

## ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

УДК 519.7

### **Приближенный метод синтеза непрерывных систем совместного оценивания и управления на основе SDRE технологии**

***Пантелеев А.В.*** \*

Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет) (МАИ)  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>  
e-mail: [avpanteleev@inbox.ru](mailto:avpanteleev@inbox.ru)

***Хвошнянская Е.А.*** \*\*

Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет) (МАИ)  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-6901-8720>  
e-mail: [e-mail: Liza190401@mail.ru](mailto:Liza190401@mail.ru)

Рассматривается проблема приближенного синтеза замкнутой нелинейной непрерывной системы совместного оценивания и управления. Используется подход, основанный на применении идеи теоремы разделения для линейных динамических систем. При помощи операции факторизации нелинейная система преобразуется к похожей по структуре на линейную систему, а уже к трансформированной системе применяются алгоритмы синтеза оптимального линейного регулятора и наблюдателя состояния, особенностью которых является зависимость матриц, входящих в соответствующие уравнения Риккати, от вектора состояния. Приведен пример синтеза наблюдателя состояния и регулятора, демонстрирующий применение предложенного алгоритма.

**Ключевые слова:** оптимальный линейный регулятор, наблюдатель состояния, принцип разделения, уравнение Риккати, нелинейная динамическая система.

#### **Для цитаты:**

*Пантелеев А.В., Хвошнянская Е.А.* Приближенный метод синтеза непрерывных систем совместного оценивания и управления на основе SDRE технологии // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 3. С. 41–62. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140303>



**\*Пантелеев Андрей Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики института «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: [avpanteleev@inbox.ru](mailto:avpanteleev@inbox.ru)

**\*\*Хвошнянская Елизавета Аркадьевна**, студент магистратуры, институт «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-6901-8720>, e-mail: [Liza190401@mail.ru](mailto:Liza190401@mail.ru)

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Большинство задач нахождения оптимального управления нелинейными динамическими решается при предположениях об отсутствии информации о векторе состояния (программное управление), о наличии информации о части координат вектора состояния (управление с неполной обратной связью) или о наличии полной информации о векторе состояния (управление с полной обратной связью). Для их решения успешно применяются необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума, соотношения, полученные на основе достаточных условий оптимальности, достаточные условия в форме уравнения Беллмана [1]. В задачах, где информация о векторе состояния или его части не доступна, т.е. поступает некоторая косвенная информация с модели измерительной системы, требуется решать задачу об определении управления, зависящего от поступающей информации, причем эта информация может накапливаться на отрезке от начального момента времени до текущего. Если модели объекта управления и измерительной системы являются линейными, а критерий качества управления квадратичным, то в стохастическом случае справедлива теорема разделения о возможности независимого решения задачи синтеза оптимального линейного регулятора и оптимального фильтра Калмана с последующей заменой вектора состояния в линейном регуляторе его оценкой, вырабатываемой фильтром [1, 2]. При этом управление с обратной связью, формируемой фильтром и линейным регулятором, является оптимальным, т.е. обеспечивает минимальное значение величины математического ожидания квадратичного критерия качества. В детерминированном случае использование аналогичного подхода, т.е. нахождения оптимального линейного регулятора и наблюдателя состояния полного или низкого порядка с последующей заменой вектора состояния в регуляторе его оценкой, вырабатываемой наблюдателем, приводит лишь к субоптимальному управлению. Оно тем ближе к оптимальному, чем точнее вырабатываемая оценка вектора состояния [1, 2].

При управлении нелинейными системами также возможно применение идей теоремы разделения. При этом постулируются структуры управления объектом и управления наблюдателем или фильтром с учетом возможных ограничений на управление, содержащие конечное число параметров [3]. Наилучшие значения параметров находятся, как правило, с помощью применения современных метаэвристических алгоритмов условной глобальной оптимизации [4].

В статье предлагается альтернативный подход, связанный с приближенной заменой нелинейной системы линейной, с матрицами, зависящими от вектора состояния. Для этого применяется операция факторизации [5–11], которая в общем случае не является однозначной. Такое представление позволяет описать поведение нелинейной системы в некоторой окрестности начала координат. Функционал качества также представляется в форме, аналогичной квадратичному функционалу, применяемому в линейных системах, при этом функционал является квадратичным по управлению и нелинейным по вектору состояния. Такое представление позволяет представить решение задачи в форме, аналогичной известному результату в теории линейных систем [5–11]. Оптимальность при этом не достигается, но процедура синтеза управления упрощается. Главной вычислительной проблемой описанного подхода является необходимость решения уравнения Риккати, коэффициенты которого зависят от вектора состояния (State-Dependent Riccati Equation, SDRE).

Для решения задачи оценивания вектора состояния также может применяться аналогичный подход [12–14]. При этом возможно построение асимптотического наблюдателя, обеспечивающего стремление ошибки оценивания к нулю на полубесконечном промежутке времени [14].

Для решения задачи синтеза системы совместного управления и оценивания предлагается объединить в едином алгоритме два описанных подхода.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть уравнение, описывающее поведение модели объекта управления, имеет вид

$$\dot{x}(t) = A(x(t)) x(t) + B(x(t)) u(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

а модель измерительной системы

$$y = C(x(t))x(t), \quad (2)$$

где  $x \in R^n$  – вектор состояния,  $u \in R^q$  – вектор управления,  $y \in R^m$  – вектор измерений,  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $C(x)$  – матрицы размеров  $(n \times n)$ ,  $(n \times q)$ ,  $(m \times n)$  соответственно, зависящие от вектора состояния  $x$ ;  $t \in [0, \infty)$  – время;  $x_0$  – вектор начальных состояний.

Предполагается, что непрерывные матричные функции  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $C(x)$  получены в результате реализации процесса факторизации нелинейной системы вида

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + B(x(t))u(t),$$

$$y(t) = h(x(t)),$$

где  $f(\cdot) \in C^1(R^n)$ ,  $h(\cdot) \in C^1(R^n)$ , т.е. ее приближенной замены системой, аналогичной линейной [5–11]. Известно, что при  $n > 1$  эта процедура является неединственной [7, 9, 11].

Функционал качества управления квадратичный:

$$\tilde{I} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[ x^T(t) \tilde{S}(x(t)) x(t) + u^T(t) \tilde{Q}(x(t)) u(t) \right] dt, \quad (3)$$



где  $\tilde{S}(x)$ ,  $\tilde{Q}(x)$  – непрерывные весовые матрицы размеров  $(n \times n)$ ,  $(q \times q)$  соответственно, причем  $\tilde{S}(x) \geq 0$ ,  $\tilde{Q}(x) > 0 \quad \forall x \in R^n$ . Функционал (3) является квадратичным по вектору управления  $u$  и неквадратичным по вектору состояния  $x$ .

Для приближенного решения задачи минимизации величины функционала (3) предлагается использовать идею разделения задач нахождения управления  $u(t, x)$  с полной обратной связью объектом (1) и процедуру определения оценки  $\hat{x}(t)$  вектора состояния по результатам измерений (2), а потом объединить полученные результаты в законе управления вида  $u(t, \hat{x})$ .

Требуется разработать и реализовать алгоритм нахождения управления в задаче (1)–(3), близкого по величине функционала (3) к оптимальному.

### 3. СТРАТЕГИЯ СИНТЕЗА СУБОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Стратегия состоит из нескольких этапов.

*Первый этап* (синтез регулятора). При формировании алгоритма предлагается реализовать идеи синтеза субоптимальных линейных систем управления, используя аналогию с уравнениями (1) и (2), а также структурой функционала (3). Отличие от классического случая заключается в зависимости матриц  $A, B, \tilde{Q}, \tilde{S}$  от вектора состояния. Поэтому далее реализуется подход, использующий решение уравнений Риккати с коэффициентами, зависящими от вектора состояния [5–11]. Так как в рассматриваемой задаче промежуток функционирования системы является полубесконечным, то по аналогии с линейными стационарными системами составляется и решается алгебраическое уравнение Риккати, формально получаемое из соответствующего дифференциального уравнения путем приравнивания производной решения к нулевой матрице.

Решая алгебраическое уравнение Риккати с коэффициентами, зависящими от вектора состояния  $x$ :

$$A^T(x)K_2(x) + K_2(x)A(x) - K_2(x)B(x)\tilde{Q}^{-1}(x)B^T(x)K_2(x) + \tilde{S}(x) = 0, \quad (4)$$

можно найти матрицу  $K_2(x)$  и явный вид управления в форме оптимального линейного регулятора [5–11]

$$u(x) = -\tilde{Q}^{-1}(x)B^T(x)K_2(x)x. \quad (5)$$

Известно, что если  $K_2(x)$  есть единственное, симметричное, положительно определенное решение уравнения (4), то управление (5) при использовании в (1) порождает устойчивую замкнутую систему, т.е.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ . Можно показать, что описанный подход при  $n > 1$  дает лишь приближенное решение задачи минимизации величины функционала (3). Поскольку решение уравнения (4) для всех  $x$  затруднительно, то управление объектом находится в процессе моделирования при каждом текущем значении времени:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(x(t)) x(t) + B(x(t)) u(t), \quad x(0) = x_0, \\ u(t) &= u(x(t)) = -\tilde{Q}^{-1}(x(t)) B^T(x(t)) K_2(x(t)) x(t), \end{aligned} \quad (6)$$

$$A^T(x(t)) K_2(x(t)) + K_2(x(t)) A(x(t)) - K_2(x(t)) B(x(t)) \tilde{Q}^{-1}(x(t)) B^T(x(t)) K_2(x(t)) + \tilde{S}(x(t)) = 0.$$

Если при решении системы (6) используется один из численных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений [16], то моменты времени, в которых требуется решение SDRE, определяются величиной шага интегрирования.

*Второй этап* (синтез наблюдателя состояния). Поскольку вектор состояния в рассматриваемой задаче в общем случае не доступен измерению, требуется нахождение его оценки с помощью наблюдателя состояния. Его уравнение задается в форме [14]

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(\hat{x}(t)) \hat{x}(t) + B(\hat{x}(t)) u(t) + K(\hat{x}(t))[y - C(\hat{x}(t))\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \quad (7)$$

где  $\hat{x} \in R^n$  – вектор оценок координат вектора состояния,  $K(\hat{x}(t))$  – неизвестная непрерывная матрица размеров  $(n \times m)$ ,  $\hat{x}_0$  – вектор начальных значений оценок координат вектора состояния,  $t \in [0, \infty)$  – время.

Матрица  $K(\hat{x}(t))$  выполняет функцию управления процессом наблюдения:

$$K(\hat{x}(t)) = P(\hat{x}(t)) C^T(\hat{x}(t)) Q(\hat{x}(t)), \quad (8)$$

где матрица  $P(\hat{x}(t))$  является решением дифференциального уравнения Риккати, коэффициенты которого зависят от оценок вектора состояния [14]:

$$\begin{aligned} \dot{P}(\hat{x}(t)) &= (A(\hat{x}(t)) + \alpha E)P(\hat{x}(t)) + P(\hat{x}(t))(A^T(\hat{x}(t)) + \alpha E) - \\ &- P(\hat{x}(t)) B(\hat{x}(t)) Q^{-1}(\hat{x}(t)) B^T(\hat{x}(t)) P(\hat{x}(t)) + S(\hat{x}(t)), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\alpha > 0$  – подбираемый параметр, который определяет скорость уменьшения величины ошибки наблюдателя,  $Q(\hat{x})$ ,  $S(\hat{x})$  – симметрические положительно определенные матрицы размеров  $(m \times m)$ ,  $(n \times n)$  соответственно, определяющие поведение вектора оценки во времени. Заметим, что в уравнении наблюдателя (7) используется соотношение (6) для регулятора с полной обратной связью.

Для получения уравнения, описывающего изменение ошибки оценивания, следует вычесть из уравнения (1) уравнение (7) с учетом (2) и обозначения  $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = A(x(t)) x(t) + B(x(t)) u(t) - \{A(\hat{x}(t)) \hat{x}(t) + B(\hat{x}(t)) u(t) + K(\hat{x}(t))[y - C(\hat{x}(t))\hat{x}(t)]\},$$

$$\varepsilon(0) = x_0 - \hat{x}_0.$$

При выполнении ряда дополнительных условий на матричные функции  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $C(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $S(x)$ , ограничивающих скорость их роста, и параметр  $\alpha$ , а также поточечного выполнения критерия наблюдаемости:



$$\text{rg}(C^T(x) \quad A^T(x)C^T(x) \quad (A^T(x))^2 C^T(x) \dots (A^T(x))^{n-1} C^T(x)) = n$$

в окрестности начала координат, можно доказать [14], что в результате синтезируется асимптотический наблюдатель с  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Для упрощения процедуры синтеза наблюдателя в уравнении (9) предлагается положить  $\dot{P}(\hat{x}(t)) = 0$  аналогично задаче синтеза регулятора, т.е. вместо дифференциального решать алгебраическое уравнение Риккати (SDRE):

$$\begin{aligned} & [A(\hat{x}(t)) + \alpha E]P(\hat{x}(t)) + P(\hat{x}(t))[A^T(\hat{x}(t)) + \alpha E] - \\ & - P(\hat{x}(t))B(\hat{x}(t))Q^{-1}(\hat{x}(t))B^T(\hat{x}(t))P(\hat{x}(t)) + S(\hat{x}(t)) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Для нахождения оценки вектора состояния требуется решить совместно систему уравнений (6),(7),(8),(10). При применении численных алгоритмов интегрирования дифференциальных уравнений [16] следует учитывать, что моменты времени, в которых требуется найти решение SDRE вида (4),(10), определяются величиной шага интегрирования.

*Третий этап.* Применяя идею принципа расширения, вместо вектора состояния подставим в закон управления вектор оценки состояния:

$$u(t) = u(\hat{x}(t)) = -\tilde{Q}^{-1}(\hat{x}(t))B^T(\hat{x}(t))K_2(\hat{x}(t))\hat{x}(t) \quad (11)$$

Для оценки качества синтезируемого управления требуется реализовать процедуру совместного решения системы уравнений (1),(2),(7),(8),(11) с учетом необходимости решения SDRE (4),(10) в каждый момент времени при известных векторах  $x(t)$  и  $\hat{x}(t)$ .

#### 4. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

1. Задать матрицы  $A(x), B(x), C(x), Q(x), S(x), \tilde{Q}(x), \tilde{S}(x), \hat{x}_0$ , входящие в математические модели (1),(2),(3),(7),(9). Проверить поточечное выполнение критерия наблюдаемости:

$$\text{rg}(C^T(x) \quad A^T(x)C^T(x) \quad (A^T(x))^2 C^T(x) \dots (A^T(x))^{n-1} C^T(x)) = n$$

в окрестности начала координат. Задать начальные векторы  $x(0) = x_0, \hat{x}(0) = \hat{x}_0$ .

2. Найти матрицу  $K_2(x)$ , решая алгебраическое уравнение Риккати (SDRE):

$$A^T(x)K_2(x) + K_2(x)A(x) - K_2(x)B(x)\tilde{Q}^{-1}(x)B^T(x)K_2(x) + \tilde{S}(x) = 0$$

и управление  $u(x) = -\tilde{Q}^{-1}(x)B^T(x)K_2(x)x$ .

3. Найти матрицу  $P(\hat{x})$ , решая алгебраическое уравнение Риккати (SDRE):

$$[A(\hat{x}) + \alpha E]P(\hat{x}) + P(\hat{x})[A^T(\hat{x}) + \alpha E] - P(\hat{x})C^T(\hat{x})Q^{-1}C(\hat{x})P(\hat{x}) + S(\hat{x}) = 0$$

и управление процессом наблюдения  $K(\hat{x}) = P(\hat{x})C^T(\hat{x})Q(\hat{x})$ ,



4. Решить задачу оценивания координат вектора состояния, моделируя систему

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(x(t)) x(t) + B(x(t)) u(t), \quad x(0) = x_0, \\ u(t) &= u(x(t)) = -\tilde{Q}^{-1}(x(t)) B^T(x(t)) K_2(x(t)) x(t), \\ A^T(x(t)) K_2(x(t)) + K_2(x(t)) A(x(t)) - K_2(x(t)) B(x(t)) \tilde{Q}^{-1}(x(t)) B^T(x(t)) K_2(x(t)) + \tilde{S}(x(t)) &= 0, \\ \dot{\hat{x}}(t) &= A(\hat{x}(t)) \hat{x}(t) + B(\hat{x}(t)) u(t) + K(\hat{x}(t)) [y - C(\hat{x}(t)) \hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \\ K(\hat{x}(t)) &= P(\hat{x}(t)) C^T(\hat{x}(t)) Q(\hat{x}(t)), \\ [A(\hat{x}(t)) + \alpha E] P(\hat{x}(t)) + P(\hat{x}(t)) [A^T(\hat{x}(t)) + \alpha E] - \\ - P(\hat{x}(t)) B(\hat{x}(t)) Q^{-1}(\hat{x}(t)) B^T(\hat{x}(t)) P(\hat{x}(t)) + S(\hat{x}(t)) &= 0 \end{aligned}$$

сравнивая поведение векторов  $\hat{x}(t)$  и  $x(t)$  для различных начальных состояний  $x_0$ .

5. Решить задачу управления по оценке вектора состояния, моделируя систему

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(x(t)) x(t) + B(x(t)) u(t), \quad x(0) = x_0, \\ A^T(x(t)) K_2(x(t)) + K_2(x(t)) A(x(t)) - K_2(x(t)) B(x(t)) \tilde{Q}^{-1}(x(t)) B^T(x(t)) K_2(x(t)) + \tilde{S}(x(t)) &= 0, \\ \dot{\hat{x}}(t) &= A(\hat{x}(t)) \hat{x}(t) + B(\hat{x}(t)) u(t) + K(\hat{x}(t)) [y - C(\hat{x}(t)) \hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \\ K(\hat{x}(t)) &= P(\hat{x}(t)) C^T(\hat{x}(t)) Q(\hat{x}(t)), \\ [A(\hat{x}(t)) + \alpha E] P(\hat{x}(t)) + P(\hat{x}(t)) [A^T(\hat{x}(t)) + \alpha E] - \\ - P(\hat{x}(t)) B(\hat{x}(t)) Q^{-1}(\hat{x}(t)) B^T(\hat{x}(t)) P(\hat{x}(t)) + S(\hat{x}(t)) &= 0, \\ u(t) &= u(\hat{x}(t)) = -\tilde{Q}^{-1}(\hat{x}(t)) B^T(\hat{x}(t)) K_2(\hat{x}(t)) \hat{x}(t) \end{aligned}$$

для различных начальных состояний  $x_0$ .

## 5. ПРИКЛАДНОЙ ПРИМЕР

Рассматривается задача управления квадрокоптером с четырьмя независимыми приводами и электрической силовой установкой, расположенной в центре тяжести. Математическая модель устройства имеет шесть степеней свободы, где вертикальное перемещение в глобальной системе координат и три угла Эйлера являются управляемыми параметрами.

Для описания системы используются углы Эйлера:  $\varphi \in [-\pi; \pi]$  – угол крена,  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  – угол тангажа,  $\psi \in [-\pi; \pi]$  – угол рыскания.

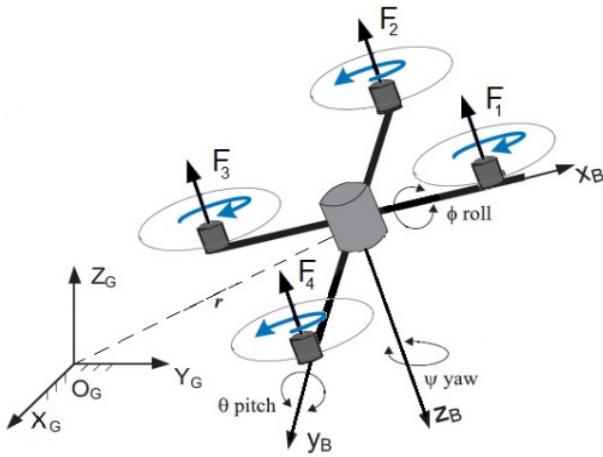


Рис. 1. Модель квадрокоптера [15]

Параметры математической модели (1) и (2):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_6 I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_6 I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 I_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{l}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{I_z} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0,11 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0,1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{pmatrix},$$

где  $I_1 = \frac{(I_y - I_z)}{I_x}$ ,  $I_2 = \frac{(I_z - I_x)}{I_y}$ ,  $I_3 = \frac{(I_x - I_y)}{I_z}$ ,  $I_x, I_y, I_z$  – моменты инерции, вектор состояния  $x = (x_1, \dots, x_6)^T = (\varphi \ \dot{\varphi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi})^T$ . Параметры, используемые при моделировании движения, представлены в табл. 1.





Матрицы, определяющие функционал (3):

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Матрицы и параметр, входящие в (8),(9):

$$S = \begin{pmatrix} 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 21.$$

Таблица 1

**Параметры, используемые при моделировании движения**

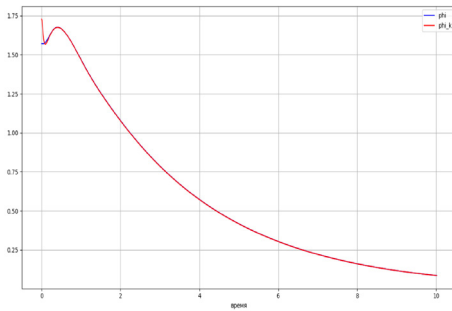
Параметр	Значение	Единица измерения
$l$	0,3	$kgm^2$
$I_x$	0,0081	$m$
$I_y$	0,0081	$kgm^2$
$I_z$	0,0162	$kgm^2$

где  $l$  – длина плеча квадрокоптера.

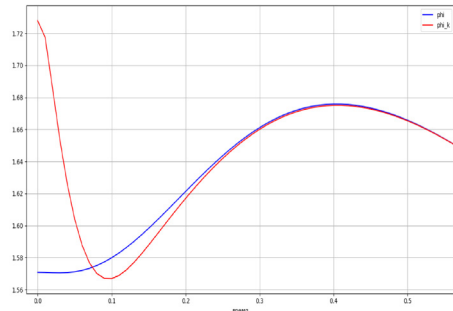
Начальные условия задаются в окрестности базового начального состояния  $x(0) = (\pi / 2; 0; 3\pi / 2; 0; \pi; 0)^T$ .

Рассмотрим реализацию пунктов 1–4 алгоритма, т.е. проанализируем качество решения задачи синтеза наблюдателя состояния. В модели объекта используется регулятор с полной обратной связью по вектору состояния. Моделирование системы управления производилось методом Рунге-Кутты 4 порядка [16] с шагом  $h = 0,001$ .

Графики изменения вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые секунды полета при начальном состоянии наблюдателя  $\hat{x}(0) = (1, 1\pi / 2; 0; 3, 3\pi / 2; 0; 1, 1\pi; 0)^T$  приведены на рис. 2–7.

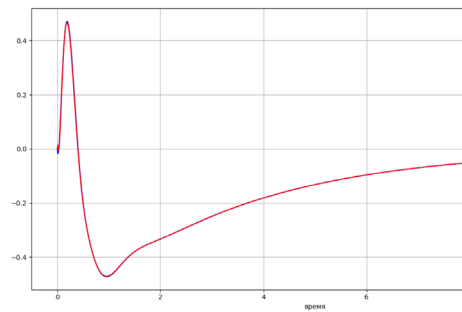


а)

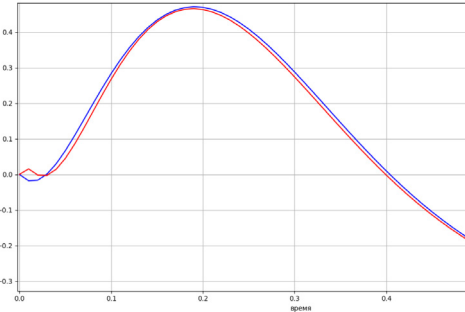


б)

Рис. 2. а) график изменения координаты  $\varphi$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты  $\varphi$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  на промежутке от 0 до 0,6 секунд

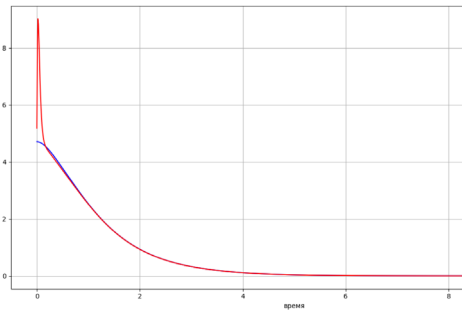


а)

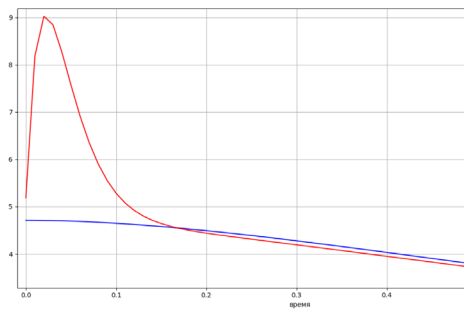


б)

Рис. 3. а) график изменения координаты  $\dot{\varphi}$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты  $\dot{\varphi}$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  на промежутке от 0 до 0,6 секунд



а)



б)

Рис. 4. а) график изменения координаты  $\theta$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты  $\theta$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  на промежутке от 0 до 0,6 секунд

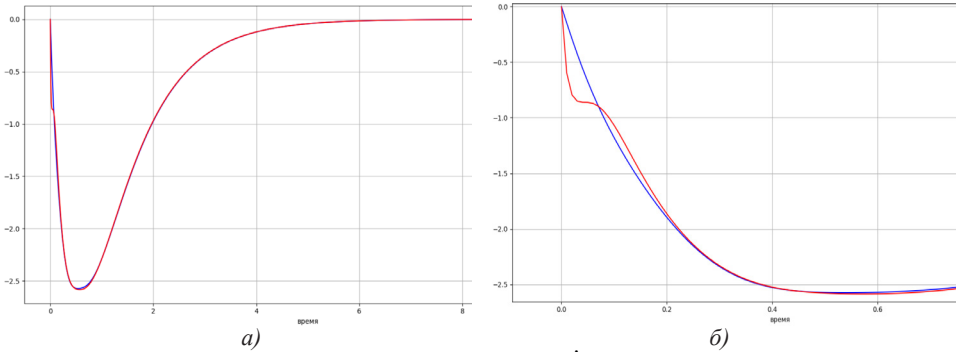


Рис. 5. а) график изменения координаты  $\dot{\theta}$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты  $\dot{\theta}$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  на промежутке от 0 до 0,8 секунд

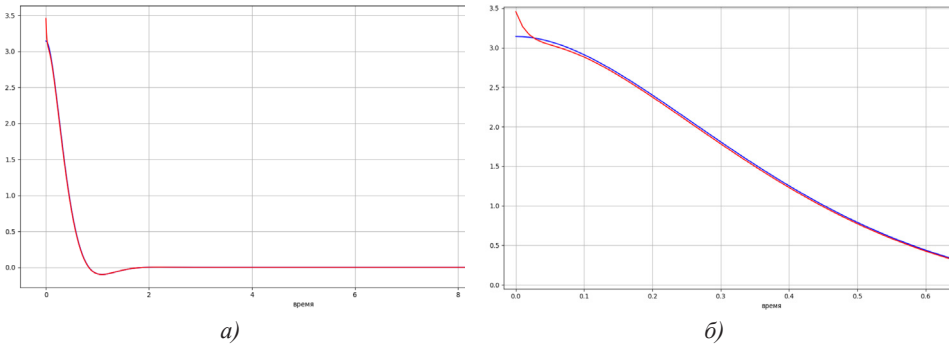


Рис. 6. а) график изменения координаты  $\psi$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты  $\psi$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  на промежутке от 0 до 0,7 секунд

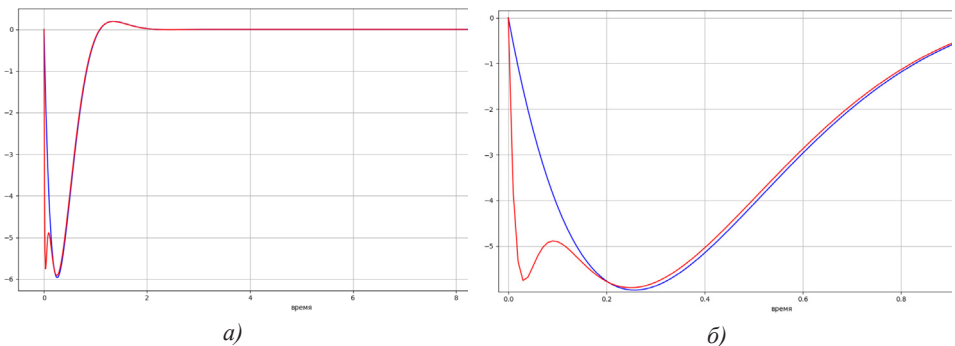
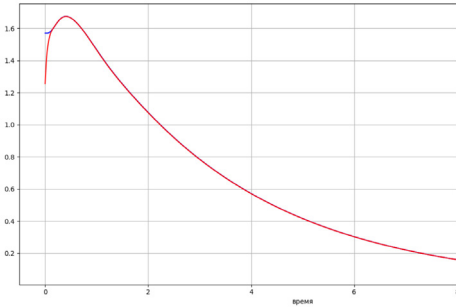


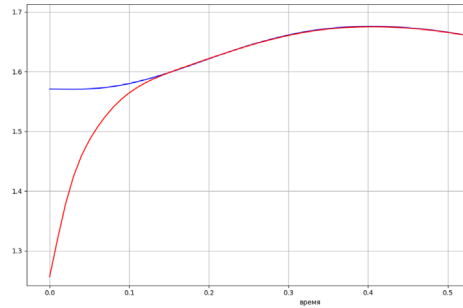
Рис. 7. а) график изменения координаты  $\dot{\psi}$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты  $\dot{\psi}$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  на промежутке от 0 до 1,1 секунд



Графики изменения вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые секунды полета при начальном состоянии наблюдателя  $\hat{x}(0) = (0, 4\pi; 0; 0, 4\pi; 0; 0, 9\pi; 0)^T$  приведены на рис. 8–13.

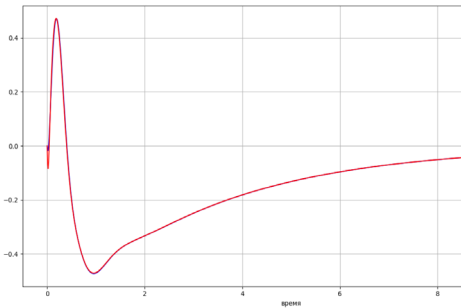


а)

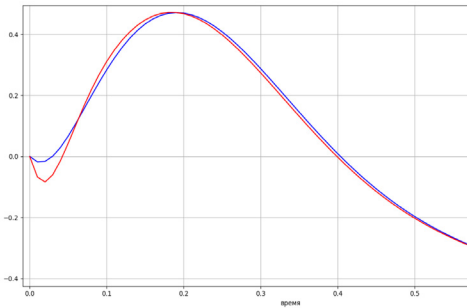


б)

Рис. 8. а) график изменения координаты  $\varphi$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты  $\varphi$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  на промежутке от 0 до 0,6 секунд



а)



б)

Рис. 9. а) график изменения координаты  $\dot{\varphi}$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты  $\dot{\varphi}$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  на промежутке от 0 до 0,6 секунд

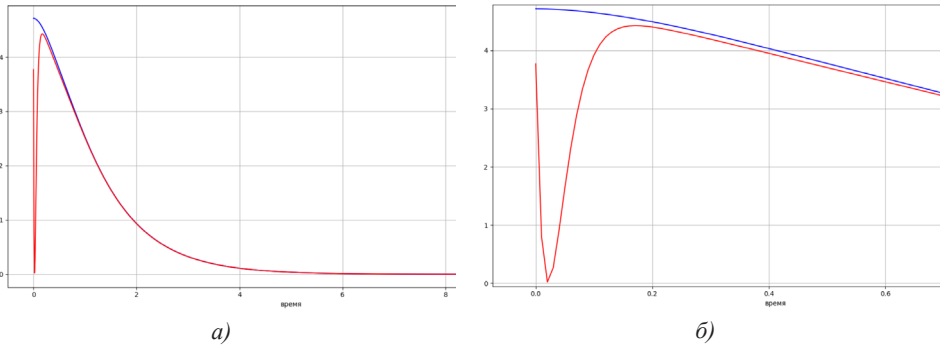


Рис. 10. а) график изменения координаты  $\theta$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты  $\theta$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  на промежутке от 0 до 0,6 секунд

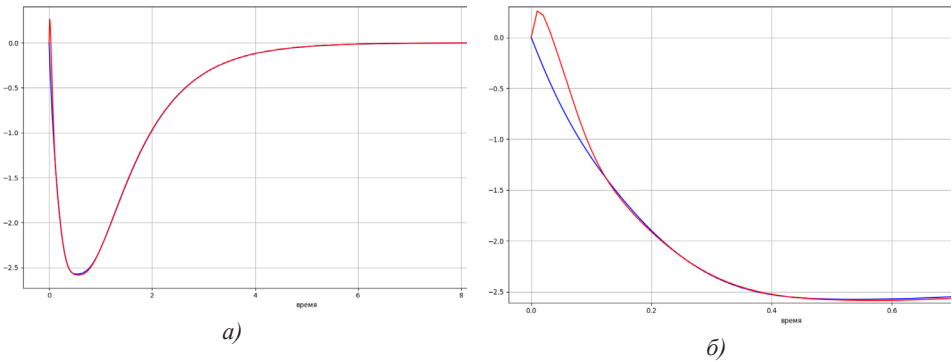


Рис. 11. а) график изменения координаты  $\dot{\theta}$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты  $\dot{\theta}$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  на промежутке от 0 до 0,8 секунд

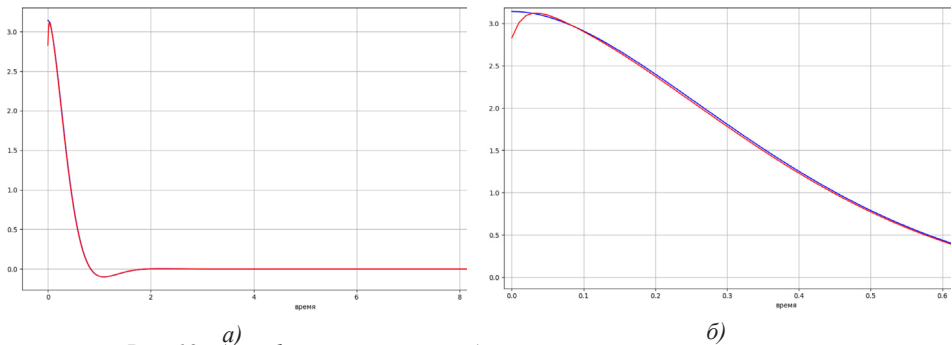


Рис. 12. а) график изменения координаты  $\psi$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты  $\psi$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  на промежутке от 0 до 0,7 секунд

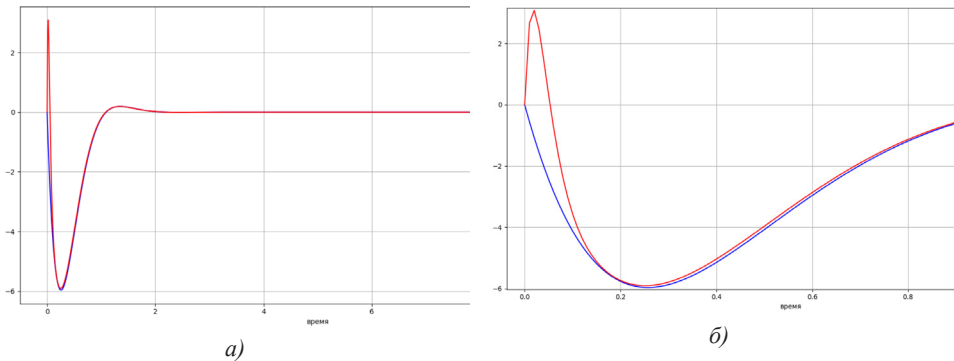


Рис. 13. а) график изменения координаты  $\psi$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты  $\psi$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  на промежутке от 0 до 1,1 секунд

Приведенные результаты моделирования показывают, что ошибка оценивания достаточно быстро стремится к нулю, что свидетельствует об эффективности наблюдателя состояния.

Продemonстрируем реализацию пункта 5 алгоритма, в котором используется управление по оценке вектора состояния системы. Графики изменения вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые секунды полета при начальном состоянии наблюдателя:

$$\hat{x}(0) = (1, 1\pi / 2; 0; 3, 3\pi / 2; 0; 1, 1\pi; 0)^T$$

приведены на рис. 14–19.

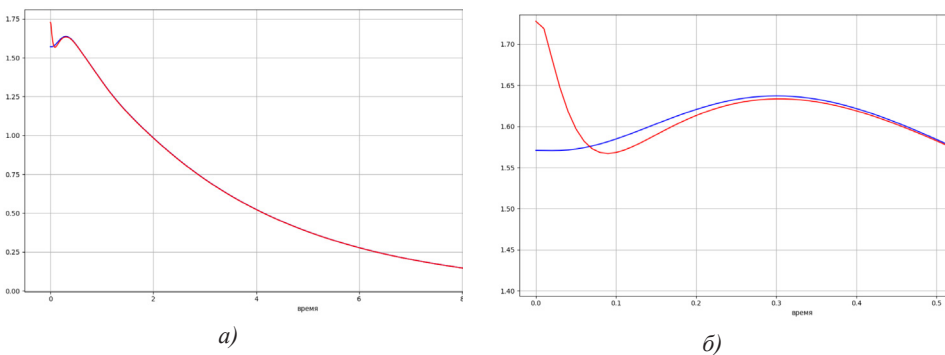
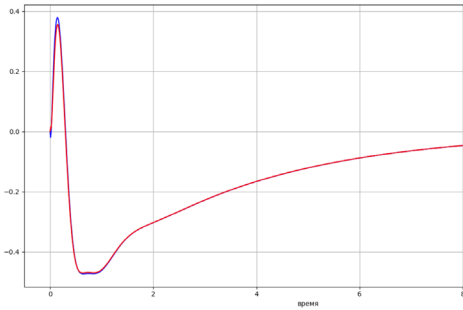
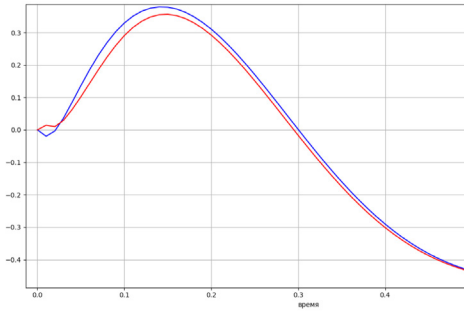


Рис. 14. а) график изменения координаты  $\varphi$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты  $\varphi$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  на промежутке от 0 до 0,6 секунд

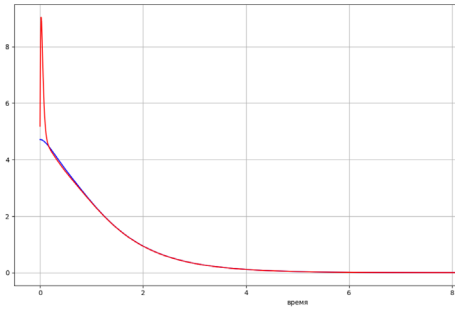


а)

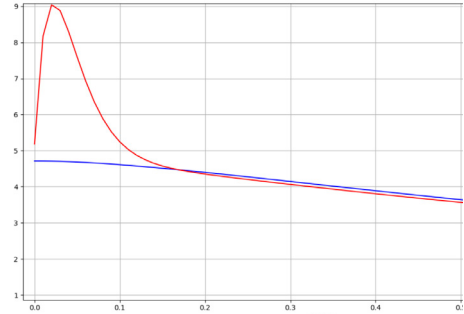


б)

Рис. 15. а) график изменения координаты  $\dot{x}$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты  $\dot{x}$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  на промежутке от 0 до 0,6 секунд

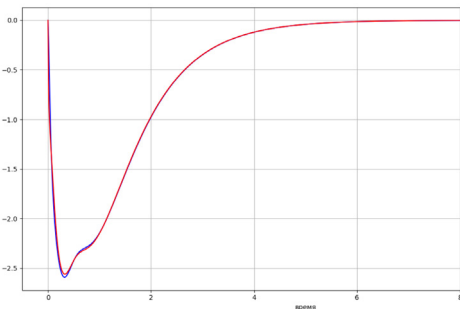


а)

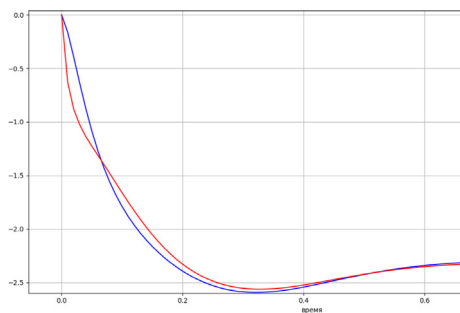


б)

Рис. 16. а) график изменения координаты  $\theta$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты  $\theta$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  на промежутке от 0 до 0,6 секунд

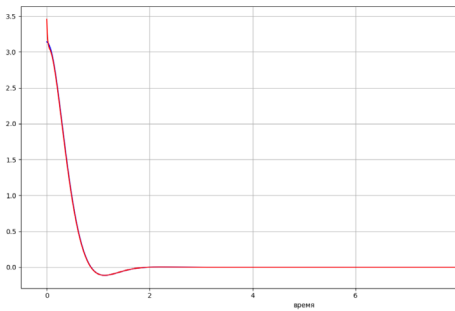


а)

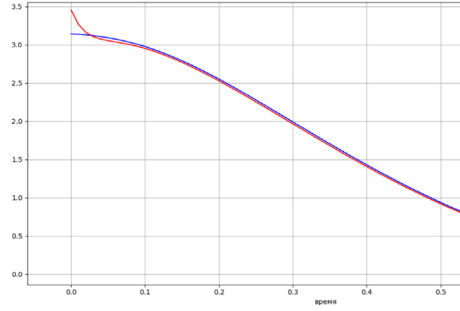


б)

Рис. 17. – а) график изменения координаты  $\dot{\theta}$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты  $\dot{\theta}$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  на промежутке от 0 до 0,8 секунд

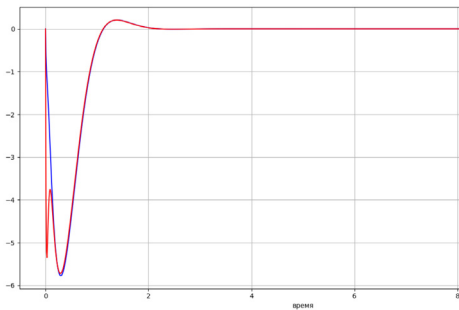


а)

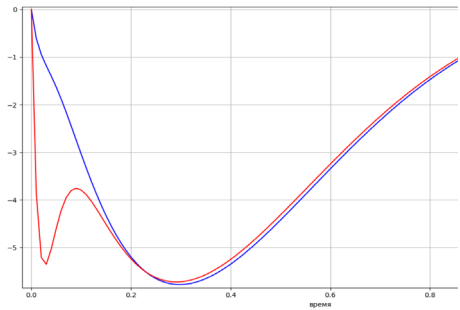


б)

Рис. 18. а) график изменения координаты  $\psi$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты  $\psi$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  на промежутке от 0 до 0,7 секунд



а)

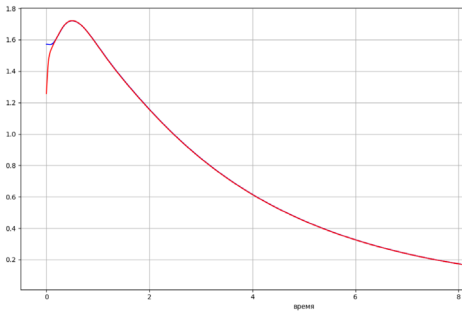


б)

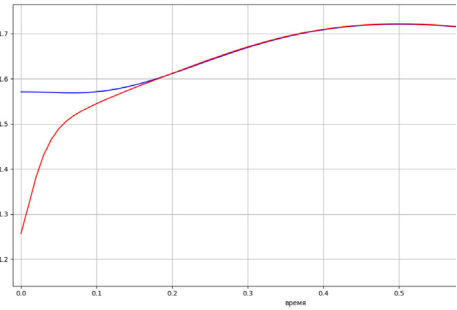
Рис. 19. а) график изменения координаты  $\psi$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты  $\psi$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  на промежутке от 0 до 1,1 секунд

Графики изменения вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые секунды полета при начальном состоянии наблюдателя  $\hat{x}(0) = (0, 4\pi; 0; 0, 4\pi; 0; 0, 9\pi; 0)^T$  приведены на рис. 20–25.



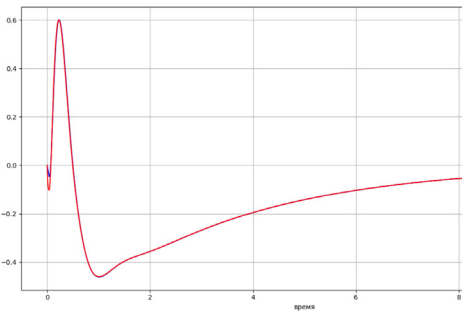


а)

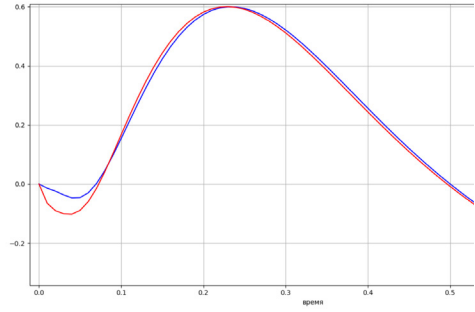


б)

Рис. 20. а) график изменения координаты  $\varphi$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты  $\varphi$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  на промежутке от 0 до 0,7 секунд

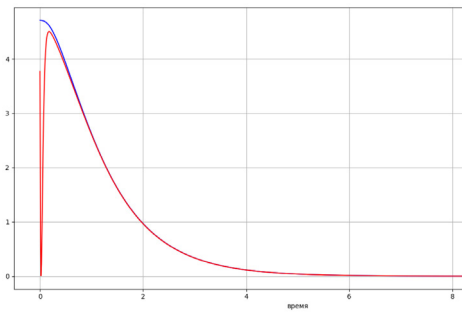


а)

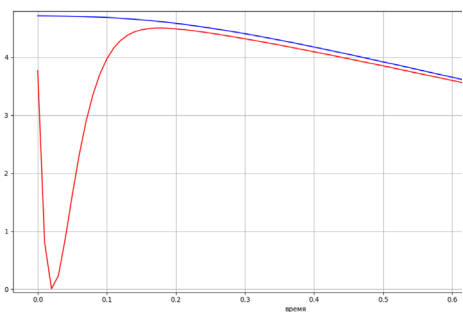


б)

Рис. 21. а) график изменения координаты  $\dot{\varphi}$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты  $\dot{\varphi}$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  на промежутке от 0 до 0,6 секунд

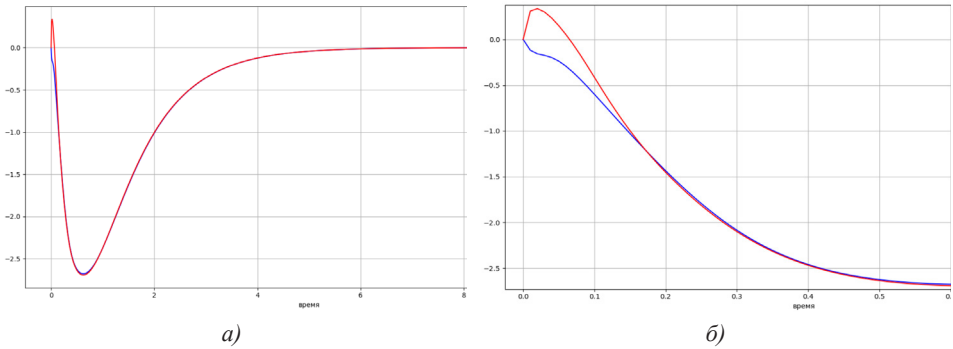


а)



б)

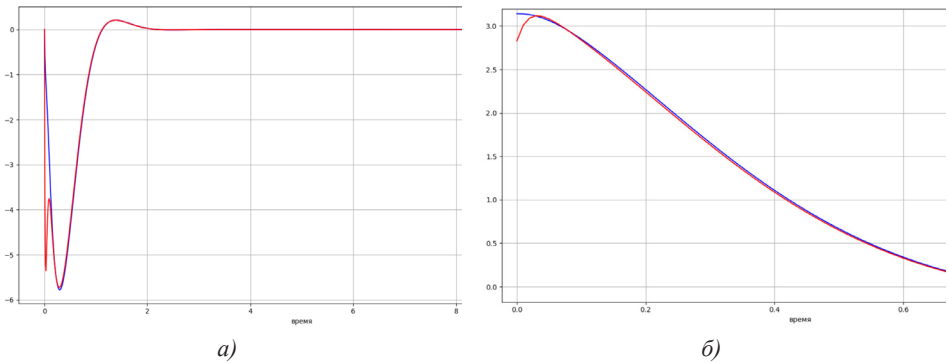
Рис. 22. а) график изменения координаты  $\theta$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты  $\theta$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  на промежутке от 0 до 0,6 секунд



а)

б)

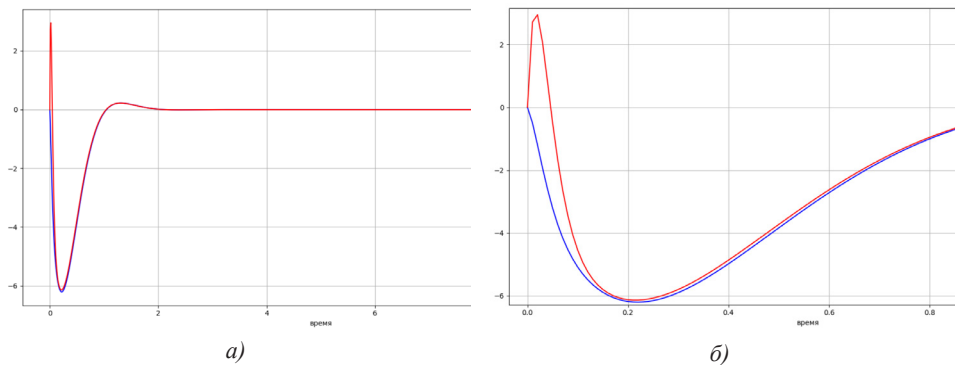
Рис. 23. а) график изменения координаты  $\dot{\theta}$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты  $\dot{\theta}$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  на промежутке от 0 до 0,8 секунд



а)

б)

Рис. 24. а) график изменения координаты  $\psi$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты  $\psi$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  на промежутке от 0 до 0,7 секунд



а)

б)

Рис. 25. а) график изменения координаты  $\dot{\psi}$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  за первые 10 секунд полета, б) график изменения координаты  $\dot{\psi}$  вектора состояния  $x$  и вектора оценивания  $\hat{x}$  на промежутке от 0 до 1,1 секунд

Приведенные результаты моделирования свидетельствуют о том, что ошибка оценивания координат вектора состояния стремится к нулю, а регулятор, использующий вместо вектора состояния его оценку, порождает желаемую структуру переходных процессов в замкнутой системе.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен алгоритм приближенного синтеза систем совместного оценивания и управления на основе гипотезы о выполнении принципа разделения и применении уравнений Риккати с матрицами, зависящими от вектора состояния объекта и наблюдателя.

### Литература

1. Пanteleev A.V., Бортаковский А.С. Теория управления в примерах и задачах. М.: ИНФРА-М, 2016.
2. Квакуернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
3. Давтян Л.Г., Пanteleev A.V. Метод параметрической оптимизации нелинейных непрерывных систем совместного оценивания и управления // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2019. № 3. С. 34–47.
4. Пanteleev A.V., Скавинская Д.В. Метаэвристические алгоритмы глобальной оптимизации. – М.: Вузовская книга, 2019.
5. Wernli A., Cook G. Suboptimal control for the nonlinear quadratic regulator problem // Automatica. 1975. Vol. 11. № 1. P. 75–84.
6. Qu Z., Cloutier J.R., Mracek C.P. A new sub-optimal nonlinear control design technique-SDARE / In Proceedings of the 13th IFAC World Congress, 1996, San Francisco, USA. P. 365–370.
7. Cloutier J.R., D'Souza C.N., Mracek C.P. Nonlinear regulation and nonlinear H $\infty$  control via the state-dependent Riccati equation technique: Part 1, theory. In Proceedings of the First International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace, Daytona Beach, FL, USA, 9–11 May 1996; Embry-Riddle Aeronautical Univ. Press: Daytona Beach, FL, USA, 1996. P. 117–130.
8. Cimen T. Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the state-dependent Riccati equation (SDRE) method // Annual Reviews in Control. 2010. Vol. 34. № 1. P. 32–51.
9. Cimen T. Survey of state-dependent Riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2012. Vol. 35. № 4. P. 1025–1047.
10. Haessig D., Friedland B. State dependent differential Riccati equation for nonlinear estimation and control / In Proceedings of the 15th IFAC Triennial World Congress, Barcelona, Spain, 2002. [Online], Available: <http://www.nt.ntnu.no/users/skoge/>
11. Nekoo C.R. Tutorial and Review on the State-dependent Riccati Equation // Journal of Applied Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 8. № 2. P. 109–166.
12. Panteleev A.V., Khvoshnyanskaya E.A. Robust estimation of state vector coordinates in the controlled airplane motion problem // Aerospace Systems. 2024. Vol. 7. № 1. P. 167–173. DOI: 10.1007/s42401-023-00224-7
13. Beikzadeh H., Taghirad H.D. Nonlinear sensorless speed control of PM synchronous motor via an SDRE observer-controller combination / In Proceedings of the 4th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications, IEEE, Xi'an, China, 2009. P. 3570–3575.
14. Beikzadeh H., Taghirad H.D. Exponential nonlinear observer based on the differential state-dependent Riccati equation // International Journal of Automation and Computing. 2012. Vol. 9. № 4. P. 358–368. DOI: 10.1007/s11633-012-0656-y



15. *Stepien S., Superczynska P.* Modified infinite-time state-dependent Riccati equation method for nonlinear affine systems: quadrotor control // *Appl. Sci.* 2021. Vol. 11. 10714. <https://doi.org/10.3390/app112210714>
16. *Киреев В.И.* Численные методы в примерах и задачах / В.И. Киреев, А.В. Пантелеев. – 4-е, Исправленное. Санкт-Петербург: Издательство Лань, 2015.



# Approximate Method for Synthesizing Continuous Joint Estimation and Control Systems Via the State-Dependent Riccati Equation Technique

**Andrei V. Panteleev\***

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>

e-mail: [avpanteleev@inbox.ru](mailto:avpanteleev@inbox.ru)

**Elizaveta A. Khvoshnyanskaya\*\***

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-6901-8720>

e-mail: [Liza190401@mail.ru](mailto:Liza190401@mail.ru)

The problem of approximate synthesis of a closed loop nonlinear continuous system of joint estimation and control is considered. An approach is used based on the application of the idea of the separation theorem for linear dynamical systems. Using the factorization operation, a nonlinear system is transformed into a structure similar to a linear system, and algorithms for synthesizing an optimal linear controller and state observer are applied to the transformed system, a feature of which is the dependence of the matrices included in the corresponding Riccati equations on the state vector. An example of the synthesis of a state observer and a controller is given, demonstrating the application of the proposed algorithm.

**Keywords:** optimal linear controller, state observer, separation principle, state-dependent Riccati equation, nonlinear dynamical system.

## For citation:

Panteleev A.V., Khvoshnyanskaya E.A. Approximate Method for Synthesizing Continuous Joint Estimation and Control Systems Via the State-Dependent Riccati Equation Technique. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 3, pp. 41–62. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140303> (In Russ., abstr. in Engl.).

\***Andrei V. Panteleev**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Mathematics and Cybernetics, Institute “Computer Science and Applied Mathematics”, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: [avpanteleev@inbox.ru](mailto:avpanteleev@inbox.ru)

\*\***Elizaveta A. Khvoshnyanskaya**, Master’s Degree Student of the Institute “Computer Science and Applied Mathematics”, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-6901-8720>, e-mail: [Liza190401@mail.ru](mailto:Liza190401@mail.ru)



## References

1. Panteleev A.V., Bortakovskij A.S. *Teoriya upravleniya v primerah i zadachah*. M.: INFRA–M, 2016. (In Russ.)
2. Kwakernaak H., Sivan R. *Linear Optimal Control Systems*. NY., Wiley-Interscience. 1972.
3. Davtyan L.G., Panteleev A.V. Parametric optimization method for nonlinear continuous systems of joint estimation and control. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2019. Vol. 58, no. 3, pp. 360–373. DOI:10.1134/S1064230719030079
4. Panteleev A.V., Skavinskaya D.V. *Metaevristicheskie algoritmy global'noj optimizacii*. M.: Vuzovskaya kniga, 2019. (In Russ.)
5. Wernli A., Cook G. Suboptimal control for the nonlinear quadratic regulator problem. 1975, *Automatica*. Vol. 11, no. 1, pp. 75–84.
6. Qu Z., Cloutier J.R., Mracek C.P. A new sub-optimal nonlinear control design technique-SDARE / In *Proceedings of the 13th IFAC World Congress*, San Francisco, USA, pp. 365–370, 1996.
7. Cloutier J.R., D'Souza C.N.; Mracek C.P. Nonlinear regulation and nonlinear HI control via the state-dependent Riccati equation technique: Part 1, theory. In *Proceedings of the First International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace*, Daytona Beach, FL, USA, 9–11 May 1996; Embry-Riddle Aeronautical Univ. Press: Daytona Beach, FL, USA, 1996; pp. 117–130.
8. Cimen T. Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the state-dependent Riccati equation (SDRE) method. *Annual Reviews in Control*, 2010. Vol. 34, no. 1, pp. 32–51.
9. Cimen T. Survey of state-dependent Riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2012. Vol. 35, no. 4, pp. 1025–1047.
10. Haessig D., Friedland B. State dependent differential Riccati equation for nonlinear estimation and control / In *Proceedings of the 15th IFAC Triennial World Congress*, Barcelona, Spain, 2002. [Online]. Available: <http://www.nt.ntnu.no/users/skoge/>
11. Nekoo C.R. Tutorial and Review on the State-dependent Riccati Equation. *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, 2019. Vol. 8, no. 2, pp. 109–166.
12. Panteleev A.V., Khvoshnyanskaya E.A. Robust estimation of state vector coordinates in the controlled airplane motion problem. *Aerospace Systems*, 2024. Vol. 7, no.1, pp. 167–173. DOI: 10.1007/s42401-023-00224-7
13. Beikzadeh H., Taghirad H.D. Nonlinear sensorless speed control of PM synchronous motor via an SDRE observer-controller combination / In *Proceedings of the 4th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications*, IEEE, Xi'an, China, pp. 3570–3575, 2009.
14. Beikzadeh H., Taghirad H.D. Exponential nonlinear observer based on the differential state-dependent Riccati equation // *International Journal of Automation and Computing*, 2012. Vol. 9, no. 4, pp. 358–368. DOI: 10.1007/s11633-012-0656-y
15. Stepien S., Superczynska P. Modified infinite-time state-dependent Riccati equation method for nonlinear affine systems: quadrotor control. *Appl. Sci.* 2021. Vol. 11, 10714. <https://doi.org/10.3390/app112210714>
16. Kireev V.I., Panteleev A.V. *Chislennyye metody v primerah i zadachah*. M.: izdatel'stvo Lan', 2015. (In Russ.)