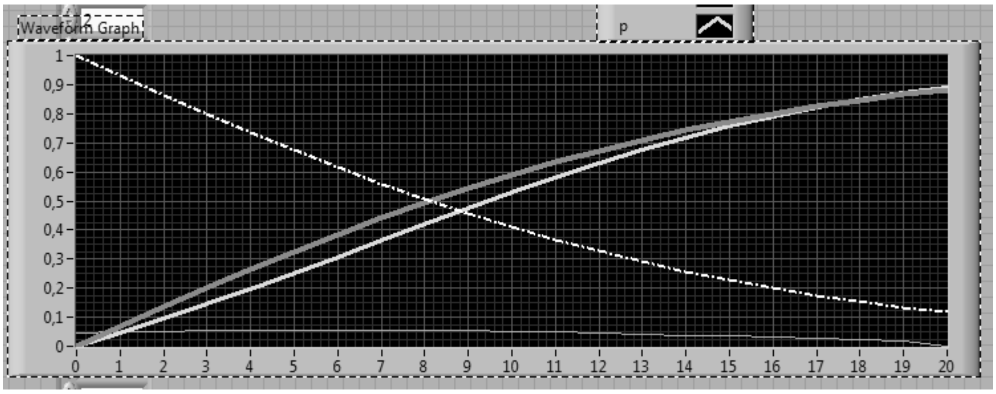


Рис. 3. График вероятности решения задания испытуемыми - студентами задания 1 (t1).

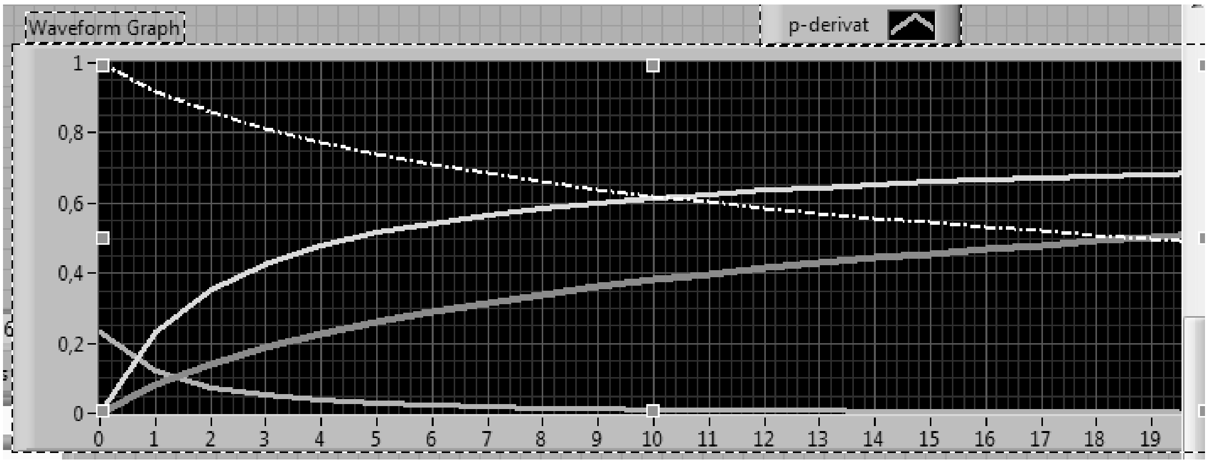


Рис. 4. График вероятности решения задания испытуемыми – школьниками задания 1 (t1).

Формы выборочных зависимостей трудностей заданий и способностей испытуемых от времени демонстрируют выраженную связь с величиной трудностей заданий и способностей испытуемых в классическом понимании. Однако можно наблюдать, что вариация кривых зависимости способности испытуемых во времени содержит также необъяснённые компоненты, которые, вероятно, связаны с такими характеристиками испытуемых, как скорость принятия решений, уверенность в выбранном ответе и т.п.

Рассмотрим более детально поведение функции

$$L\big(u_j(t) - v_i(t), a_\tau, b_\tau\big) = \frac{1}{1+e^{a_\tau(v_i(t)-u_j(t)+b_\tau)}}\,.$$

Функция $L(u_j(t) - v_i(t), a_\tau, b_\tau)$ выражает вероятность выполнения задания в течение интервала времени $[t; t+\tau]$ при условии, что в момент времени t задание не выполнено; a_τ и b_τ – параметры, идентифицированы по результатам наблюдений.

Чем больше параметр a_τ, тем быстрее значение функции достигает значения 1, и вероятность решения более зависима от способности испытуемого, т.е. сильные испытуемые выполняют задание правильно с высокой вероятностью, а слабые испытуемые с малой (параметр b_τ - параметр сдвига (или смещения)). Чем круче кривая, тем выше дифференцирующая способность.

Графическое изображение функции L при полученных значениях a_τ и b_τ для первой группы испытуемых – студентов показано на рис. 5-6.

Изменение аргумента – в пределах от -1 до 1, с шагом 0,1.

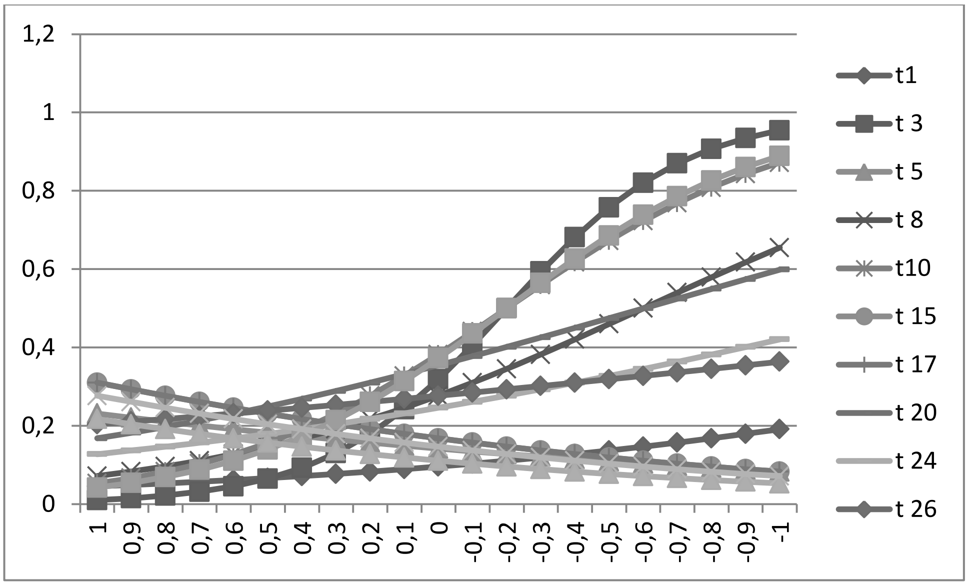


Рис. 5. Графики вероятностей решения тестовых заданий

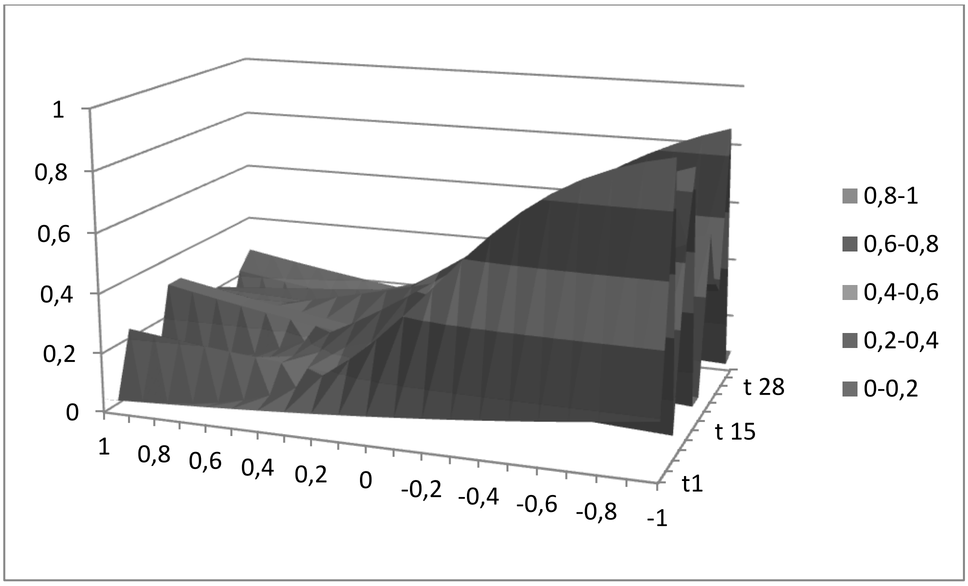


Рис. 6. Изображение функций L в трехмерном пространстве

Следует отметить, что по горизонтальной оси, где принимаются отрицательные значения, уровень трудности меньше, чем уровень способности, там вероятность решения показывает большие значения, чем там, где принимаются положительные значения, уровень трудности больше уровня способности и вероятность решения показывает маленькие значения. Есть задания, которые показывают обратное, это тестовые задания 17, 30, 32, вероятность решения тестового задания 1 показывает очень маленькие результаты.

На промежутке, где функция L показывает малые вероятности, интерпретация не имеет значения (область нереализованных значений параметров u, v),

Но, в основном, большая вероятность решения задания связана с уровнем способности испытуемого, что видно из графиков.

Есть задания, которые слабо различают сильных и слабых испытуемых, т.е. это задание выполняется примерно с одинаковой вероятностью и слабыми и сильными студентами.

Оптимальным временем, отведенным на выполнения тестовых заданий, считаем время, к которому 90% всех испытуемых - студентов от асимптотического значения функции вероятности справились с заданием.

Для каждого тестового задания, выполненного студентами, время представлено в табл. 5.

Таблица 5. Оптимальное время выполнения тестовых заданий для студентов

Тестовые задания	Оптимальное время
t1	10000 мс=10с
t3	3000 мс=3,5с
t5	7500 мс=7,5 с
t8	3500 мс=3,5с
t10	2500 мс=2,5с
t13	6500 мс=6,5с
t15	6500 мс=6,5с
t17	6500 мс=6,5с
t20	2500 мс=2,5с
t24	3500 мс=3,5с
t26	3500 мс=3,5с
t28	2500 мс=2,5с
t30	9000 мс=9с
t32	7500 мс=7,5с

Графическое изображение функции L при полученных значениях a_τ и b_τ для второй группы испытуемых – школьников показано на рис. 6.-7.

Изменение аргумента – в пределах от -1 до 1, с шагом 0,1.

Графики вероятности решения тестовых заданий представлены на рис. 7-8.

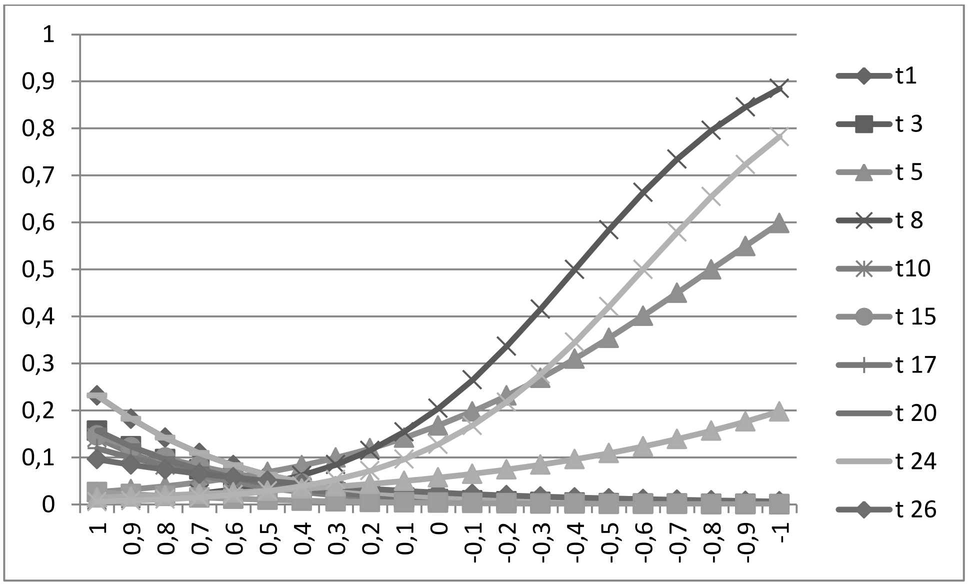


Рис. 7. Графики вероятностей L

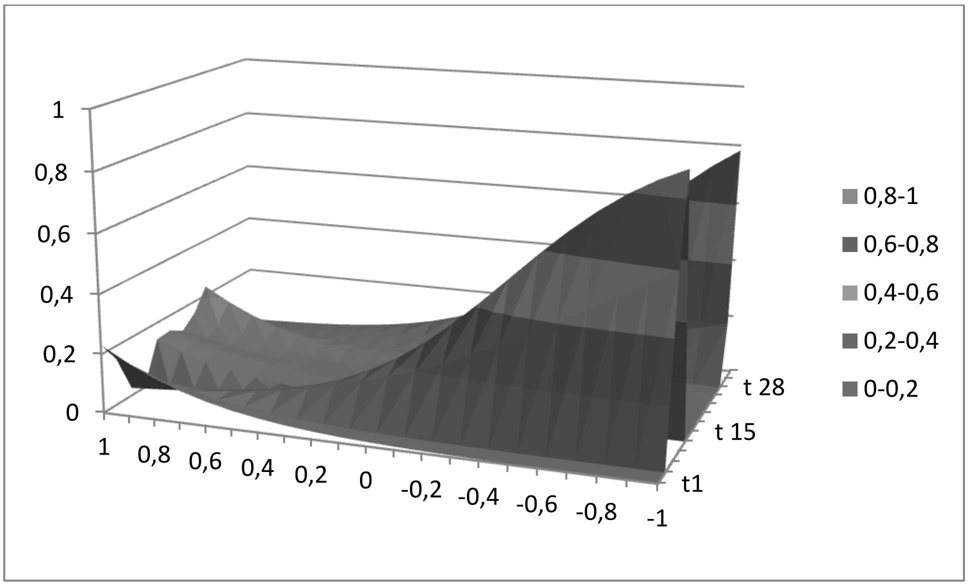


Рис. 8. Изображение функций L в трехмерном пространстве

Чем больше параметр a_τ, тем быстрее значение функции достигает значения 1, и вероятность решения более зависима от способности испытуемого, т.е. сильные испытуемые выполняют задание правильно с высокой вероятностью, а слабые испытуемые с малой (параметр b_τ - параметр сдвига (или смещения)). Крутизна кривой говорит о дифференцирующей способности испытуемых.

По горизонтальной оси, где принимаются отрицательные значения, уровень трудности меньше, чем уровень способности, там вероятность решения показывает большие значения, чем там, где принимаются положительные значения, уровень трудности больше уровня способности и вероятность решения показывает маленькие значения. Есть задания, которые показывают обратное, это тестовые задания 20, 26, 28, вероятность решения тестового задания 30 показывает очень маленькие результаты.

Из графиков функций вероятностей видно, что большая вероятность решения задания связана с уровнем способности испытуемого.

Есть задания, которые слабо различают сильных и слабых испытуемых, т.е. это задание выполняется примерно с одинаковой вероятностью и слабыми и сильными школьниками.

Оптимальным временем, отведенным на выполнения тестовых заданий, считаем время, к которому 90% всех испытуемых – школьников от асимптотического значения функции вероятности справились с заданием.

Для каждого тестового задания, выполненного школьниками, время представлено в табл. 6.

Таблица 6. Оптимальное время выполнения тестовых заданий для школьников

Тестовые задания	Оптимальное время школьники
t1	4500 мс=4,5с
t3	7000 мс=7с
t5	5500 мс=5,5с
t8	4500 мс=4,5с
t10	5000 мс=5с
t15	6500 мс=6,5с
t17	5500 мс=5,5с
t20	5500 мс=5,5с
t24	5500 мс=5,5с
t26	5500 мс=5,5с
t28	7000 мс=7с
t30	8500 мс=8,5с
t32	6500 мс=6,5с

Сравнивая оптимальное время для студентов и школьников, можно заметить, что для решения тестовых заданий школьникам требуется оптимального времени больше, чем студентам. Общее время для школьников равно 77000 мс=77с., а для студентов это время составляет 68000 мс =68с.

6.4. Проверка гипотез

Используя готовые средства, проверим выдвинутые гипотезы по уровню подготовленности и по фактору пола.

Проверим гипотезу о том, что уровень подготовленности испытуемых не влияет на результаты тестирования.

Проверим эти выборки на нормальность.

Вычислим базовые статистики: среднее, медиану и моду, и на основе этого определим отклонение от нормального распределения. Если мода, медиана и среднее арифметическое друг от друга значительно не отличаются, мы имеем дело с нормальным распределением. Если медиана значительно отличается от среднего, то мы имеем дело с асимметричной выборкой.

Базовые статистики приведены в таблице 7.

Таблица 7. Результаты статистических данных

	студенты	школьники
сумма	591	195
среднее	49,25	24,375
медиана	27	28,5
мода	31	29

Анализируя полученные данные, мы видим, что базовые статистики между собой заметно отличаются.

Проверим гипотезу о нормальности с помощью критериев асимметрии (As), эксцесса (Ex).

Критерий асимметрии (As) - критерий, позволяющий проверить степень симметричности эмпирического распределения, выраженную в числовой форме.

Критерий эксцесса (Ex) - критерий, позволяющий проверить степень плоско- или узковершинности эмпирического распределения, выраженную в числовой форме (распределение является нормальным, если показатели асимметрии и эксцесса находятся в диапазоне от - 1,000 до + 1,000; распределение не является нормальным, если показатели либо асимметрии, либо эксцесса находятся в диапазоне больше -1,000 и +1,000).

С помощью программы SPSS получаются следующие результаты, в таблице 8.

Таблица 8. Результаты, полученные по критерию асимметрии (As), эксцесса (Ex)

		VAR00002	VAR00004
N	Валидные	23	8
	Пропущенные	8	23
Асимметрия		-2,220	-1,659
Стд. ошибка асимметрии		,481	,752
Эксцесс		4,940	1,746
Стд. ошибка эксцесса		,935	1,481

Так как показатели асимметрии и эксцесса находятся в диапазоне больше -1,000 и +1,000, то распределение не является нормальным.

Так как распределения в целом отличаются от нормальных, применим непараметрический метод проверки гипотезы. Это U-Критерий Манна-Уитни – непараметрический статистический критерий, используемый для сравнения двух независимых выборок по уровню какого-либо признака, измеренного количественно. Метод основан на определении того, достаточно ли мала зона перекрещивающихся значений между двумя вариационными рядами (ранжированным рядом значений параметра в первой выборке и таким же во второй выборке). Чем меньше значение критерия, тем вероятнее, что различия между значениями параметра в выборках достоверны.

Данный метод выявления различий между выборками был предложен в 1945 году американским химиком и статистиком Фрэнком Уилкоксоном. В 1947 году он был существенно переработан и расширен математиками Х.Б. Манном (H.B. Mann) и Д.Р. Уитни (D.R. Whitney), по именам которых сегодня обычно и называется.

U-критерий Манна-Уитни используется для оценки различий между двумя независимыми выборками по уровню какого-либо количественного признака.
Обрабатываем данные в программе **SPSS.**

Таблица 9. Результаты, полученные по критерию Манна-Уитни

Ранги

VAR00001			N	Средний ранг	Сумма рангов
VAR00002	dimension1	1	23	16,22	373,00
		2	8	15,38	123,00
		Всего	31		

Статистики критерия[b]

	VAR00002
Статистика U Манна-Уитни	87,000
Статистика W Уилкоксона	123,000
Z	-,229
Асимпт. знч. (двухсторонняя)	,819
Точная знч. [2*(1-сторонняя Знач.)]	,842[a]

a. Не скорректировано на наличие связей.
b. Группирующая переменная: VAR00001

Полученные результаты говорят о том, что уровень подготовленности группы студентов не превосходит уровня подготовленности группы школьников.

Объединим эти две выборки и проверим, отличаются ли результаты теста в зависимости от фактора пола.

Разобьем на две подгруппы, юноши и девушки, в одной выборке получили 16 человек, в другой – 15человек.

Проверим каждую из этих выборок на нормальность, вычислим базовые статистики.

Базовые статистики приведены в таблице 10

Таблица 10. Базовые статистики

	девушки	юноши
сумма	389	397
среднее	24,31	24,47
медиана	27,5	28
мода	31	31

Базовые статистики отличаются.
Проверим гипотезу о нормальности с помощью критериев асимметрии (As), эксцесса (Ex). Результаты представлены в таблице 11.

Таблица 11. Результаты, полученные по критерию асимметрии (As), эксцесса (Ex)

		VAR00002	VAR00004
N	Валидные	15	16
	Пропущенные	1	0
Асимметрия		-2,591	-1,638
Стд. ошибка асимметрии		,580	,564
Эксцесс		7,973	1,780
Стд. ошибка эксцесса		1,121	1,091

Для проверки результатов по подгруппам снова воспользуемся критерием Манна-Уитни.

В таблице 12 результаты, полученные в программе SPSS.

Таблица 12. Результаты, полученные по критерию Манна-Уитни

Ранги

VAR00001			N	Средний ранг	Сумма рангов
VAR00003	dimension1	1	15	16,80	252,00
		2	16	15,25	244,00
		Всего	31		

Статистики критерия[b]

	VAR00003
Статистика U Манна-Уитни	108,000
Статистика W Уилкоксона	244,000
Z	-,481
Асимпт. знч. (двухсторонняя)	,630
Точная знч. [2*(1-сторонняя Знач.)]	,654[a]

a. Не скорректировано на наличие связей.

b. Группирующая переменная: VAR00001

Полученные результаты свидетельствуют о том, что фактор пола также не влияет на исход полученных результатов.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Исследованы особенности вероятностного моделирования процесса выполнения теста на рабочую память. Преимуществами использованного подхода являются:
   - учёт динамики способностей испытуемых и трудностей заданий во время их выполнения и
   - модифицированная функция Раша, аргументы которой, в отличие от классического варианта, задаются в вероятностной шкале.
2. Параметры использованной вероятностной модели идентифицированы с использованием результатов тестов на рабочую память.
3. Анализ идентифицированных зависимостей позволил определить оптимальное время, которое следует отводить для выполнения заданий теста.
4. Проведённый статистический анализ позволил принять гипотезы о независимости результатов теста на рабочую память от уровня подготовки и пола испытуемых.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.С. Куравский, П.А. Мармалюк, Г.А. Юрьев, П.Н. Думин, А.С. Панфилова. Вероятностное моделирование процесса выполнения тестовых заданий на основе модифицированной функции Раша. – Вопросы психологии, 2015, №3.

2. Л.С. Куравский, П.А. Мармалюк, Г.А. Юрьев, П.Н. Думин. Методы численной идентификации марковских моделей и их сравнительный анализ. Информационные технологии, №10, том 21, 2015.
3. L. S. Kuravsky, P. A. Marmalyuk, G. A. Yuryev, P. N. Dumin and A. S. Panfilova. Probabilistic Modeling of a Testing Procedure. - Applied Mathematical Sciences, Vol. 9, 2015, no. 82, 4053 – 4066, http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.53234.
4. Куравский Л. С., Мармалюк П. А., Алхимов В. И., Юрьев Г. А. Математические основы нового подхода к построению процедур тестирования. – Экспериментальная психология, №4, том 5, стр. 75, 2012.
5. Куравский Л. С., Мармалюк П. А., Алхимов В. И., Юрьев Г. А. Новый подход к построению интеллектуальных и компетентностных тестов. Моделирование и анализ данных, №1, 2013.
6. Л.С. Куравский, А. А. Марголис, Г.А. Юрьев, П.А. Мармалюк. Концепция системы поддержки принятия решений для психологического тестирования. Психологическая наука и образование. №1, 2012.
7. Войтов В.К., Косихин В.В., Ушаков Д.В. Рабочая память как перспективный конструкт когнитивной психологии и методы его измерения // Моделирование и анализ данных. 2015. № 1. С. 57–78.
8. Войтов В. К., Сафонов М. А., Соколов Л. Ф., Разработки тестов рабочей памяти в интернете - Моделирование и анализ данных - 2014. № 1.
9. Д. В. Ушаков, Психология интеллекта и одаренности, Издательство «Институт психологии РАН» Москва – 2011.
10. Тюменева Ю.А., Яременко А.А., Руководство для авторов, публикующих результаты разработки оценочного инструмента, Вопросы образования, №1, 2013. Москва.
11. Шмелев А.Г., «Практическая тестология: Тестирование в образовании, прикладной психологии и управлении персоналом», М., «Маска», 2013.
12. Baker F.B. *The Basics of Item Response Theory*. ERIC Clearinghouse on Assessment and Evaluation, University of Maryland, College Park, MD, *2001*. Портал психологических изданий PsyJournals.ru.
13. Gregory R.J. Psychological testing: History, principles, and applications (5th edition). - New York: Pearson. 2007.
14. Развитие рабочей памяти с помощью компьютерных тренажеров как средство преодоления объективных трудностей при изучении дисциплин. URL: http://cyberleninka.ru/article/n/razvitie-rabochey-pamyati-s-pomoschyu-kompyuternyh-trenazherov-kak-sredstvo-preodoleniya-obektivnyh-trudnostey-pri-izuchenii (дата обращения 24.03.2016).
15. Для чего нам нужна рабочая память? URL: http://hawkish.ru/%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%87%D0%B0%D1%8F-%D0%BF%D0%B0%D0%BC%D1%8F%D1%82%D1%8C/, (дата обращения 3.03.2016)
16. Компьютерные тренажеры рабочей памяти. URL: http://working-memory.ru/ (дата обращения 11.02.2016).
17. Анализ двух выборок. URL: http://www.tsput.ru/res/math/mop/lections/lection_6.htm (дата обращения 14.04.2016).
18. Закон нормального распределения и его использование при выборе параметрического или непараметрического критерия. URL: http://cito-web.yspu.org/link1/metod/met154/node6.html (дата обращения 14.04.2016).

Работа поступила 26.12.2017г.

АВТОРЫ

Антипова Светлана Николаевна	заместитель декана по внеучебной работе факультета информационных технологий МГППУ
Артеменков Сергей Львович	кандидат технических наук, профессор кафедры прикладной информатики и мультимедийных технологий, руководитель центра информационных технологий для психологических исследований факультета информационных технологий МГППУ *slart@inbox.ru*
Думин Павел Николаевич	заведующий лабораторией количественной психологии факультета информационных технологий МГППУ
Коморина Ксения	магистрант факультета информационных технологий МГППУ *komorina_95@list.ru*
Лукин Владимир Николаевич	кандидат физико-математических наук, профессор кафедры прикладной информатики и мультимедийных технологий факультета информационных технологий МГППУ *lukinvn@list.ru*
Нуркаева Ирина Михайловна	кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной информатики и мультимедийных технологий факультета информационных технологий МГППУ
Сидорова Валерия Борисовна	преподаватель факультета информационных технологий МГППУ
Соколов Владимир Вячеславович	заведующий УПЛ технических и программных средств обучения студентов с нарушениями зрения факультета информационных технологий МГППУ *dekanatitmgppu@mail.ru*
Степанов Михаил Евграфович	кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной математики факультета информационных технологий МГППУ *mestepanov@yandex.ru*
Юрьева Наталия Евгеньевна	кандидат технических наук, научный сотрудник центра информационных технологий для психологических исследований факультета информационных технологий МГППУ *yurieva.ne@gmail.com*
Червен-Водали Елена Борисовна	заместитель декана по учебной работе факультета информационных технологий МГППУ