

## Уточнение коэффициента сжатия для внешней оценки предельного множества 0-управляемости линейной дискретной системы с ограниченным управлением

*Симкина А.В.\**

Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет) (МАИ)  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-8910-5728>  
e-mail: [abv1998@yandex.ru](mailto:abv1998@yandex.ru)

Рассматривается задача построения наилучшей внешней оценки предельного множества управляемости для линейной дискретной системы с выпуклыми ограничениями на управление. Построение оценки базируется на принципе сжимающих отображений. Оптимальные параметры оценивания определяются на основе анализа результатов численного моделирования. Приведены примеры.

**Ключевые слова:** дискретная система управления, предельное множество управляемости, предельное множество достижимости, принцип сжимающих отображений, коэффициент сжатия, выпуклое множество, полиэдральная аппроксимация.

**Для цитаты:**

*Симкина А.В.* Уточнение коэффициента сжатия для внешней оценки предельного множества 0-управляемости линейной дискретной системы с ограниченным управлением // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 1. С. 115–128. DOI: [10.17759/mda.2024140408](https://doi.org/10.17759/mda.2024140408)

\**Симкина Анастасия Вячеславовна*, аспирант, ассистент кафедры теории вероятностей и компьютерного моделирования, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВО МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-8910-5728>, e-mail: [abv1998@yandex.ru](mailto:abv1998@yandex.ru)



## 1. ВВЕДЕНИЕ

При решении задач управления динамическими системами нередко приходится учитывать различные ограничения, связанные с техническими аспектами изучаемой системы. Такого рода ограничения приводят к тому, что система из заданного начального состояния может быть переведена в ограниченное множество терминальных состояний даже при бесконечном временном горизонте. Данный факт делает актуальным исследование не только вопросов достижимости и управляемости различных динамических систем, но и разработку методов построения и оценивания предельных множеств достижимости и управляемости для произвольной системы управления. Кроме того, множества управляемости и достижимости могут быть использованы в ряде задач оптимального управления для формирования позиционного управления [1] для систем с дискретным временем.

На текущий момент по данной тематике можно выделить два основных направления: исследование отдельных состояний на управляемость [2–5] и геометрические методы построения множеств управляемости и достижимости [6–9]. Так, при исследовании нелинейных систем удается получить только общие свойства множеств управляемости [2] либо их оценки [8,9]. Для случая линейных уравнений динамики по состоянию и управлению оказывается возможно построение более конструктивных результатов для различных классов систем: периодических [10], переключаемых [3], с положительным управлением [6]. Наиболее строгие результаты сформулированы для случая компактных и выпуклых ограничений на значения управления [1,7], допускающие даже описание предельных множеств достижимости и управляемости [4, 5, 11].

В [12] для линейных дискретных систем со скалярным управлением, на которое наложено суммарное ограничение 1-го порядка, показано, что в случае устойчивых систем возможно явным образом найти предельное множество достижимости, представляющее собой выпуклый, симметричный относительно нуля многогранник. Для ограничений более высокого порядка описание предельных множеств достижимости и 0-управляемости получено посредством использования опорных полупространств [13].

Существенным недостатком этих методов является невозможность заранее определить точность построенных оценок. В данной статье рассматривается развитие принципиально нового подхода к численному моделированию предельных множеств управляемости на основе принципа сжимающих отображений, который был предложен в [11]. Замыкание предельного множества управляемости является неподвижной точкой сжимающего отображения заданного в пространстве Хаусдорфа, однако ранее не было способа определить оптимальное значение шага квантования, определяющего значение коэффициента сжатия. В данной статье проведён численный анализ зависимости погрешности внешней оценки предельного множества 0-управляемости от выбранного шага квантования при ограниченных вычислительных ресурсах, что позволяет определить оптимальное значение данного параметра, характеризующего наиболее точную оценку предельного множества 0-управляемости.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается линейная дискретная система с ограниченным управлением  $(A, \mathcal{U})$ :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + u(k), \\ x(0) &= x_0, \quad u(k) \in \mathcal{U}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния системы,  $u(k) \in \mathbb{R}^n$  – управляющее воздействие,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – матрица системы (1),  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  – множество допустимых значений управлений. Предполагается, что  $\mathcal{U}$  – выпуклый компакт,  $0 \in \text{int } \mathcal{U}$ .

Для произвольного  $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  обозначим через  $\mathcal{X}(N) \subset \mathbb{R}^n$  множество 0-управляемости системы (2) за  $N$  шагов, т.е. множество тех начальных состояний, из которых систему (1) возможно перевести в 0 за  $N$  шагов посредством выбора допустимых управляющих воздействий:

$$\mathcal{X}(N) = \begin{cases} \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = 0\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Требуется построить наилучшую внешнюю оценку предельного множества 0-управляемости  $\mathcal{X}_\infty$  – множества тех начальных состояний, из которых систему  $(A, \mathcal{U})$  можно перевести в начало координат за любое конечное число шагов:

$$\mathcal{X}_\infty = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists N \in \mathbb{N}, u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = 0\}$$

С учетом (2) также справедливо представление

$$\mathcal{X}_\infty = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}(N). \quad (3)$$

## 3. ИЗВЕСТНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Исследование в данной статье базируется на следующих известных утверждениях.

Обозначим через  $\mathbb{K}_n$  множество всех компактов в  $\mathbb{R}^n$ , а через  $\rho_H$  – расстояние Хаусдорфа [14]:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_n &= \{ \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \text{ – компакт} \}, \\ \rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) &= \max \left\{ \sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{y \in \mathcal{Y}} \|x - y\|; \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \|x - y\| \right\} \end{aligned}$$

**Теорема 1.** [11, теорема 2] Пусть все собственные значения матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  по модулю строго больше 1, семейство  $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$  определяется соотношениями (2), множество  $\mathcal{X}_\infty$  определяется соотношением (3), отображение  $T : \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_n$  имеет вид



$$T(\mathcal{X}) = A^{-1} \mathcal{X} + (-A^{-1} \mathcal{U}). \quad (4)$$

Тогда

- 1) существует  $M \in \mathbb{N}$  такое, что отображение  $T^M = \underbrace{T \circ T \dots \circ T}_M$  является сжимающим с некоторым коэффициентом сжатия  $\alpha \in [0; 1)$ ;
- 2)  $\overline{\mathcal{X}_\infty}$  – единственная неподвижная точка отображения  $T$  в пространстве  $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$ ;
- 3) справедлива оценка

$$\rho_H(\overline{\mathcal{X}_\infty}, \mathcal{X}(NM)) \leq \frac{\alpha^N}{1-\alpha} \rho_H(\mathcal{X}(M), \{0\}).$$

Внешняя оценка предельного множества 0-управляемости на основе принципа сжимающих отображений представлена в следующей теореме.

**Теорема 2.** [11, теорема 3]. Пусть все собственные значения матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  по модулю строго больше 1, семейство  $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^\infty$  определяется соотношениями (2), множество  $\mathcal{X}_\infty$  определяется соотношением (3), величина  $M \in \mathbb{N}$  выбрана так, чтобы  $T^M$  было сжимающим отображением с коэффициентами сжатия  $\alpha_1, \alpha_\infty \in [0; 1)$ , которые ассоциированы с нормами  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$  соответственно. Тогда

$$\mathcal{X}_\infty \subset \mathcal{X}(NM) + \text{conv}\{\underbrace{0, \dots, 0}_i, r, 0, \dots, 0\}^T : r \in \{-R_1, R_1\}, i = \overline{0, n-1},$$

$$\mathcal{X}_\infty \subset \mathcal{X}(NM) + \{x \in \mathbb{R}^n : \max_{i=\overline{1, n}} |x_i| \leq R_\infty\},$$

$$R_p = \frac{\alpha_p^N}{1-\alpha_p} \max_{x \in \mathcal{X}(M)} \|x\|_p, p \in \{1, \infty\}, N \in \mathbb{N}.$$

Теорема позволяет строить оценки с любой наперёд заданной точностью  $R_p$ . Погрешность зависит от выбора шага квантования  $M$  и параметра  $p$  пространства  $\mathbb{R}_p^n$ , который определяет норму, ассоциированную с нормой пространства Хаусдорфа  $\mathbb{K}_n$ . В качестве параметров  $p$  рассматриваем 1 и  $\infty$ , так как в этом случае оценки будут представлять собой многогранники. Параметр  $M$  влияет на подсчёт коэффициента сжатия  $\alpha_p$  и  $\max_{x \in \mathcal{X}(M)} \|x\|_p$ . Коэффициент сжатия  $\alpha_p$  рассчитывается как операторная норма матрицы  $A^{-M}$  и зависит от выбора шага квантования  $M$ :

$$\alpha_p = \|A^{-M}\| = \sup_{\|x\|_p \leq 1} \|A^{-M}x\|_p$$

$$A^{-M} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Известны три аналитические формулы вычисления коэффициентов сжатия  $\alpha_1, \alpha_\infty$  [14]:

$$\alpha_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad \alpha_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Зафиксируем значение  $N_{max} \in \mathbb{N}$ . Целью работы является минимизация погрешности внешней оценки предельного множества 0-управляемости от параметра  $M$  при ограничении  $NM \leq N_{max}$ , то есть следует решить следующую оптимизационную задачу:

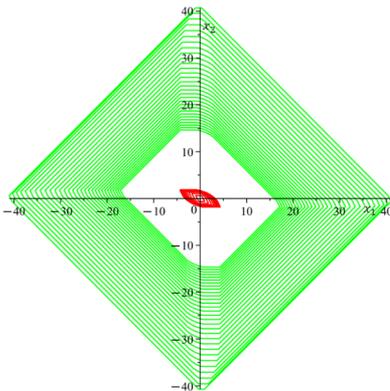
$$\frac{\alpha^N}{1-\alpha} \rho_H(\mathcal{X}(M), \{0\}) \rightarrow \min_{M, N: MN \leq N_{max}}. \quad (6)$$

## 4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

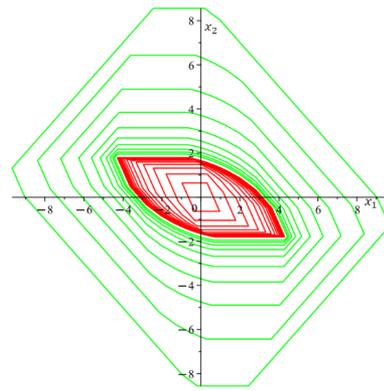
В общем случае решить задачу (6) не представляется возможным. По этой причине выбор оптимального значения  $M$  будем осуществлять на основе анализа экспериментальных данных.

Рассмотрим на примере двумерной системы с собственным значением 1.56 кратности 2 актуальность поставленной задачи (6), сравнив оценки для различных значений параметра  $M$ . Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1.56 & 0.78 \\ 0 & 1.56 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$



а)  $p=1, M=1, \alpha_1=0.9615, N_{max}=30$



б)  $p=1, M=3, \alpha_\infty=0.6585, N_{max}=30$

Рис. 1. Внутренняя оценка  $\mathcal{X}_\infty$  красным цветом,  
внешняя оценка  $\mathcal{X}_\infty$  зелёным цветом



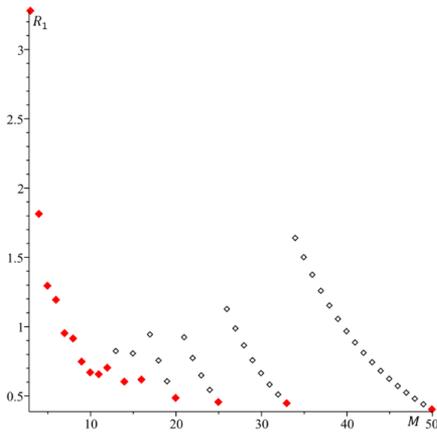
Как видно из Рис. 1, выбор значения  $M$  влияет на погрешность внешних оценок предельного множества 0-управляемости. Истинное предельное множество 0-управляемости лежит в зазоре между внутренней оценкой (множества 0-управляемости за  $N$  шагов) и внешней оценкой. При  $M=3$  точность оценивания оказывается значительно выше, чем при  $M=1$ , что определяет целесообразность решения задачи (6).

Рассмотрим системы разной размерности с различными типами собственных значений матрицы системы.

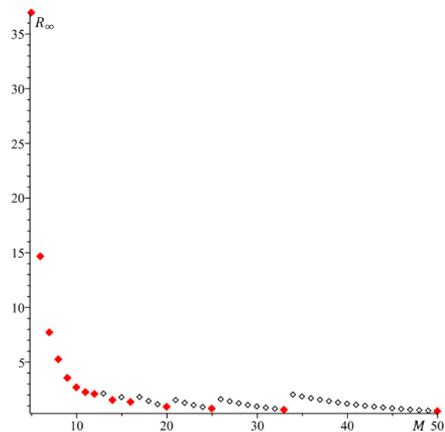
**Пример 1.** Пусть

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5.22 & 0.27 \\ 0.82 & 1.09 \end{pmatrix}, \mathcal{U}_1 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Матрица  $A_1$  имеет действительные собственные значения  $\lambda_1=5.27$  и  $\lambda_2=1.04$ . Рассмотрим зависимость погрешности  $R_p$  от выбора значения  $M=1, 50$  при  $N_{max}=100$ .



а)  $p=1, M=1, \alpha_1=0.997$



б)  $p=\infty, M=4, \alpha_\infty=0.992$

Рис. 2. Зависимость  $R_p$  от выбора  $M$  для  $(A_1, \mathcal{U}_1)$

В случае с  $p=1$  отображение  $T^M$  становится сжимающим, начиная с  $M=1$ , а в случае  $p=\infty$  – начиная с  $M=4$ . Следовательно, для Рис. 2(б) параметры  $M < 4$  исключены. Для Рис. 2(а) для сохранения масштаба исключены из рассмотрения параметры  $M=1$  и  $M=2$ .

Проверим, есть ли зависимость результатов численного моделирования от выбора множества допустимых значений управлений  $\mathcal{U}$ . Для этого рассмотрим при той же матрице  $A_1$  следующее множество  $\mathcal{U}_2$ :

$$\mathcal{U}_2 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} -0.43 \\ 0.86 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.93 \\ 0.31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.73 \\ -0.59 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.51 \\ -1.1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.42 \\ -0.86 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.93 \\ -0.31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.74 \\ 0.59 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.52 \\ 1.1 \end{pmatrix} \right\} \quad (6)$$

Аналогичные численные расчеты представлены на Рис. 3.

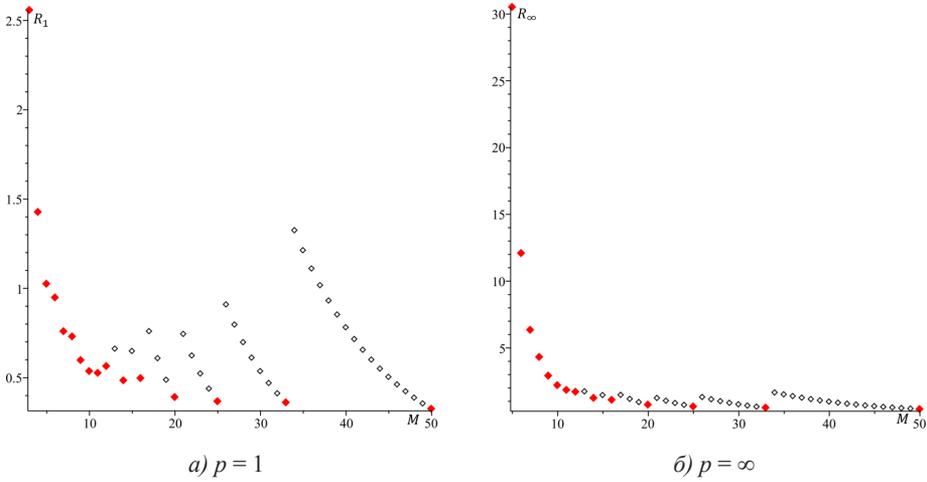


Рис. 3. Зависимость  $R_p$  от выбора  $M$  для  $(A_1, \mathcal{U}_2)$

Результаты для системы  $(A_1, \mathcal{U}_2)$  идентичны результатам для системы  $(A_1, \mathcal{U}_1)$ .

**Пример 2.** Пусть

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0.55 & 1.21 \\ -1.21 & -0.55 \end{pmatrix}, \mathcal{U}_1 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Матрица  $A_2$  имеет комплексно-сопряженные собственные значения  $\lambda_1 = -0.55 + 1.21i$  и  $\lambda_2 = -0.55 - 1.21i$ . Рассмотрим зависимость погрешности  $R_p$  от выбора значения  $M = \overline{1, 50}$ , где  $N_{\max} = 100$ .

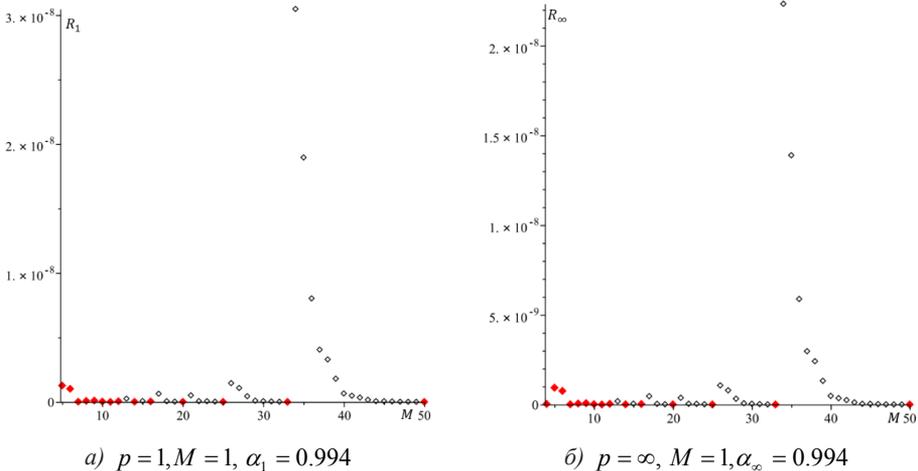


Рис. 4. Зависимость  $R_p$  от выбора  $M$  для  $(A_2, \mathcal{U}_1)$



В случае с  $p=1$  и  $p=\infty$  отображение  $T^M$  становится сжимающим, начиная с  $M=1$ . Для сохранения масштаба на Рис. 4(а) параметры  $M < 4$  исключены, а для Рис. 4(б) для сохранения масштаба исключены из рассмотрения параметры  $M=1, M=2, M=3$ .

Проверим, есть ли зависимость результатов численного моделирования от выбора множества допустимых значений управлений  $\mathcal{U}$ . Для этого рассмотрим при той же матрице  $A_2$  множество управляющих воздействий  $\mathcal{U}_2$  (7).

Аналогичные численные расчеты представлены на Рис. 5.

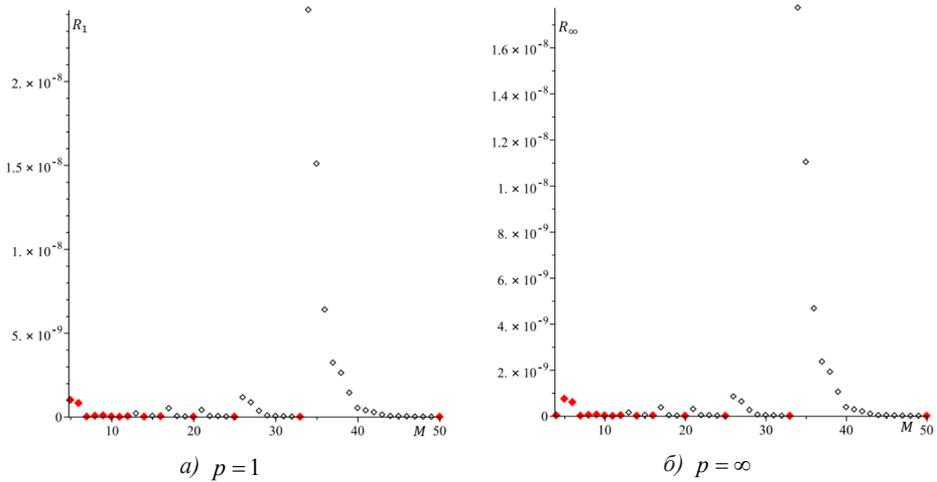


Рис. 5. Зависимость  $R_p$  от выбора  $M$  для  $(A_2, \mathcal{U}_2)$

Результаты для системы  $(A_2, \mathcal{U}_2)$  идентичны результатам для системы  $(A_2, \mathcal{U}_1)$ .

**Пример 3.** Пусть

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1.51 & 0 \\ 0.75 & 1.51 \end{pmatrix}, \mathcal{U}_1 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Матрица  $A_3$  имеет единственное собственное значение кратности 2  $\lambda_1 = 1.51$ . Рассмотрим зависимость погрешности  $R_p$  от выбора значения  $M = \overline{1, 50}$ , где  $N_{\max} = 100$ .

В случае с  $p=1$  и  $p=\infty$  отображение  $T^M$  становится сжимающим, начиная с  $M=1$ . Для сохранения масштаба на Рис. 6 параметры  $M < 4$  исключены.

Проверим, есть ли зависимость результатов численного моделирования от выбора множества допустимых значений управлений  $\mathcal{U}$ . Для этого рассмотрим при той же матрице  $A_3$  множество управляющих воздействий  $\mathcal{U}_2$  (7).

Аналогичные численные расчеты представлены на Рис. 7.

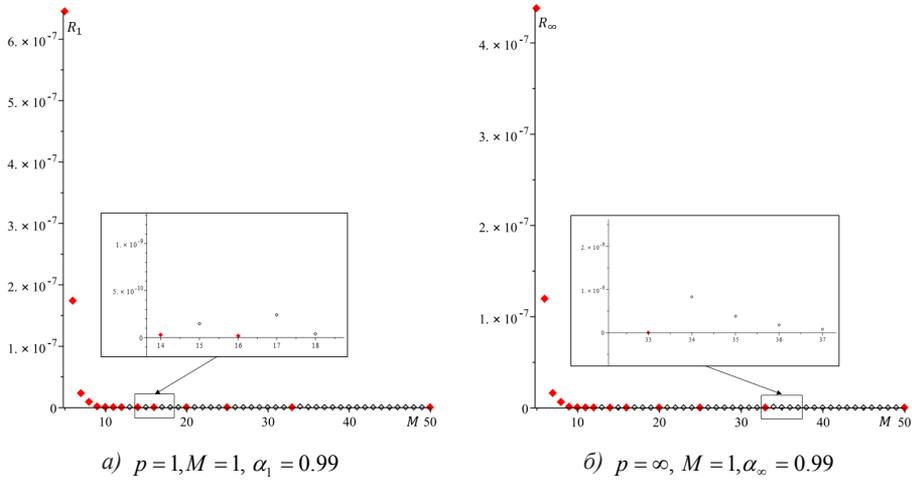


Рис. 6. Зависимость  $R_p$  от выбора  $M$  для  $(A_3, \mathcal{U}_1)$

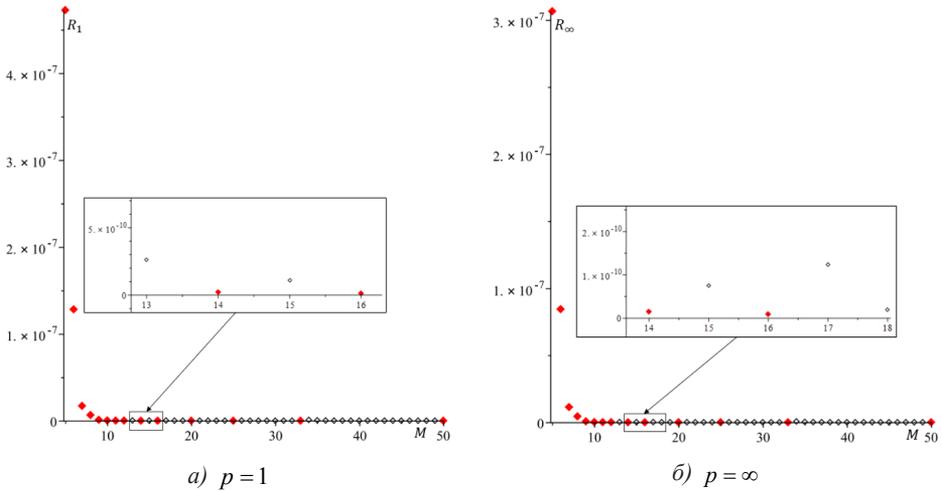


Рис. 7. Зависимость  $R_p$  от выбора  $M$  для  $(A_3, \mathcal{U}_2)$

Результаты для системы  $(A_3, \mathcal{U}_2)$  идентичны результатам для системы  $(A_3, \mathcal{U}_1)$ .

**Пример 4.** Рассмотрим трёхмерную систему. Пусть

$$A_4 = \begin{pmatrix} -0.553 & 0 & 1.208 \\ 0 & 1.33 & 0 \\ -1.208 & 0 & -0.553 \end{pmatrix}, \mathcal{U}_3 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$



Матрица  $A_4$  имеет собственные значения  $\lambda_1 = -0.55 + 1.2I$ ,  $\lambda_2 = -0.55 - 1.2I$ ,  $\lambda_3 = 1.33$ . Рассмотрим зависимость погрешности  $R_p$  от выбора значения  $M = 1, 35$ , где  $N_{\max} = 36$ .

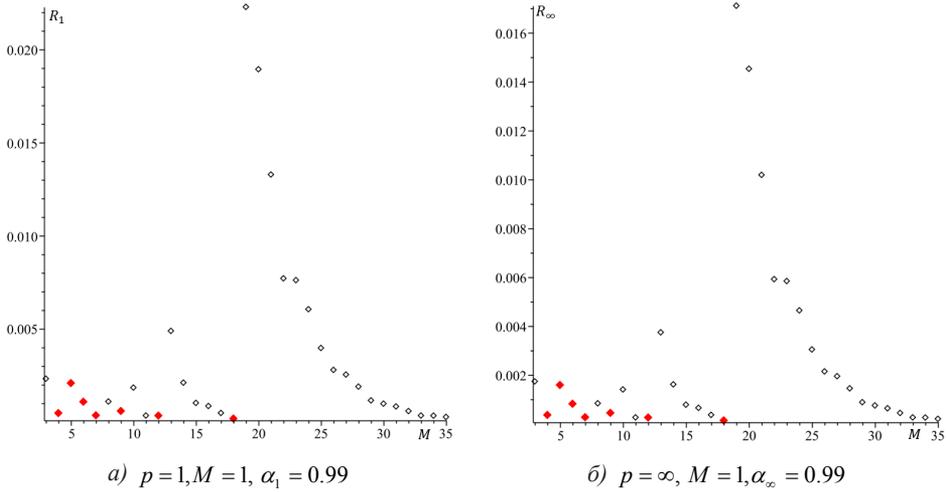


Рис. 8. Зависимость  $R_p$  от выбора  $M$  для  $(A_4, \mathcal{U}_3)$

Проверим, есть ли зависимость результатов численного моделирования от выбора множества допустимых значений управлений  $\mathcal{U}$ . Для этого рассмотрим при той же матрице  $A_3$  множество управляющих воздействий  $\mathcal{U}_4$ .

$$\mathcal{U}_4 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1.15 \\ 1.03 \\ -1.09 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.74 \\ 1.68 \\ -2.97 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.73 \\ 0.55 \\ -0.24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.15 \\ -1.03 \\ 1.09 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.73 \\ -0.55 \\ 0.24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.74 \\ -1.68 \\ 2.97 \end{pmatrix} \right\}$$

Аналогичные численные расчеты представлены на Рис. 9.

Из графиков примеров видно, что скачкообразный рост возникает при уменьшении значения целой части  $\frac{N_{\max}}{M}$ . Например, на Рис. 9 при переходе от  $M = 18$  к  $M = 19$  погрешность  $R_p$  растет. Связано это с тем, что оптимальное значение  $N$  при решении задачи (6) имеет вид

$$N = \left\lceil \frac{N_{\max}}{M} \right\rceil M.$$

Т.е. последнее множество 0-управляемости, используемое для построения внешней оценки предельного множества, имеет номер  $N$ , а множества с номерами  $N+1, \dots, N_{\max}$  фактически никак не используются.

Значения  $M$ , после которых происходит изменение целой части  $\frac{N_{\max}}{M}$ , выделены красным цветом. Начиная с некоторого  $M_0$  красные точки начинают монотонно убывать, в связи с чем для минимизации погрешности нужно брать самое большое значение  $M$ , на которое  $N_{\max}$  делится нацело, для примеров 1–3 это 50, для примера 4 это 18.

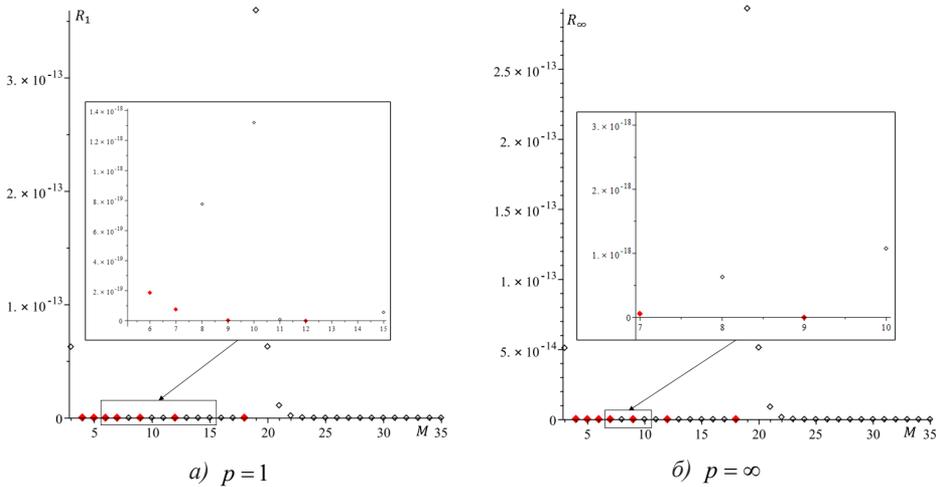


Рис. 9. Зависимость  $R_p$  от выбора  $M$  для  $(A_4, U_4)$

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрена задача выбора шага квантования внешней оценки предельного множества 0-управляемости линейной дискретной системы с ограниченным управлением.

Множество допустимых значений управлений предполагается выпуклым компактом, содержащим начало координат. Структура предельного множества 0-управляемости зависит от нормальной жордановой формы и собственных значений матрицы системы, в связи с чем были рассмотрены системы с тремя типами собственных значений. Для каждого типа было получено экспериментальное подтверждение выбора оптимального значения шага квантования  $M$ . Решение поставленной задачи было произведено на основе анализа экспериментальных данных, полученных в ходе численного моделирования. Приведены графики зависимости погрешности  $R_p$  построения внешних оценок на основе метода сжимающих отображения от шага квантования  $M$ . Погрешность  $R_p$  монотонно убывает на каждом множестве тех  $M$ , для которых  $\left\lfloor \frac{N_{\max}}{M} \right\rfloor = \text{const}$ . Следует рассматривать только те  $M$ , для которых  $\left\lfloor \frac{N_{\max}}{M} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{N_{\max}}{M+1} \right\rfloor$ . При рассмотрении таких  $M$  погрешность  $R_p$ , как правило, демонстрирует монотонное убывание, начиная с некоторого  $M_0$ .



### Литература

1. *Ибрагимов Д.Н.* О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // *Автоматика и Телемеханика*. 2019. № 3. С. 3–25.
2. *Colonius F.* Controllability Properties and Invariance Pressure for Linear Discrete-Time Systems // *Journal of Dynamics and Differential Equations*. 2022. № 34. P. 5–28.
3. *Ge S.S.* Reachability and controllability of switched linear discrete-time systems // *IEEE Transactions on Automatic Contr l*. 2001. V.46, No. 9. P. 1437–1441.
4. *Heemels W.P.* Null controllability of discrete-time linear systems with input and state constraints // *47th IEEE Conference on Decision and Control*. Cancun. – 2008. – P. 3487–3492.
5. *Kaba M.D.* A spectral characterization of controllability for linear discrete-time systems with conic constraints // *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2015. Vol. 53, No. 4. P. 2350–2372.
6. *Benvenuti L.* The geometry of the reachability set for linear discrete-time systems with positive controls // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 2006. Vol. 28, No. 2. P. 306–325.
7. *Darup M.S.* On general relations between nullcontrollable and controlled invariant sets for linear constrained systems // *53rd IEEE Conference on Decision and Control*. Los Angeles. 2014. P. 6323–6328.
8. *Точилин П.А.* О построении невыпуклых аппроксимаций множеств достижимости кусочно-линейных систем // *Дифференциальные уравнения*. 2015. Т. 51, № 11. С. 1503–1515.
9. *Kuntsevich V.M.* Attainability Domains for Linear and Some Classes of Nonlinear Discrete Systems and Their Control // *J. Autom. Inform. Sci.* 2010. V. 42, No. 1. P. 1–18.
10. *Fucheng L.* Optimal preview control for linear discrete-time periodic systems // *Mathematical Problems in Engineering*. 2019. P. 1–11.
11. *Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н.* О методе построения внешних оценок предельного множества управляемости для линейной дискретной системы с ограниченным управлением // *Автоматика и телемеханика*. 2023. № 2. С. 3–34.
12. *Ибрагимов Д.Н., Осокин А.В., Сиротин А.Н., Сыпало К.И.* О свойствах предельных множеств управляемости для класса неустойчивых линейных систем с дискретным временем и  $L_1$ -ограничениями // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2022. № 4. С. 3–21.
13. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О некоторых свойствах множеств ограниченной управляемости для стационарных линейных дискретных систем с суммарным ограничением на управление // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2023. № 6. С. 3–32.
14. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа // М.: Физматлит, 2012.



# Refinement of the Compression Ratio for an External Estimation of the Limit 0-Controllable Set of a Linear Discrete-Time System with Bounded Control

*Anastasiya V. Simkina\**

Moscow Aviation Institute (national research university) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-8910-5728>

e-mail: [abv1998@yandex.ru](mailto:abv1998@yandex.ru)

The problem of constructing an optimal external estimate of the limit controllable set for a linear discrete-time system with convex control constraints is considered. The estimation is based on the principle of contraction mappings. The optimal estimation parameters are determined based on the analysis of the results of numerical modeling. Examples are given.

**Keywords:** discrete-time system, limit controllable set, limit achievable set, principle of contraction mappings, compression ratio, convex set, polyhedral approximation.

## For citation:

Simkina A.V. Refinement of the Compression Ratio for an External Estimation of the Limit 0-Controllable Set of a Linear Discrete-Time System with Bounded Control. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 4, pp. 115–128. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140408> (In Russ., abstr. in Engl.).

## References

1. Ibragimov D.N. O zadache bystrodeystviya dlya klassa lineynykh avtonomnykh beskonечноmernykh system c diskretnym vremenem, ogranichenym upravleniem I vyroždennym operatorom [On the problem of speed for a class of linear autonomous infinite-dimensional systems with discrete time, limited control and a degenerate operator] *Autom. Remote Control* 2019. № 3. С. 3–25. (In Russ.).
2. Colonius F. Controllability Properties and Invariance Pressure for Linear Discrete-Time Systems. *Journal of Dynamics and Differential Equations*. 2022. № 34. P. 5–28.
3. Ge S.S. Reachability and controllability of switched linear discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Contr* I. 2001. V.46, No. 9. P. 1437–1441.
4. Heemels W.P. Null controllability of discrete-time linear systems with input and state constraints. *47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancun.* – 2008. – P. 3487–3492.
5. Kaba M.D. A spectral characterization of controllability for linear discrete-time systems with conic constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2015. Vol. 53, No. 4. P. 2350–2372.

\**Anastasiya V. Simkina*, Postgraduate student, assistant professor at the Department of Probability Theory and Computer Modeling, Moscow Aviation Institute (national research university) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-8910-5728>, e-mail: [abv1998@yandex.ru](mailto:abv1998@yandex.ru)



6. Benvenuti L. The geometry of the reachability set for linear discrete-time systems with positive controls. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 2006. Vol. 28, No. 2. P. 306–325.
7. Darup M.S. On general relations between nullcontrollable and controlled invariant sets for linear constrained systems. *53rd IEEE Conference on Decision and Control*. Los Angeles. 2014. P. 6323–6328.
8. Tochilin P.A. O postroenii nevyuklykh approksimacii mnogestv dostigimosti kusochno-lineynich sistem [On the construction of non-convex approximations of sets of attainability of piecewise linear systems] *Differential equations*. 2015. Vol. 51, No. 11. pp. 1503–1515. (In Russ.).
9. Kuntsevich V.M. Attainability Domains for Linear and Some Classes of Nonlinear Discrete Systems and Their Control *J. Autom. Inform. Sci.* 2010. V. 42, No. 1. P. 1–18. (In Russ.).
10. Fucheng L. Optimal preview control for linear discrete-time periodic systems. *Mathematical Problems in Engineering*. 2019. P. 1–11.
11. Berendakova A.V., Ibragimov D.N. O metode postroeniya vneschnykh otsenok predelnogo mnogestva upravlyaemosti dlya lineynoy diskretnoy sistemy s ogranichennym upravleniem [On the method of constructing external estimates of the limit set of controllability for a linear discrete system with bounded control] *Automat. Remote Control*. 2023. No. 2. С. 3–34. (In Russ.).
12. Ibragimov D.N., Osokin A.V., Sirotin A.N., Sypalo K.I. O svoistvah predelnykh mnogestv upravlyaemosti dlya klassa neustoiichivyykh lineynykh sistem s diskretnym vremenem [On the properties of limit sets of controllability for a class of unstable linear systems with discrete time and  $l_1$  constraints] *Izv. RAS. TISU*. 2022. No. 4. pp. 3–21. (In Russ.).
13. Ibragimov D.N., Sirotin A.N. O nekotorykh svoistvah mnogestv ogranichennoy upravlyaemosti dlya statsionarnykh lineynykh diskretnykh sistem s summarnym ogranicheniem na upravlenie [On some properties of limited controllability sets for stationary linear discrete systems with a total control constraint] *Izv. RAS. TISU*. 2023. No. 6. pp. 3–32. (In Russ.).
14. Kolmogorov A.N., Fomin. S.V. Elementy teorii funktsii i funkcionalnogo analiza [Elements of the theory of functions and functional analysis] *Moscow: Fizmatlit*, 2012. (In Russ.).

Получена 29.10.2024

Принята в печать 11.11.2024

Received 29.10.2024

Accepted 11.11.2024