

◇◇◇◇◇◇◇◇ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ◇◇◇◇◇◇◇◇

УДК 517.8

Приложение биоинспирированных алгоритмов глобальной оптимизации в задаче подбора коэффициентов модели усталостной деградации жесткости композиционного материала

Пантелеев А.В. *

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>
e-mail: avpanteleev@inbox.ru

Турбин Н.В. **

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8887-4586>
e-mail: nikturbin@gmail.com

Надоров И.С. ***

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2085-2987>
e-mail: nnadorovivan@gmail.com

Рассматривается задача нахождения усталостных характеристик материала по результатам испытаний композиционного материала. Исходными данными являются свойства материала, параметры нагрузки и таблично заданная зависимость модуля упругости от количества выполненных испытаний. Сформирована дифференциальная математическая модель, описывающая изменение модуля упругости с ростом числа испытаний. Ее параметры находятся с помощью аппроксимации скорости изменения модуля упругости по формулам численного дифференцирования различного порядка и решения задачи параметрической идентификации. Коэффициенты модели определяются



в результате использования метода, имитирующего поведение стаи мотыльков, относящегося к биоинспирированным алгоритмам глобальной оптимизации. Приведено решение поставленной задачи для конкретного композиционного материала.

Ключевые слова: композиционный материал, модель деградации жесткости, биоинспирированный алгоритм, методы численного дифференцирования и интегрирования.

Для цитаты:

Пантелеев А.В., Турбин Н.В., Надоров И.С. Приложение биоинспирированных алгоритмов глобальной оптимизации в задаче подбора коэффициентов модели усталостной деградации жесткости композиционного материала // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 1. С. 103–120. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140107>

***Пантелеев Андрей Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики института «Компьютерные науки и прикладная математика» Московского авиационного института (Национального исследовательского университета) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: avpanteleev@inbox.ru

*****Турбин Николай Васильевич**, ведущий инженер института «Авиационная техника» Московского авиационного института (Национального исследовательского университета) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8887-4586>, e-mail: nikturbin@gmail.com

*****Надоров Иван Сергеевич**, студент бакалавриата института «Компьютерные науки и прикладная математика» Московского авиационного института (Национального исследовательского университета) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2085-2987>, e-mail: nnadorovivan@gmail.com

1. ВВЕДЕНИЕ

При обработке результатов испытаний композитных материалов важно определить их характерные параметры с целью дальнейшего прогнозирования их поведения под действием определенных нагрузок. Одной из возможных моделей деградации жесткости является дифференциальная модель, предложенная в [1]. Она позволяет описать три основных этапа деградации жесткости: первоначальную потерю жесткости, распространение повреждений, достижение критического уровня повреждаемости, приводящее к разрушению материала. Основной проблемой является нахождение параметров модели, характеризующих каждый из этапов и поведение образца материала в целом. В статье предложен алгоритм нахождения параметров на основе численных методов аппроксимации скорости деградации жесткости и параметрической оптимизации [2].

2. ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УСТАЛОСТНОЙ ДЕГРАДАЦИИ ЖЕСТКОСТИ

Будем использовать следующие основные обозначения.

Количество циклов $[n]$, один цикл: исходное состояние \rightarrow напряженное состояние (растяжение) \rightarrow исходное состояние, $n \in \{0, \dots, N\}$, где N – общее число выполненных испытаний.

Напряжение $[\sigma, \text{Мпа}]$ – физическая величина, характеризующая действие внутренних сил упругости в деформированном твердом теле $[\text{Мпа}]$.

Прочность на растяжение $[X_T, \text{Мпа}]$ – физическая величина, характеризующая напряжение, при котором происходит разрушение образца $[\text{Мпа}]$.

Модуль упругости $[E, \text{Мпа}]$ – характеризует способность материала сопротивляться деформации под действием напряжений.

Повреждаемость $[D]$ – величина, характеризующая падение модуля упругости (E) образца.

Текущее значение повреждаемости связано с текущим значением модуля упругости:

$$D(n) = 1 - \frac{E(n)}{E_0}, \quad (1)$$

где $E(n)$ – текущий модуль упругости, характеризующий способность материала сопротивляться растяжению/сжатию при упругой деформации после циклической нагрузки; E_0 – исходный модуль упругости – константа, характеризующая способность материала сопротивляться деформации под действием напряжений; n – порядковый номер цикла нагружения (0–100.000). Поскольку $E(n) \in [0, E_0]$, то повреждаемость $D(n) \in [0, 1]$.

Если известно значение повреждаемости, то текущий модуль упругости находится по формуле, следующей из (1):

$$E(n) = E_0 [1 - D(n)]. \quad (2)$$

Индекс усталостного разрушения (Σ) – переменная величина – величина, характеризующая усталостное состояние образца:

$$\Sigma(n) = \frac{\sigma}{[1 - D(n)] X_T}. \quad (3)$$

В [1] предложена дифференциальная модель величины скорости роста повреждаемости образца:

$$\frac{dD(n)}{dn} = c_1 \Sigma(n) \exp \left[-\frac{c_2 D(n)}{\sqrt{\Sigma(n)}} \right] + c_3 D(n) \Sigma^2(n) \left[1 + \exp \{c_5 [\Sigma(n) - c_4]\} \right], \quad (4)$$

с начальным условием $D(0) = 0$.



С учетом (3) уравнение (4) можно переписать в форме

$$\begin{aligned} \frac{dD(n)}{dn} = c_1 \frac{\sigma}{[1-D(n)] X_T} \exp \left[-\frac{c_2 D(n)}{\sqrt{\frac{\sigma}{[1-D(n)] X_T}}} \right] + c_3 D(n) \left[\frac{\sigma}{[1-D(n)] X_T} \right]^2 + \\ + c_3 D(n) \left[\frac{\sigma}{[1-D(n)] X_T} \right]^2 \exp \left\{ c_5 \left[\frac{\sigma}{[1-D(n)] X_T} - c_4 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где c_1, \dots, c_5 – коэффициенты, характеризующие усталостные характеристики материала.

Введем обозначения $\hat{E}(n) = \frac{E(n)}{E_0}$, $\beta = \frac{X_T}{\sigma}$. Поскольку из уравнения (1) следует $D(n) = 1 - \frac{E(n)}{E_0} = 1 - \hat{E}(n)$, то $\frac{dD(n)}{dn} = -\frac{d\hat{E}(n)}{dn}$. Тогда получаем дифференциальное уравнение, эквивалентное (5), в форме

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{E}(n)}{dn} = -\frac{1}{\beta \hat{E}(n)} \left(c_1 \exp \left[-c_2 (1 - \hat{E}(n)) \sqrt{\beta \hat{E}(n)} \right] + \right. \\ \left. + c_3 \frac{1 - \hat{E}(n)}{\beta \hat{E}(n)} \left[1 + \exp \left\{ c_5 \left[\frac{1}{\beta \hat{E}(n)} - c_4 \right] \right\} \right] \right), \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку $E(0) = E_0$, то начальное условие для уравнения (6) имеет вид

$$\hat{E}(0) = 1 \quad (7)$$

В [1] выделены типовые этапы изменения модуля упругости в зависимости от числа выполненных испытаний.

Первый этап. Инициирование повреждений (уменьшение относительного модуля упругости $\frac{E(n)}{E_0}$ на $(2 \div 5)\%$).

Второй этап. Распространение повреждений (дальнейшее уменьшение относительного модуля упругости $\frac{E(n)}{E_0}$ еще на $(1 \div 5)\%$).

Третий этап. Достижение критического уровня повреждаемости, приводящее к разрушению материала.

Коэффициент c_1 характеризует скорость роста в режиме инициирования повреждений (на первом этапе), т.е. резкое начальное снижение кривой уменьшения модуля упругости. Коэффициент c_2 должен быть достаточно большим по величине, чтобы первое слагаемое по величине достаточно быстро убывало с ростом повреждаемости.



Коэффициент c_3 характеризует скорость роста в режиме распространения повреждений, т.е. когда происходит постепенное уменьшение модуля упругости. Коэффициенты c_4, c_5 характеризуют этап взрывного роста повреждаемости на третьем этапе.

Требуется найти коэффициенты c_1, \dots, c_5 усталостных характеристик материала по графику $E(n)$ изменения жесткости композиционного материала.

3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОДБОРА КОЭФФИЦИЕНТОВ МОДЕЛИ УСТАЛОСТНОЙ ДЕГРАДАЦИИ ЖЕСТКОСТИ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

Шаг 1. Зависимость $E_{\text{exp}}(n)$ задана таблицей при $n \in \{0, \dots, N\}$.

Шаг 2. Получить таблицу для $\hat{E}(n) = \frac{E_{\text{exp}}(n)}{E_0}$.

Шаг 3. По таблице $\hat{E}(n)$ составить таблицу $\frac{d\hat{E}(n)}{dn}$. Применить формулы численного дифференцирования (двухточечный и трехточечный шаблоны) [2, 3].

Замечание. Для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, зададим узлы $x_i \in [a, b], i = 0, 1, \dots, n-1$, определяемые шагами $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$; значения функции в узлах $f_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n-1$. В общем случае $h_{i+1} = \text{var}$, т.е. имеется неравномерная сетка. В частном случае шаг может быть постоянным $h_{i+1} = h = \text{const}$ (равномерная сетка).

На двухточечном шаблоне $\mathcal{O}_{2,i} = (x_i, x_{i+1})$ формулы для вычисления первой производной имеют одинаковый вид в левой и правой точках шаблона:

$$f'_{i,v} = f'_{i+1,v} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} \text{ (первый порядок точности).}$$

На трехточечном шаблоне $\mathcal{O}_{3,i} = (x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ формулы для вычисления первой производной имеют вид:

– в левой крайней точке шаблона:

$$f'_{i-1,c} = \frac{1}{2h} (-3f_{i-1} + 4f_i - f_{i+1}) \text{ (второй порядок точности),}$$

$$f'_{i-1,v} = \frac{1}{H_i^{i+1}} \left[-(2 + \delta_{i+1})f_{i-1} + \frac{(1 + \delta_{i+1})^2}{\delta_{i+1}} f_i - \frac{f_{i+1}}{\delta_{i+1}} \right];$$

– в центральной точке шаблона

$$f'_{i,c} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \text{ (второй порядок точности),}$$



$$f'_{i,v} = \frac{1}{H_i^{i+1}} \left[-\delta_{i+1} f_{i-1} + \frac{\delta_{i+1}^2 - 1}{\delta_{i+1}} f_i + \frac{f_{i+1}}{\delta_{i+1}} \right];$$

– в правой крайней точке шаблона

$$f'_{i+1,c} = \frac{1}{2h} (f_{i-1} - 4f_i + 3f_{i+1}) \text{ (второй порядок точности),}$$

$$f'_{i+1,v} = \frac{1}{H_i^{i+1}} \left[\delta_{i+1} f_{i-1} - \frac{(1 + \delta_{i+1})^2}{\delta_{i+1}} f_i + \frac{2 + \delta_{i+1}}{\delta_{i+1}} f_{i+1} \right],$$

где $H_i^{i+1} = h_i + h_{i+1}$, $\delta_{i+1} = \frac{h_{i+1}}{h_i}$.

Шаг 4. Найти коэффициенты c_1, \dots, c_5 из условия

$$\sum_{n \in \{0, \dots, N\}} \left\{ \frac{d\hat{E}(n)}{dn} + \frac{1}{\beta \hat{E}(n)} \left(c_1 \exp \left[-c_2 (1 - \hat{E}(n)) \sqrt{\beta \hat{E}(n)} \right] + c_3 \frac{1 - \hat{E}(n)}{\beta \hat{E}(n)} \left[1 + \exp \left\{ c_5 \left[\frac{1}{\beta \hat{E}(n)} - c_4 \right] \right\} \right] \right) \right\}^2 \rightarrow \min_{c_i \in [c_{i,\min}, c_{i,\max}], i=1, \dots, 5} \quad (8)$$

применяя метаэвристические алгоритмы оптимизации (метод, имитирующий поведение стаи мотыльков (Moth–flame optimization, MFO) [4], метод Luus–Jaakola [5]). Метод MFO относится к классу биоинспирированных алгоритмов глобальной оптимизации, хорошо зарекомендовавших себя при решении разнообразных задач параметрической оптимизации сложных технических систем [6].

Замечания.

1. При вычислении значения суммы возможно применение различных весовых коэффициентов, отражающих сравнительную важность обработки результатов, полученных на каждом из этапов. Весовые коэффициенты могут задаваться в соответствии с ранее выделенными тремя этапами. Также возможно использование линейных законов изменения весовых коэффициентов в рамках каждого из этапов.
2. Исходя из назначения последнего слагаемого в правой части дифференциального уравнения можно сформировать априорные оценки множества возможных значений коэффициента \tilde{n}_4 :

$$\frac{1}{\beta} \leq \tilde{n}_4 \leq \frac{1}{\beta \hat{E}_{\min}},$$

где \hat{E}_{\min} – минимальное значение $\hat{E}(n)$ из таблицы экспериментальных данных.

Шаг 5. Найти численное решение $\hat{E}_{\text{exp}}(n)$ дифференциального уравнения (6) с начальным условием (7) с целью верификации полученных результатов.

Замечание. Для дифференциального уравнения в форме



$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

можно применить следующие методы [2, 3]:

- явный метод Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + h_{i+1}f(x_i, y_i) \text{ (первый порядок точности);}$$

- метод Эйлера–Коши:

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf_i \text{ (второй порядок точности),}$$

где $f_i = f(x_i, y_i)$. Для начала работы метода требуются две разгонные точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$, первая определяется начальным условием, а вторая явным методом Эйлера;

- методы Адамса–Бэшфорта:

А. $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1})$ (второй порядок точности),

Б. $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2})$ (третий порядок точности),

В. $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3})$ (четвертый порядок точности).

Для начала работы требуется знать 2, 3, 4 разгонные точки соответственно;

- двухшаговая явная схема Эйлера второго порядка на нерегулярном шаблоне

$$y_{i+1} = y_i(1 - \delta_{i+1}^2) + \delta_{i+1}^2 y_{i-1} + H_i^{i+1} \delta_{i+1} f(x_i, y_i),$$

где $H_i^{i+1} = h_i + h_{i+1}$, $\delta_{i+1} = \frac{h_{i+1}}{h_i}$, $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$. При $\delta_{i+1} = 1$ схема совпадает с методом Эйлера–Коши;

- обобщенная на нерегулярный шаблон схема Адамса–Бэшфорта:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h_{i+1}^2}{2} \left(\frac{H_{2i}^{i+1}}{I_{i+1}^{i+1}} f_i - \frac{1}{h_i} f_{i-1} \right),$$

где $I_{i+1}^{i+1} = h_i h_{i+1}$, $H_{2i}^{i+1} = 2h_i + h_{i+1}$. При $\delta_{i+1} = 1$ схема совпадает с методом Адамса–Бэшфорта второго порядка: $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1})$.

Шаг 6. Найти оценки близости результатов эксперимента и результатов моделирования эксперимента:

А. $\Delta_1 = \max_{n \in \{0, \dots, N\}} \left| \frac{\hat{E}_{\text{exp}}(n) - \hat{E}(n)}{\hat{E}_{\text{exp}}(n)} \right|;$

Б. $\Delta_2 = \sqrt{\sum_{n \in \{0, \dots, N\}} \left[\frac{\hat{E}_{\text{exp}}(n) - \hat{E}(n)}{\hat{E}_{\text{exp}}(n)} \right]^2}.$



Шаг 7. Анализ результатов. Если оценки близости не удовлетворяют требованиям, то:

- увеличить точность метода численного дифференцирования в п. 3;
- увеличить требуемую точность или заменить метод оптимизации в п. 5;
- изменить весовые коэффициенты в критерии (8), используемом в п. 4.

В следующем разделе рассмотрен пример реализации алгоритма для заданного композиционного материала.

4. ПРИМЕР ПОДБОРА КОЭФФИЦИЕНТОВ МОДЕЛИ УСТАЛОСТНОЙ ДЕГРАДАЦИИ ЖЕСТКОСТИ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

1,2. Заданы характерные свойства исследуемого материала: изначальная жесткость $E_0 = 37000$ МПа, напряжение разрушения $X_r = 463$ [МПа], действующее напряжение цикла $\sigma = 273,17$ [МПа] [7].

В табл. 1 приведены результаты испытаний, отражающие изменение значений модуля упругости (и относительного модуля упругости). Данные приведены с различными интервалами между выполненными экспериментами.

Таблица 1

$E(n)$	n	$\hat{E}(n)$
Этап 1		
370000	0	1
32098.827903	500	0.867536
31250.670889	1000	0.844613
30696.495568	1500	0.829635
30271.219731	2000	0.818141
29919.902018	2500	0.808646
29617.032116	3000	0.80046
29348.549667	3500	0.793204
29105.829317	4000	0.786644
28883.174228	4500	0.780626
28676.612009	5000	0.775044
Этап 2		
27094.187153	10000	0.732275
25904.635581	15000	0.700125
24862.254787	20000	0.671953
23874.709336	25000	0.645262
22886.545431	30000	0.618555
21848.867572	35000	0.59051



$E(n)$	n	$\hat{E}(n)$
20700.577682	40000	0.559475
19337.878021	45000	0.522645
17515.574054	50000	0.473394
Этап 3		
17042.850175	51000	0.460618
16507.020909	52000	0.446136
15882.707839	53000	0.429262
15124.627626	54000	0.408774
14137.958377	55000	0.382107
12654.423126	56000	0.342011
8461.092332	57000	0.228678

3. Аппроксимация производной $\frac{d\hat{E}(n)}{dn}$. Воспользуемся методами численного дифференцирования разного порядка точности, а далее проведем их сравнение. Основной вычислительной проблемой является использование разного шага между полученной информацией о результатах испытаний на всех трех этапах процесса разрушения. Проведен анализ использования формул численного дифференцирования на основе двухточечного и трехточечного шаблонов с постоянным и переменным шагами между узлами. В начале процесса используются формулы в левой точке шаблона, а в конце – в правой. В двух точках, отделяющих первый этап от второго и второй от третьего, использованы, как односторонние формулы, так и формулы для центральной точки шаблона с применением линейной интерполяции на множестве с большим шагом.

Вариант 1. В табл. 2 приведены результаты применения формулы первого порядка точности (двухточечный шаблон): $f'_{i,v} = f'_{i+1,v} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}}$.

Вариант 2. В табл. 2 приведены результаты применения формулы второго порядка точности (в центральной точке трёхточечного шаблона, на границе изменения шага – в левой крайней точке шаблона): $f'_{i,c} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$, на границе $f'_{i-1,c} = \frac{1}{2h}(-3f_{i-1} + 4f_i - f_{i+1})$. При $n = 0$ расчеты выполняются в левой точке шаблона, при $n = 57000$ в правой точке шаблона.

Вариант 3. Применяются формулы второго порядка точности (в центральной точке трёхточечного шаблона, на границе изменения шага – в правой крайней точке шаблона): $f'_{i,c} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$, на границе $f'_{i+1,c} = \frac{1}{2h}(f_{i-1} - 4f_i + 3f_{i+1})$. При $n = 0$ расчеты выполняются в левой точке шаблона, при $n = 57000$ в правой точке шаблона.



Вариант 4. В табл. 3 приведены результаты применения формулы второго порядка точности (в центральной точке трёхточечного шаблона, на границе изменения шага – в центральной точке с переменным шагом):

$$f'_{i,c} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}, \text{ на границе } f'_{i,v} = \frac{1}{H_i^{i+1}} \left[-\delta_{i+1} f_{i-1} + \frac{\delta_{i+1}^2 - 1}{\delta_{i+1}} f_i + \frac{f_{i+1}}{\delta_{i+1}} \right].$$

При $n = 0$ вычисления производятся в левой точке шаблона, при $n = 57000$ в правой точке шаблона.

Вариант 5. В табл. 3 приведены результаты применения формулы второго порядка точности (в центральной точке трёхточечного шаблона, на границе изменения шага с линейной интерполяцией в сторону большей величины шага, при $n = 0$ в левой точке шаблона, при $n = 57000$ в правой точке шаблона): $f'_{i,c} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$.

Значения производной $\frac{d\hat{E}(n)}{dn}$

Таблица 2

$\frac{d\hat{E}(n)}{dn}$ (вариант 1)	n	$\frac{d\hat{E}(n)}{dn}$ (вариант 2)
Этап 1		
-0.000264928	0	-0.000397392
-4.58460000000001E-05	500	-0.000155387
-2.99559999999999E-05	1000	-3.7901E-05
-2.2988E-05	1500	-2.64719999999999E-05
-1.89900000000001E-05	2000	-2.0989E-05
-1.63720000000001E-05	2500	-1.76810000000001E-05
-1.45119999999999E-05	3000	-1.5442E-05
-1.312E-05	3500	-1.38159999999999E-05
-1.20359999999999E-05	4000	-1.2578E-05
-1.11640000000002E-05	4500	-1.16000000000001E-05
-8.55379999999999E-06	5000	-9.61569999999999E-06
Этап 2		
-6.43E-06	10000	-7.4919E-06
-5.63439999999999E-06	15000	-6.0322E-06
-5.3382E-06	20000	-5.4863E-06
-5.34140000000001E-06	25000	-5.33980000000001E-06
-5.609E-06	30000	-5.4752E-06
-6.20700000000001E-06	35000	-5.908E-06
-7.36599999999998E-06	40000	-6.7865E-06
-9.85020000000001E-06	45000	-8.6081E-06
-1.2776E-05	50000	-1.1923E-05



$\frac{d\hat{E}(n)}{dn}$ (вариант 1)	n	$\frac{d\hat{E}(n)}{dn}$ (вариант 2)
Этап 3		
-1.44820000000001E-05	51000	-1.3629E-05
-1.6874E-05	52000	-1.5678E-05
-2.0488E-05	53000	-1.8681E-05
-2.66670000000001E-05	54000	-2.35775E-05
-4.0096E-05	55000	-3.33815E-05
-0.000113333	56000	-7.67145E-05
-0.000113333	57000	-0.0001499515

Для вариантов 1 и 2 графики изменения значений производной $\frac{d\hat{E}(n)}{dn}$ (синий) на фоне графика $\hat{E}(n)$ (красный) представлены на рис. 1 и 2. Здесь и далее показаны абсолютные значения производной (знак производной везде отрицателен), умноженные на 10000. На оси абсцисс везде отложены значения переменной n на заданном отрезке $[0, 57000]$.

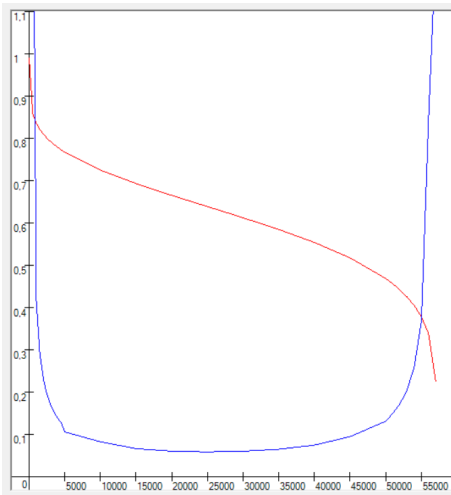


Рис. 1

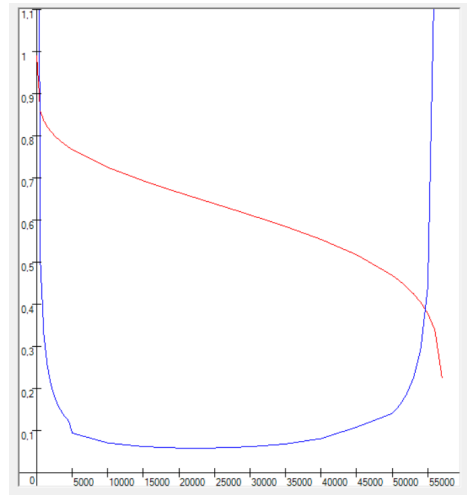


Рис. 2

К недостаткам варианта 1 следует отнести неравномерный переход от первого этапа ко второму и от второго к третьему. Для варианта 2 при переходе от первого этапа ко второму заметен неравномерный участок, при переходе от второго этапа к третьему плавность в целом достигается. При реализации варианта 3 имеется негладкий переход от второго этапа к третьему.



Таблица 3

$\frac{d\hat{E}(n)}{dn}$ (вариант 4)	n	$\frac{d\hat{E}(n)}{dn}$ (вариант 5)
Этап 1		
-0,000397392	0	-0,000397392
-0,000155387	500	-0,000155387
-3,7901E-05	1000	-3,7901E-05
-2,647199999999999E-05	1500	-2,647199999999999E-05
-2,0989E-05	2000	-2,0989E-05
-1,76810000000001E-05	2500	-1,76810000000001E-05
-1,5442E-05	3000	-1,5442E-05
-1,381599999999999E-05	3500	-1,381599999999999E-05
-1,2578E-05	4000	-1,2578E-05
-1,16000000000001E-05	4500	-1,16000000000001E-05
-1,09267090909091E-05	5000	-9,85890000000011E-06
Этап 2		
-7,4919E-06	10000	-7,4919E-06
-6,0322E-06	15000	-6,0322E-06
-5,4863E-06	20000	-5,4863E-06
-5,33980000000001E-06	25000	-5,33980000000001E-06
-5,4752E-06	30000	-5,4752E-06
-5,908E-06	35000	-5,908E-06
-6,7865E-06	40000	-6,7865E-06
-8,6081E-06	45000	-8,6081E-06
-1,22883666666666E-05	50000	-1,13131E-05
Этап 3		
-1,3629E-05	51000	-1,3629E-05
-1,5678E-05	52000	-1,5678E-05
-1,8681E-05	53000	-1,8681E-05
-2,35775E-05	54000	-2,35775E-05
-3,33815E-05	55000	-3,33815E-05
-7,67145E-05	56000	-7,67145E-05
-0,0001499515	57000	-0,0001499515

Для вариантов 4 и 5 графики изменения значений производной $\frac{d\hat{E}(n)}{dn}$ (синий) на фоне графика $\hat{E}(n)$ (красный) представлены на рис. 3 и 4. Как следует из рис. 3, переходы между этапами практически не видимы, что свидетельствует о приемлемости полученного результата. На рис. 4 видно, что переходы между этапами недостаточно гладкие. Применение линейной интерполяции в точках перехода между этапами не дает значительного выигрыша в точности.

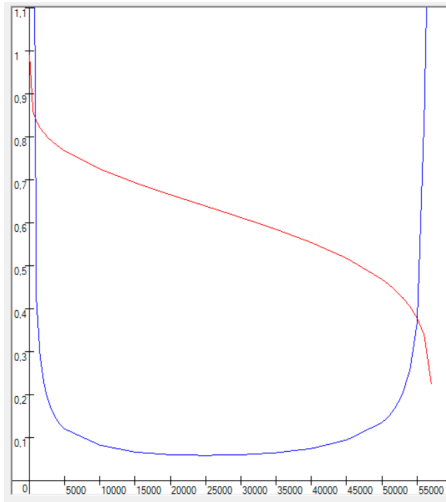


Рис. 3

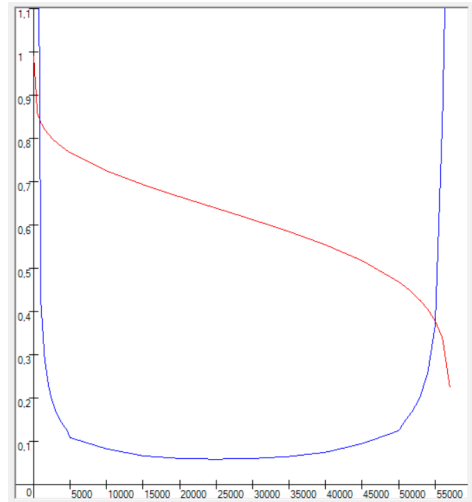


Рис. 4

Приведем результаты сравнения графиков изменения производной, вычисленной по формулам первого и второго порядков точности

На рис. 5 изображены результаты варианта 1 (синий) и варианта 4 (зелёный). Сравнение указывает на преимущество применения формул второго порядка.

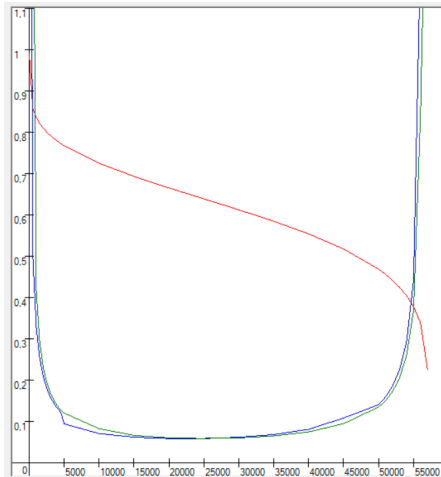


Рис. 5.

4. Нахождение коэффициентов c_1, \dots, c_5 из условия минимума критерия (8). Для решения задачи минимизации использовался метод, имитирующий поведение стаи мотыльков (MFO) [5]. Затем с целью уточнения полученных результатов



применялся метод Luus–Jaakola [4]. Метод Лууса всегда применялся с параметрами $R = 100$, $\gamma = 0.8$, $\eta = 0.9$, $P = 100$, $ITER = 100$, $\varepsilon_1 = 10^{-5}$, $\varepsilon_2 = 10^{-5}$, а в качестве начальной точки выбирался результат метода MFO. Вычислительные эксперименты показали, что точность аппроксимации производной во всех рассмотренных случаях падает в центральной зоне графика (второй этап), важной для прогнозирования момента разрушения. Поэтому предложена модификация критерия (8) с учетом введения весовых коэффициентов с целью отражения роста требований к точности аппроксимации на втором и начале третьего этапах:

$$\sum_{n \in \{0, \dots, N\}} \alpha_n \left\{ \frac{d\hat{E}(n)}{dn} + \frac{1}{\beta\hat{E}(n)} \left(c_1 \exp \left[-c_2 (1 - \hat{E}(n)) \sqrt{\beta\hat{E}(n)} \right] + c_3 \frac{1 - \hat{E}(n)}{\beta\hat{E}(n)} \left[1 + \exp \left\{ c_5 \left[\frac{1}{\beta\hat{E}(n)} - c_4 \right] \right\} \right] \right) \right\}^2, \quad (9)$$

где $\alpha_n = 1$, $n = 1 : 4500$, $\alpha_n = 100$, $n = 5000 : 30000$, $\alpha_n = 1000$, $n = 35000 : 55000$, $\alpha_n = 1$, $n = 56000 : 57000$. Заметим, что введение линейного закона изменения весов не привело к улучшению точности приближения производной.

Исходные данные соответствуют варианту 4 (второй порядок точности).

- A. Параметры MFO: $Np = 1000$, $s = 1$, $T = 500000$, $\tau = 500$, время счета 3 минуты, $c_i \in [0, 100]$, $i = 1, 2, 3, 5$; $c_4 \in [0, 4]$ (рис. 6).
- B. Параметры метода MFO: $Np = 2000$, $s = 1$, $T = 500000$, $\tau = 300$, время счета 6 минут, $c_i \in [0, 100]$, $i = 1, 2, 3, 5$; $c_4 \in [0, 4]$ (рис. 7).

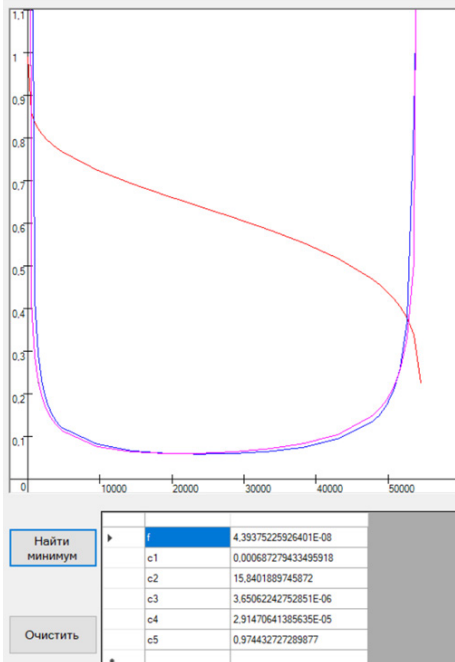


Рис. 6

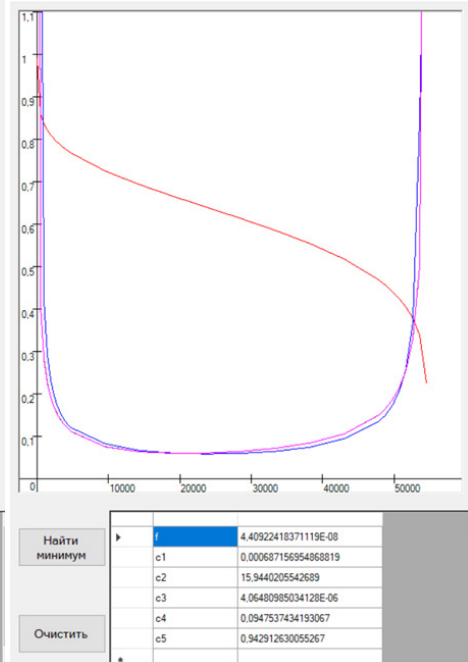


Рис. 7

Анализ приведенных результатов свидетельствует об эффективности предложенного подхода, поскольку точность аппроксимации производной можно считать приемлемой.

5. Рассмотрим проблему получения численного решения $\hat{E}_{\text{exp}}(n)$ дифференциального уравнения (6) с начальным условием (7). Для оценки погрешности вычисляется сумма квадратов разностей исходного и приближённого модуля упругости.

Для коэффициентов, полученных в таблице на рис. 7, на рис. 8 изображен результат применения метода Эйлера с шагом $h=1$, величина погрешности: 0.0361. Результат применения метода Эйлера–Коши показан на рис. 9, величина погрешности составляет 0.0283.

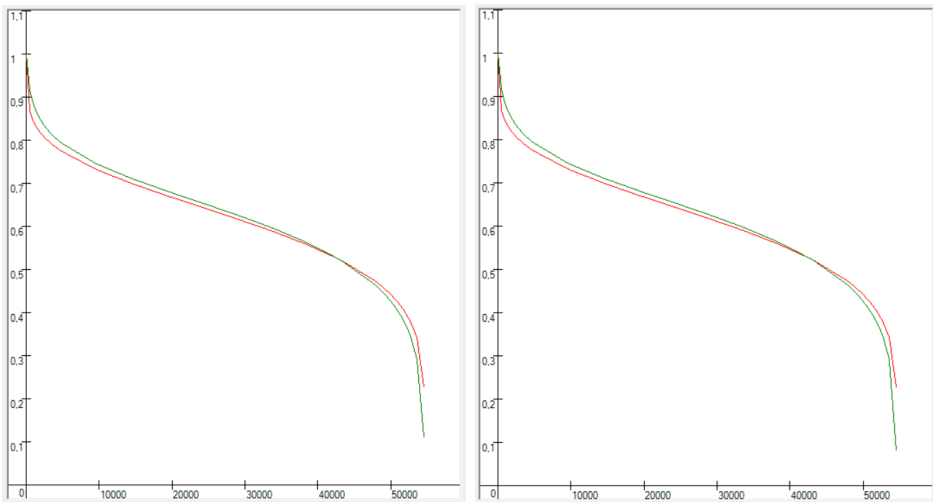


Рис. 8 Рис. 9

Величина погрешности применения метода Адамса 2 порядка составляет: 0.0506, а метода Адамса 4 порядка составляет: 0.0356. Решения аналогичны изображенным на рис. 8 и 9.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье сформулированы техническая и математическая постановки задачи подбора коэффициентов модели усталостной деградации жесткости композиционного материала. Предложен алгоритм подбора коэффициентов модели усталостной деградации жесткости композиционного материала на основе численного нахождения производной относительного модуля упругости и параметрической аппроксимации полученной зависимости. Для решения задачи аппроксимации применены два метаэвристических алгоритма глобальной минимизации: метод, имитирующий поведение



стаи мотыльков, и метод Лууса. Полученный результат проверен при помощи непосредственного интегрирования дифференциального уравнения, описывающего процесс усталостной деградации жесткости композиционного материала. Полученные результаты для тестового композиционного материала подтвердили применимость и достаточную точность предложенной методики.

Литература

1. *Van Paeregeem W.* Development and finite element implementation of a damage model for fatigue of fibre-reinforced polymers. Ghent University Architectural and Engineering Press, 2002.
2. *Пантелеев А.В., Кудрявцева И.А.* Численные методы. Практикум. – М.: ИНФРА-М, 2017.
3. *Киреев В.И., Пантелеев А.В.* Численные методы в примерах и задачах. – СПб.: Изд-во Лань, 2015.
4. *Mirjalili S.* Moth-flame optimization algorithm: A novel nature-inspired heuristic paradigm// Knowledge-Based Systems. 2015. Vol. 89. P. 228–249. <https://doi.org/10.1016/i.knosys2015.07.006>.
5. *Пантелеев А.В., Скавинская Д.В.* Метаэвристические стратегии и алгоритмы глобальной оптимизации. – М.: Факториал, 2023.
6. *Пантелеев А.В., Каранэ М.М.С.* Мультиагентные и биоинспирированные методы оптимизации технических систем. – М.: Изд-во Доброе слово и Ко, 2024.
7. *Whitworth H.A.* A stiffness degradation model for composite laminates under fatigue loading // Composite Structures. 1997. Vol. 40. No. 2, P. 95–101. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(97\)00142-6](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(97)00142-6).



Application of Bio-Inspired Global Optimization Algorithms in the Problem of Selecting Coefficients for a Model of Fatigue Degradation of the Stiffness of a Composite Material

Andrei V. Panteleev*

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>
e-mail: avpanteleev@inbox.ru

Nikolay V. Turbin**

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8887-4586>
e-mail: nikturbin@gmail.com

Ivan S. Nadorov***

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2085-2987>
e-mail: nnadorovivan@gmail.com

The problem of finding the fatigue characteristics of a material based on the test results of a composite material is considered. The initial data are the properties of the material, load parameters and the tabulated dependence of the elastic modulus on the number of tests performed. A differential mathematical model has been formed that describes the change in the elastic modulus with increasing number of loading cycles. Its parameters are found by approximating the rate of change of the elastic modulus using numerical differentiation formulas of various orders and solving the parametric identification problem. The model coefficients are determined by using a method that simulates the behavior of a swarm of moths, related to bio-inspired global optimization algorithms. A solution to the problem for a specific composite material is given.

Keywords: composite material, stiffness degradation model, bio-inspired algorithm, methods of numerical differentiation and integration.

For citation:

Panteleev A.V., Turbin N.V., Nadorov I.S. Application of Bio-Inspired Global Optimization Algorithms in the Problem of Selecting Coefficients for a Model of Fatigue Degradation of the Stiffness of a Composite Material. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 1, pp. 103–120. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140107> (In Russ., abstr. in Engl.).

***Andrei V. Panteleev**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Mathematics and Cybernetics, Institute “Computer Science and Applied Mathematics”, Moscow



Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-361>, e-mail: avpanteleev@inbox.ru

****Nikilay V. Turbin**, Leading engineer of the Institute “Aviation Engineering”, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8887-4586>, e-mail: nikturbin@gmail.com

*****Ivan S. Nadorov**, Bachelor’s Degree Student of the Institute “Computer Science and Applied Mathematics”, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2085-2987>, e-mail: nnadorovivan@gmail.com

References

1. Van Paeppegem W. Development and finite element implementation of a damage model for fatigue of fibre–reinforced polymers. Ghent University Architectural and Engineering Press, 2002.
2. Panteleev A.V., Kudryavtseva I.A. Numerical methods. Workshop. – M.: INFRA–M, 2017. – 512 p. (In Russ.).
3. Kireev V.I., Panteleev A.V. Numerical methods in examples and problems. – St. Petersburg: Lan Publishing House, 2015. – 448 p. (In Russ.).
4. Mirjalili S. Moth–flame optimization algorithm: A novel nature–inspired heuristic paradigm // Knowledge–Based Systems. 2015. Vol. 89. P. 228–249. <https://doi.org/10.1016/i.knosys2015.07.006>.
5. Panteleev A.V., Skavinskaya D.V. Metaheuristic strategies and algorithms of global optimization. *Factorial*, 2023. – 564 p. (In Russ.).
6. Panteleev A.V., Karane M.M.S. Multi–agent and bio–inspired optimization methods for optimizing technical systems. – M.: Dobroe slovo & Co, 2024. – 336 p. (In Russ.).
7. Whitworth H.A. A stiffness degradation model for composite laminates under fatigue loading // *Composite Structures*. 1997. Vol. 40. No. 2, P. 95–101. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(97\)00142-6](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(97)00142-6).

Получена 20.02.2024

Принята в печать 06.03.2024

Received 20.02.2024

Accepted 06.03.2024