Моделирование и анализ данных
2023. Том 13. № 3. С. 79–95
DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2023130306
ISSN: 2219-3758 (печатный)
ISSN: 2311-9454 (online)

Modelling and Data Analysis
2023. Vol. 13, no. 3, pp. 79–95
DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2023130306
ISSN: 2219-3758 (print)
ISSN: 2311-9454 (online)

УДК 519.216

Алгоритмическое обеспечение численно-спектральных методов моделирования стохастических динамических систем

Рыбаков К.А.*
Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВО МАИ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6839-1090, e-mail: rkoffice@mail.ru

На основе спектральной формы математического описания получены представления повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито, имеющие как теоретическое, так и практическое значение. Последнее обусловлено возможностью построения достаточно простых алгоритмов приближенного моделирования повторных стохастических интегралов, необходимых для реализации численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений. Применение спектральных представлений повторных стохастических интегралов в численных методах формирует численно-спектральные методы. Их алгоритмическое обеспечение представлено в виде программ для системы компьютерной математики Mathcad.

Ключевые слова: повторные стохастические интегралы, спектральная форма математического описания, спектральный метод, стохастическое дифференциальное уравнение, численно-спектральный метод, численный метод.

Для цитаты:
Рыбаков К.А. Алгоритмическое обеспечение численно-спектральных методов моделирования стохастических динамических систем // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 3. С. 79–95. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2023130306

****Рыбаков Константин Александрович,*** кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики, Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВО МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6839-1090, e-mail: rkoffice@mail.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе описаны численно-спектральные методы моделирования стохастических динамических систем, математические модели которых задаются стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ). Основное внимание уделено описанию алгоритмического обеспечения этих методов в виде комплекса программ для системы компьютерной математики Mathcad. Ее выбор обусловлен большей наглядностью по сравнению с другими программными средствами автоматизации вычислений. Кроме того, Mathcad обеспечивает довольно компактное представление программ, что является несомненным плюсом, так как одна из целей работы – показать, что практическая реализация подобных методов моделирования стохастических систем не содержит сложностей.

Существует достаточно много численных методов решения СДУ (методов моделирования траекторий стохастических динамических систем), однако значительная их часть имеет довольно заметный недостаток для СДУ общего вида – низкий порядок сильной (потраекторной) сходимости. Конечно, есть численные методы решения СДУ с высокими порядками сильной сходимости, но они предполагают моделирование специальных случайных величин – повторных стохастических интегралов (ПСИ) [1, 3, 12–15]. Простые моделирующие формулы есть только для некоторых из них, а для остальных предлагается применять приближенные методы моделирования и один из них основан на спектральной форме математического описания систем управления. Изначально она была предложена как одна из форм математического описания линейных детерминированных систем [10], а затем стала применяться для линейных стохастических систем [5].

Спектральная форма математического описания предполагает, что входные, выходные и промежуточные сигналы в системе управления представляются коэффициентами разложения этих сигналов в ряды по ортонормированным и биортонормированным базисным системам, которые образуют спектральные характеристики сигналов, и все действия с сигналами переносятся на действия с их спектральными характеристиками. Так как спектральные характеристики – это бесконечные матрицы-столбцы, линейные операторы на множестве спектральных характеристик представляются бесконечными плоскими матрицами, билинейные операторы – бесконечными пространственными матрицами и т.п.

Для моделирования простейших ПСИ в работах [16, 17] предложено задействовать спектральную форму математического описания, далее в работе [6] класс ПСИ был расширен. В представленной работе показана одна из возможных реализаций алгоритмов моделирования ПСИ с применением спектральной формы математического описания для конкретного базиса в системе компьютерной математики Mathcad. Методы моделирования ПСИ ранее были реализованы в системе компьютерной математики Matlab [3] и в виде комплекса программ на языке Python [14], но без применения спектральной формы математического описания.

2. ОПИСАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИХ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим стохастическую динамическую систему, описываемую СДУ Стратоновича:

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

в котором $X(\cdot)$ – n-мерный векторный случайный процесс, $t \in \mathbb{T} = [t_0, T]$ – время; $W(\cdot)$ – s-мерный стандартный винеровский процесс; X_0 – n-мерный случайный вектор (X_0 и $W(\cdot)$ независимы), $a(\cdot) : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – вектор-функция, $\sigma(\cdot) : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times s}$ – матричная функция.

Наряду с уравнением (1) будем использовать СДУ Ито:

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{2}$$

для которого добавляется обозначение вектор-функции $b(\cdot) : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Здесь подробно не обсуждается, как определить решение СДУ (1) и (2), так как это хорошо известно [2, 4]. Однако для придания строгого смысла дальнейшим соотношениям будем полагать, что функции $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ и $\sigma(\cdot)$ имеют достаточную гладкость. Это означает, что все их производные, которые далее появляются в формулах, существуют. Например, в соотношении

$$b(t, x) - a(t, x) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{s} \frac{\partial \sigma_{*l}(t, x)}{\partial x} \sigma_{*l}(t, x),$$

где $\sigma_{*l}(\cdot)$ – столбец матричной функции $\sigma(\cdot)$ с номером l, при выполнении которого СДУ (1) и (2) эквивалентны, т.е. задают один и тот же случайный процесс $X(\cdot)$. Если функция $\sigma(\cdot)$ зависит только от времени t, то функции $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ совпадают.

Перейдем к численным методам моделирования динамических систем, описываемых СДУ (1) или (2), однако прежде определим функцию $\Bbbk_{n_1 \ldots n_k}(\cdot)$:

$$\Bbbk_{n_1 \ldots n_k}(t_1, \ldots, t_k) = \begin{cases} (t_1 - t_0)^{n_1} \ldots (t_k - t_0)^{n_k}, & t_1 < \ldots < t_k, \\ 0 \text{ в остальных случаях}, \end{cases} \tag{3}$$

где k – некоторое натуральное число (число аргументов функции), а $n_1, \ldots, n_k$ – целые неотрицательные числа. В частном случае $n_1 = \ldots = n_k = 0$ функцию $\Bbbk_{n_1 \ldots n_k}(\cdot)$ будем обозначать $\Bbbk(\cdot)$:

$$\Bbbk(t_1, \ldots, t_k) = \begin{cases} 1, & t_1 < \ldots < t_k, \\ 0 \text{ в остальных случаях}, \end{cases} \tag{4}$$

а при $k = 1$ будем использовать обозначение $f_n(\cdot)$ и $f(\cdot)$ вместо $\Bbbk_{n_1 \ldots n_k}(\cdot)$ и $\Bbbk(\cdot)$ соответственно: $f_n(t) = (t - t_0)^n$ и $f(t) \equiv 1$.

Для реализации численных методов решения СДУ с высокими порядками сильной сходимости требуется моделирование ПСИ Стратоновича (обозначение S) или Ито (обозначение I) вида

$$
{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\Bbbk_{n_1\ldots n_k}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}}\ldots\int_{t_0}^{t_3}\int_{t_0}^{t_2}(t_1-t_0)^{n_1}\ldots(t_k-t_0)^{n_k}\circ dW_{j_1}(t_1)\circ dW_{j_2}(t_2)\circ\ldots\circ dW_{j_k}(t_k), \quad (5)
$$

$$
{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\Bbbk_{n_1\ldots n_k}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}}\ldots\int_{t_0}^{t_3}\int_{t_0}^{t_2}(t_1-t_0)^{n_1}\ldots(t_k-t_0)^{n_k}\, dW_{j_1}(t_1)dW_{j_2}(t_2)\ldots dW_{j_k}(t_k), \quad (6)
$$

или в частном случае

$$
{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\Bbbk(\cdot) = \int_{\mathbb{T}}\ldots\int_{t_0}^{t_3}\int_{t_0}^{t_2} dW_{j_1}(t_1)\circ dW_{j_2}(t_2)\circ\ldots\circ dW_{j_k}(t_k),
$$

$$
{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\Bbbk(\cdot) = \int_{\mathbb{T}}\ldots\int_{t_0}^{t_3}\int_{t_0}^{t_2} dW_{j_1}(t_1)dW_{j_2}(t_2)\ldots dW_{j_k}(t_k),
$$

где $j_1,\ldots,j_k$ – целые числа из множества $\{0,1,\ldots,s\}$, $\mathbb{T}=[t_0,T]$ – заданный отрезок (необязательно тот, на котором рассматривается решение СДУ (1) и (2)), $W_0(t)=t$ и, следовательно, $dW_0(t)=dt$, а $W_1(\cdot),\ldots,W_s(\cdot)$ – независимые винеровские процессы – компоненты векторного винеровского процесса $W(\cdot)$, с которыми ассоциированы независимые гауссовские белые шумы $V_1(\cdot),\ldots,V_s(\cdot)$. Если хотя бы одна из величин $j_1,\ldots,j_k$ равна нулю, то соответствующий интеграл будем называть ПСИ смешанного типа. Отметим, что значение t_0 в формулах (3), (5) и (6) – это левая граница отрезка $\mathbb{T}$ (далее используются ПСИ для разных отрезков).

Запишем сначала разложение решения $X(\cdot)$ СДУ Стратоновича (1):

$$
\begin{aligned}
X(\vartheta+h) = {} & \underline{X(\vartheta)} + \underline{ha(\vartheta,X(\vartheta))} + \underline{\sum_{j_1=1}^{s}\sigma_{*j_1}(\vartheta,X(\vartheta))\,\mathcal{J}_{[\vartheta,\vartheta+h]}^{W(j_1)}f(\cdot)} + \underline{\underline{\sum_{j_1,j_2=1}^{s}\mathcal{L}_{j_1}\sigma_{*j_2}(\vartheta,X(\vartheta))\,{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{[\vartheta,\vartheta+h]}^{W(j_1j_2)}\Bbbk(\cdot)}} + \\
& + \underline{\underline{\underline{\frac{h^2}{2}\mathcal{L}_0 a(\vartheta,X(\vartheta))}}} + \underline{\underline{\underline{\sum_{j_1=1}^{s}\Big[\mathcal{L}_0\sigma_{*j_1}(\vartheta,X(\vartheta))\,{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{[\vartheta,\vartheta+h]}^{W(0j_1)}\Bbbk(\cdot) + \mathcal{L}_{j_1}a(\vartheta,X(\vartheta))\,{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{[\vartheta,\vartheta+h]}^{W(j_10)}\Bbbk(\cdot)\Big]}}} + \\
& + \underline{\underline{\underline{\sum_{j_1,j_2,j_3=1}^{s}\mathcal{L}_{j_1}\mathcal{L}_{j_2}\sigma_{*j_3}(\vartheta,X(\vartheta))\,{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{[\vartheta,\vartheta+h]}^{W(j_1j_2j_3)}\Bbbk(\cdot)}}} + \underline{\underline{\underline{\sum_{j_1,j_2=1}^{s}\mathcal{L}_0\mathcal{L}_{j_1}\sigma_{*j_2}(\vartheta,X(\vartheta))\,{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{[\vartheta,\vartheta+h]}^{W(0j_1j_2)}\Bbbk(\cdot)}}} + \\
& + \underline{\underline{\underline{\sum_{j_1,j_2=1}^{s}\mathcal{L}_{j_1}\mathcal{L}_0\sigma_{*j_2}(\vartheta,X(\vartheta))\,{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{[\vartheta,\vartheta+h]}^{W(j_10j_2)}\Bbbk(\cdot)}}} + \underline{\underline{\underline{\sum_{j_1,j_2=1}^{s}\mathcal{L}_{j_1}\mathcal{L}_{j_2}a(\vartheta,X(\vartheta))\,{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{[\vartheta,\vartheta+h]}^{W(j_1j_20)}\Bbbk(\cdot)}}} + \\
& + \underline{\underline{\underline{\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=1}^{s}\mathcal{L}_{j_1}\mathcal{L}_{j_2}\mathcal{L}_{j_3}\sigma_{*j_4}(\vartheta,X(\vartheta))\,{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{[\vartheta,\vartheta+h]}^{W(j_1j_2j_3j_4)}\Bbbk(\cdot)}}} + \ldots,
\end{aligned} \quad (7)
$$

в котором $\vartheta \geqslant t_0$ и $h>0$, $\Bbbk(\cdot)$ – функция с числом аргументов, совпадающим с кратностью ПСИ, задается формулой (4):

$$k=2:\ \ \Bbbk(t_1,t_2)=1(t_2-t_1),\quad k=3:\ \ \Bbbk(t_1,t_2,t_3)=1(t_2-t_1)1(t_3-t_2),$$
$$k=4:\ \ \Bbbk(t_1,t_2,t_3,t_4)=1(t_2-t_1)1(t_3-t_2)1(t_4-t_3),\quad \ldots,$$

где $1(\cdot)$ – единичная ступенчатая функция.

Формула (7) определяет разложение Тейлора–Стратоновича [12]. В нем

$$\mathcal{L}_0\psi(t,x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x_i}a_i(t,x),\quad \mathcal{L}_j\psi(t,x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x_i}\sigma_{ij}(t,x),\quad j=1,\ldots,s,$$

а все ПСИ понимаются в смысле Стратоновича, причем для ПСИ смешанного типа справедливы соотношения

$$\begin{gathered}
{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}^{W(0j_1)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot)=\mathcal{J}^{W(j_1)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}f_1(\cdot),\qquad {}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}^{W(j_10)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot)=\mathcal{J}^{W(j_1)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}(h-f_1(\cdot)),\\
{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}^{W(0j_1j_2)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot)={}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}^{W(j_1j_2)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk_{10}(\cdot),\quad {}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}^{W(j_10j_2)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot)={}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}^{W(j_1j_2)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}(\Bbbk_{01}(\cdot)-\Bbbk_{10}(\cdot)),\\
{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}^{W(j_1j_20)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot)={}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}^{W(j_1j_2)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}(h\Bbbk(\cdot)-\Bbbk_{01}(\cdot)),
\end{gathered}\tag{8}$$

где в правых частях равенств

$$f_1(t)=t-\vartheta,\quad \Bbbk(t_1,t_2)=1(t_2-t_1),\quad \Bbbk_{10}(t_1,t_2)=(t_1-\vartheta)1(t_2-t_1),\quad \Bbbk_{01}(t_1,t_2)=(t_2-\vartheta)1(t_2-t_1).$$

При их подстановке в выражение (7) с точностью до знаков получается унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича [3, 13]. Отличие состоит в том, что в разложении (7) используются ПСИ только от функций вида (4), но часть этих ПСИ смешанного типа. В унифицированном разложении ПСИ смешанного типа отсутствуют за счет перехода к функциям вида (3). Эти разложения эквивалентны, но последнее содержит меньше типов ПСИ.

Для СДУ Ито (2) имеет место аналогичное разложение:

$$\begin{aligned}
X(\vartheta+h)={}&\underline{X(\vartheta)}+\underline{hb(\vartheta,X(\vartheta))}+\underline{\sum_{j_1=1}^{s}\sigma_{*j_1}(\vartheta,X(\vartheta))\,\mathcal{J}^{W(j_1)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}f(\cdot)}+\underline{\underline{\sum_{j_1,j_2=1}^{s}\mathcal{L}_{j_1}\sigma_{*j_2}(\vartheta,X(\vartheta))\,{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}^{W(j_1j_2)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot)}}+\\
&+\underline{\underline{\underline{\frac{h^2}{2}\mathcal{A}^*b(\vartheta,X(\vartheta))}}}+\underline{\underline{\underline{\sum_{j_1=1}^{s}\Big[\mathcal{A}^*\sigma_{*j_1}(\vartheta,X(\vartheta))\,{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}^{W(0j_1)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot)+\mathcal{L}_{j_1}b(\vartheta,X(\vartheta))\,{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}^{W(j_10)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot)\Big]}}}+\\
&+\underline{\underline{\underline{\sum_{j_1,j_2,j_3=1}^{s}\mathcal{L}_{j_1}\mathcal{L}_{j_2}\sigma_{*j_3}(\vartheta,X(\vartheta))\,{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}^{W(j_1j_2j_3)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot)}}}+\underline{\underline{\underline{\underline{\sum_{j_1,j_2=1}^{s}\mathcal{A}^*\mathcal{L}_{j_1}\sigma_{*j_2}(\vartheta,X(\vartheta))\,{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}^{W(0j_1j_2)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot)}}}}+\\
&+\underline{\underline{\underline{\underline{\sum_{j_1,j_2=1}^{s}\mathcal{L}_{j_1}\mathcal{A}^*\sigma_{*j_2}(\vartheta,X(\vartheta))\,{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}^{W(j_10j_2)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot)}}}}+\underline{\underline{\underline{\underline{\sum_{j_1,j_2=1}^{s}\mathcal{L}_{j_1}\mathcal{L}_{j_2}b(\vartheta,X(\vartheta))\,{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}^{W(j_1j_20)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot)}}}}+\\
&+\underline{\underline{\underline{\underline{\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=1}^{s}\mathcal{L}_{j_1}\mathcal{L}_{j_2}\mathcal{L}_{j_3}\sigma_{*j_4}(\vartheta,X(\vartheta))\,{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}^{W(j_1j_2j_3j_4)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot)}}}}+\ldots
\end{aligned}\tag{9}$$

Формула (9) описывает разложение Тейлора–Ито [12]. Здесь используется обратный производящий оператор $\mathcal{A}^*$ случайного процесса $X(\cdot)$, заданный формулой

$$\mathcal{A}^*\psi(t,x)=\sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(t,x)\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x_i\partial x_j},\quad g_{ij}(t,x)=\sum_{l=1}^{s}\sigma_{il}(t,x)\sigma_{jl}(t,x),$$

а все ПСИ следует понимать в смысле Ито, что отражено в обозначениях. Для них справедливы соотношения вида (8), но с заменой обозначения S на I.

Результат их подстановки в формулу (9) с точностью до знаков дает унифицированное разложение Тейлора–Ито [3, 13]. Как и в случае унифицированного разложения Тейлора–Стратоновича, унифицированное разложение Тейлора–Ито не содержит ПСИ смешанного типа и общее количество типов ПСИ меньше.

Отличие между дифференциальными операторами $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{A}^*$ отражает правила дифференцирования при нелинейном преобразовании решений СДУ Стратоновича и Ито: обычное правило дифференцирования сложной функции и формулу Ито соответственно [1, 3, 12].

На основе разложений Тейлора–Стратоновича и Тейлора–Ито построено семейство численных методов решения СДУ [1, 3, 12–15]. Для их описания введем равномерную сетку $\{\vartheta_i\}$ с заданным постоянным шагом h – шагом численного интегрирования, определяющую разбиение отрезка $[t_0,T]$:

$$\vartheta_{i+1}=\vartheta_i+h,\quad i=0,1,\ldots,N-1;\quad \vartheta_0=t_0,\quad \vartheta_N=T;\quad N=\frac{T-t_0}{h}.$$

Более общий случай переменного шага, задающего разбиение отрезка $[t_0,T]$, также может быть рассмотрен. При численном решении формируется дискретная аппроксимация случайного процесса $X(\cdot)$ в узлах сетки $\{\vartheta_i\}$. Обозначим ее $\{X_i\}$: $X(\vartheta_i)\approx X_i$.

Для численных методов ключевым является то, в каком смысле понимается сходимость и каким является порядок сходимости. Будем говорить, что численный метод имеет порядок среднеквадратической сходимости p, если $\max\limits_{i\in\{1,\ldots,N\}}(\mathrm{E}|X(\vartheta_i)-X_i|^2)^{1/2}\leqslant Ch^p$, и численный метод имеет порядок сильной сходимости p, если $\max\limits_{i\in\{1,\ldots,N\}}\mathrm{E}|X(\vartheta_i)-X_i|\leqslant Ch^p$, где E означает математическое ожидание, $C>0$ – константа, не зависящая от величины h, и $h\to 0$. Отметим, что второе неравенство следует из первого. Это можно показать с помощью неравенств Йенсена или Коши–Буняковского [2].

Для построения численного метода с порядком среднеквадратической или сильной сходимости p достаточно оставить в правых частях формул (7) и (9) слагаемые, подчеркнутые $r=2p$ раз (при нечетных r старший член разложения, не содержащий ПСИ, нужно брать из формулы (9)). Например, из разложения (9) получаем следующие явные разностные схемы для численного решения СДУ Ито (2):

$$p=0.5:\quad X_{i+1}=X_i+hb(\vartheta_i,X_i)+\sum_{j_1=1}^{s}\sigma_{*j_1}(\vartheta_i,X_i)\,\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(j_1)}f(\cdot),$$

$$p=1.0:\quad X_{i+1}=X_i+hb(\vartheta_i,X_i)+\sum_{j_1=1}^{s}\sigma_{*j_1}(\vartheta_i,X_i)\,\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(j_1)}f(\cdot)+\sum_{j_1,j_2=1}^{s}\mathcal{L}\sigma_{*j_2}(\vartheta_i,X_i)\,{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(j_1j_2)}\mathbb{k}(\cdot),$$

$$\begin{aligned}p=1.5:\quad X_{i+1}=&\ X_i+hb(\vartheta_i,X_i)+\sum_{j_1=1}^{s}\sigma_{*j_1}(\vartheta_i,X_i)\,\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(j_1)}f(\cdot)+\sum_{j_1,j_2=1}^{s}\mathcal{L}_{j_1}\sigma_{*j_2}(\vartheta_i,X_i)\,{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(j_1j_2)}\mathbb{k}(\cdot)+\\&+\frac{h^2}{2}\mathcal{A}^*b(\vartheta_i,X_i)+\sum_{j_1=1}^{s}\Big[\mathcal{A}^*\sigma_{*j_1}(\vartheta_i,X_i)\,{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(0j_1)}\mathbb{k}(\cdot)+\mathcal{L}_{j_1}b(\vartheta_i,X_i)\,{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(j_10)}\mathbb{k}(\cdot)\Big]+\\&+\sum_{j_1,j_2,j_3=1}^{s}\mathcal{L}_{j_1}\mathcal{L}_{j_2}\sigma_{*j_3}(\vartheta_i,X_i)\,{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(j_1j_2j_3)}\mathbb{k}(\cdot),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p=2.0:\quad X_{i+1}=&\ X_i+hb(\vartheta_i,X_i)+\sum_{j_1=1}^{s}\sigma_{*j_1}(\vartheta_i,X_i)\,\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(j_1)}f(\cdot)+\sum_{j_1,j_2=1}^{s}\mathcal{L}_{j_1}\sigma_{*j_2}(\vartheta_i,X_i)\,{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(j_1j_2)}\mathbb{k}(\cdot)+\\&+\frac{h^2}{2}\mathcal{A}^*b(\vartheta_i,X_i)+\sum_{j_1=1}^{s}\Big[\mathcal{A}^*\sigma_{*j_1}(\vartheta_i,X_i)\,{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(0j_1)}\mathbb{k}(\cdot)+\mathcal{L}_{j_1}b(\vartheta_i,X_i)\,{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(j_10)}\mathbb{k}(\cdot)\Big]+\\&+\sum_{j_1,j_2,j_3=1}^{s}\mathcal{L}_{j_1}\mathcal{L}_{j_2}\sigma_{*j_3}(\vartheta_i,X_i)\,{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(j_1j_2j_3)}\mathbb{k}(\cdot)+\sum_{j_1,j_2=1}^{s}\mathcal{A}^*\mathcal{L}_{j_1}\sigma_{*j_2}(\vartheta_i,X_i)\,{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(0j_1j_2)}\mathbb{k}(\cdot)+\\&+\sum_{j_1,j_2=1}^{s}\mathcal{L}_{j_1}\mathcal{A}^*\sigma_{*j_2}(\vartheta_i,X_i)\,{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(j_10j_2)}\mathbb{k}(\cdot)+\sum_{j_1,j_2=1}^{s}\mathcal{L}_{j_1}\mathcal{L}_{j_2}b(\vartheta_i,X_i)\,{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(j_1j_20)}\mathbb{k}(\cdot)+\\&+\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=1}^{s}\mathcal{L}_{j_1}\mathcal{L}_{j_2}\mathcal{L}_{j_3}\sigma_{*j_4}(\vartheta_i,X_i)\,{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(j_1j_2j_3j_4)}\mathbb{k}(\cdot),\end{aligned}$$

и аналогично для СДУ Стратоновича (1):

$$p=1.0:\quad X_{i+1}=X_i+ha(\vartheta_i,X_i)+\sum_{j_1=1}^{s}\sigma_{*j_1}(\vartheta_i,X_i)\,\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(j_1)}f(\cdot)+\sum_{j_1,j_2=1}^{s}\mathcal{L}_{j_1}\sigma_{*j_2}(\vartheta_i,X_i)\,{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(j_1j_2)}\mathbb{k}(\cdot),$$

$$\begin{aligned}p=1.5:\quad X_{i+1}=&\ X_i+ha(\vartheta_i,X_i)+\sum_{j_1=1}^{s}\sigma_{*j_1}(\vartheta_i,X_i)\,\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(j_1)}f(\cdot)+\sum_{j_1,j_2=1}^{s}\mathcal{L}_{j_1}\sigma_{*j_2}(\vartheta_i,X_i)\,{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(j_1j_2)}\mathbb{k}(\cdot)+\\&+\frac{h^2}{2}\mathcal{A}^*b(\vartheta_i,X_i)+\sum_{j_1=1}^{s}\Big[\mathcal{L}_0\sigma_{*j_1}(\vartheta_i,X_i)\,{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(0j_1)}\mathbb{k}(\cdot)+\mathcal{L}_{j_1}a(\vartheta_i,X_i)\,{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(j_10)}\mathbb{k}(\cdot)\Big]+\\&+\sum_{j_1,j_2,j_3=1}^{s}\mathcal{L}_{j_1}\mathcal{L}_{j_2}\sigma_{*j_3}(\vartheta_i,X_i)\,{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(j_1j_2j_3)}\mathbb{k}(\cdot),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p=2.0:\quad X_{i+1}=&\ X_i+ha(\vartheta_i,X_i)+\sum_{j_1=1}^{s}\sigma_{*j_1}(\vartheta_i,X_i)\,\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(j_1)}f(\cdot)+\sum_{j_1,j_2=1}^{s}\mathcal{L}_{j_1}\sigma_{*j_2}(\vartheta_i,X_i)\,{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(j_1j_2)}\mathbb{k}(\cdot)+\\&+\frac{h^2}{2}\mathcal{L}_0a(\vartheta_i,X_i)+\sum_{j_1=1}^{s}\Big[\mathcal{L}_0\sigma_{*j_1}(\vartheta_i,X_i)\,{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(0j_1)}\mathbb{k}(\cdot)+\mathcal{L}_{j_1}a(\vartheta_i,X_i)\,{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(j_10)}\mathbb{k}(\cdot)\Big]+\\&+\sum_{j_1,j_2,j_3=1}^{s}\mathcal{L}_{j_1}\mathcal{L}_{j_2}\sigma_{*j_3}(\vartheta_i,X_i)\,{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(j_1j_2j_3)}\mathbb{k}(\cdot)+\sum_{j_1,j_2=1}^{s}\mathcal{L}_0\mathcal{L}_{j_1}\sigma_{*j_2}(\vartheta_i,X_i)\,{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(0j_1j_2)}\mathbb{k}(\cdot)+\\&+\sum_{j_1,j_2=1}^{s}\mathcal{L}_{j_1}\mathcal{L}_0\sigma_{*j_2}(\vartheta_i,X_i)\,{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(j_10j_2)}\mathbb{k}(\cdot)+\sum_{j_1,j_2=1}^{s}\mathcal{L}_{j_1}\mathcal{L}_{j_2}a(\vartheta_i,X_i)\,{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(j_1j_20)}\mathbb{k}(\cdot)+\\&+\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=1}^{s}\mathcal{L}_{j_1}\mathcal{L}_{j_2}\mathcal{L}_{j_3}\sigma_{*j_4}(\vartheta_i,X_i)\,{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{[\vartheta_i,\vartheta_i+h]}^{W(j_1j_2j_3j_4)}\mathbb{k}(\cdot).\end{aligned}$$

Метод с порядком сходимости 0.5 называется методом Эйлера–Маруямы, а методы с порядком 1.0 – это два варианта метода Мильштейна [15].

Отметим, что моделирование ПСИ на отрезке $[\vartheta, \vartheta + h]$ не отличается от моделирования ПСИ на отрезке $[0, h]$. Вообще говоря, достаточно ограничиться отрезком $[0,1]$, а величину шага h учитывать как числовой коэффициент. Соответствие между числовыми коэффициентами и верхними мультииндексами $(j_1 \ldots j_k)$, определяющими ПСИ в разложениях (7) и (9), имеет вид

$$
\begin{aligned}
&h^{0.5}: \ (j_1), && h^{1.0}: \ (j_1 j_2),\\
&h^{1.5}: \ (0 j_1), (j_1 0), (j_1 j_2 j_3), && h^{2.0}: \ (0 j_1 j_2), (j_1 0 j_2), (j_1 j_2 0), (j_1 j_2 j_3 j_4),
\end{aligned}
$$

и эти числовые коэффициенты, очевидно, формируют порядок p среднеквадратической или сильной сходимости численного метода. Например, случайные величины ${}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{[\vartheta,\vartheta+h]}^{W(j_1 j_2 j_3)}\Bbbk(\cdot)$ и $h^{1.5} \cdot {}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{[0,1]}^{W(j_1 j_2 j_3)}\Bbbk(\cdot)$ имеют одинаковые законы распределения.

Точное моделирование некоторых ПСИ Стратоновича и Ито, например, когда величины $j_1, \ldots, j_k$ равны, не составляет проблемы. Но в общем случае их можно моделировать только приближенно. В частности, применяется численное интегрирование и метод, основанный на разложении функций $\Bbbk_{n_1 \ldots n_k}(\cdot)$ и $\Bbbk(\cdot)$ по функциям базисной системы пространства $L_2(\mathbb{T}^k)$, образованной функциями базисной системы $\{q(i,\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$ [3, 13–15]. При специальном выборе шага численного интегрирования и использовании в качестве базисной системы $\{q(i,\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ функций Уолша или Хаара эти методы фактически идентичны [7].

В дополнение к перечисленным методам можно предложить подход, основанный на спектральной форме математического описания линейных стохастических систем управления [5]. Он базируется на ортогональных разложениях, но позволяет избежать явного разложения функций $\Bbbk_{n_1 \ldots n_k}(\cdot)$ и $\Bbbk(\cdot)$ для всех требуемых значений k и обойтись минимальным набором так называемых спектральных характеристик, связанных с операциями интегрирования и умножения. При моделировании ПСИ с помощью спектральной формы математического описания для реализации численных методов решения СДУ на основе разложений (7) и (9) будем называть соответствующие численные методы численно-спектральными методами.

3. СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОВТОРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

В основе предлагаемых алгоритмов моделирования лежат следующие теоремы о спектральном представлении ПСИ ($j_1, \ldots, j_k$ – числа из множества $\{1, \ldots, s\}$).

Теорема 1. Пусть $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_s$ – спектральные характеристики белых шумов $V_1(\cdot), \ldots, V_s(\cdot)$ соответственно, P^{-1} – спектральная характеристика оператора интегрирования, A – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $f_1(t) = t - t_0$, V – спектральная характеристика множительного звена. Спектральные характеристики P^{-1}, A и V определены относительно базисной системы $\{q(i,\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$

пространства $L_2(\mathbb{T})$. Тогда ПСИ Стратоновича (5) представляется с помощью соотношений

$$
\begin{gathered}
{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\Bbbk_{n_1\ldots n_k}(\cdot)=\mathcal{V}_{j_k}^{\mathrm{T}}A^{n_k}\mathcal{X}_{k-1},\\
\mathcal{X}_l=P^{-1}A^{n_l}(V\mathcal{V}_{j_l})\mathcal{X}_{l-1},\quad l=2,\ldots,k-1,\quad \mathcal{X}_1=P^{-1}A^{n_1}\mathcal{V}_{j_1},
\end{gathered}
\tag{10}
$$

или в явном виде

$$
{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\Bbbk_{n_1\ldots n_k}(\cdot)=\mathcal{V}_{j_k}^{\mathrm{T}}A^{n_k}P^{-1}A^{n_{k-1}}(V\mathcal{V}_{j_{k-1}})\ldots P^{-1}A^{n_2}(V\mathcal{V}_{j_2})P^{-1}A^{n_1}\mathcal{V}_{j_1}. \tag{11}
$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, $\mathbf{1}$ – это спектральная характеристика функции $f(t)\equiv 1$, определенная относительно базисной системы $\{q(i,\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$. Тогда ПСИ Ито (6) представляется с помощью соотношений

$$
\begin{gathered}
{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\Bbbk_{n_1\ldots n_k}(\cdot)=-\frac{1}{2}\delta_{j_{k-1}j_k}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}A^{n_{k-1}+n_k}\mathcal{X}_{k-2}+\mathcal{V}_{j_k}^{\mathrm{T}}A^{n_k}\mathcal{X}_{k-1},\\
\mathcal{X}_l=-\frac{1}{2}\delta_{j_{l-1}j_l}P^{-1}A^{n_{l-1}+n_l}\mathcal{X}_{l-2}+P^{-1}A^{n_l}(V\mathcal{V}_{j_l})\mathcal{X}_{l-1},\quad l=2,\ldots,k-1,\quad \mathcal{X}_0=\mathbf{1},\quad \mathcal{X}_1=P^{-1}A^{n_1}\mathcal{V}_{j_1},
\end{gathered}
\tag{12}
$$

где $\delta_{j_{l-1}j_l}$ – символ Кронекера, $l=2,\ldots,k$.

Эти теоремы доказаны в статье [6], а в частном случае $n_1=\ldots=n_k=0$ – в работах [16, 17]. Все используемые в них обозначения подробно описаны в монографии [5].

Для самого простого варианта $n_1=\ldots=n_k=0$ получаются следующие спектральные представления ПСИ Стратоновича (вместо формул (10) и (11)):

$$
{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\Bbbk(\cdot)=\mathcal{V}_{j_k}^{\mathrm{T}}\mathcal{X}_{k-1},\quad \mathcal{X}_l=P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_l})\mathcal{X}_{l-1},\quad l=2,\ldots,k-1,\quad \mathcal{X}_1=P^{-1}\mathcal{V}_{j_1}, \tag{13}
$$

или в явном виде

$$
{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\Bbbk(\cdot)=\mathcal{V}_{j_k}^{\mathrm{T}}P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_{k-1}})\ldots P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_2})P^{-1}\mathcal{V}_{j_1}, \tag{14}
$$

и спектральные представления ПСИ Ито (вместо формул (12)):

$$
\begin{gathered}
{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\Bbbk(\cdot)=-\frac{1}{2}\delta_{j_{k-1}j_k}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathcal{X}_{k-2}+\mathcal{V}_{j_k}^{\mathrm{T}}\mathcal{X}_{k-1},\\
\mathcal{X}_l=-\frac{1}{2}\delta_{j_{l-1}j_l}P^{-1}\mathcal{X}_{l-2}+P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_l})\mathcal{X}_{l-1},\quad l=2,\ldots,k-1,\quad \mathcal{X}_0=\mathbf{1},\quad \mathcal{X}_1=P^{-1}\mathcal{V}_{j_1}.
\end{gathered}
\tag{15}
$$

Основу приведенных выражений составляет спектральная форма математического описания систем управления. Фактически, любой ПСИ рассматривается как сечение выходного сигнала полилинейной системы управления в момент времени T (при условии $\mathbb{T}=[t_0,T]$, но можно рассматривать и отрезок $[\vartheta,\vartheta+h]$). Входными сигналами для нее выступают гауссовские белые шумы $V_1(\cdot),\ldots,V_s(\cdot)$, соответствующие винеровским процессам $W_1(\cdot),\ldots,W_s(\cdot)$, относительно которых определен ПСИ. Сама система управления образована последовательными соединениями усилительных, интегрирующих и множительных звеньев, каждому из них ставится в соответствие спектральная характеристика (двумерная или трехмерная нестационарная передаточная функция). Используемый математический аппарат предполагает, что операции дифференцирования и интегрирования понимаются в обычном смысле, поэтому наиболее просто спектральная форма математического описания адаптируется к представлению ПСИ Стратоновича. Для представления ПСИ Ито сначала проводится преобразование к форме Стратоновича, что добавляет системе управления дополнительные параллельные соединения.

Используя в качестве некоторых входных сигналов функцию $f(t) \equiv 1$, предложенный подход обеспечивает спектральное представление ПСИ смешанного типа с корректировкой формул для ПСИ Ито, а именно с заменой величин $\delta_{j_{l-1} j_l}$ на $\delta^*_{j_{l-1} j_l} = \delta_{j_{l-1} j_l}(1-\delta_{j_l 0})$, $l = 2,\ldots,k$. Формулы для ПСИ Стратоновича остаются без изменений. Такой подход расширяет множество, которому принадлежат числа $j_1,\ldots,j_k$, до $\{0,1,\ldots,s\}$.

Более того, задавая входные сигналы базисными функциями из множества $\{q(i,\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$, можно получить элементы разложения функций $\Bbbk_{n_1\ldots n_k}(\cdot)$ и $\Bbbk(\cdot)$ по базисным функциям, т.е. фактически характеристику системы управления в спектральной форме математического описания. Спектральная характеристика функции $f(\cdot)$ встречалась выше, ее обозначение $\mathbf{1}$, а спектральная характеристика базисной функции $q(i,\cdot)$ – это столбец бесконечной единичной матрицы с номером i, его обозначение E_i. Таким образом, формулы (10)–(15) довольно универсальны и могут применяться для моделирования всех ПСИ, необходимых для реализации численных методов решения СДУ, а также для вычисления коэффициентов разложения функций $\Bbbk_{n_1\ldots n_k}(\cdot)$ и $\Bbbk(\cdot)$. Последние требуются для реализации метода, подробно описанного в работах [3, 13, 14].

Немаловажно, что базисная система $\{q(i,\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$ может быть достаточно произвольной (ограничения связаны с определением спектральной характеристики V). Для нахождения спектральной характеристики P^{-1} оператора интегрирования (двумерной нестационарной передаточной функции интегрирующего звена), спектральной характеристики A оператора умножения на функцию $f_1(\cdot)$ (двумерной нестационарной передаточной функции усилительного звена), спектральной характеристики V множительного звена (трехмерной нестационарной передаточной функции множительного звена), а также спектральной характеристики $\mathbf{1}$ функции $f(\cdot)$ достаточно применять существующее алгоритмическое обеспечение спектрального метода, которое разрабатывалось на протяжении более пятидесяти лет [9–11].

Вообще говоря, теоремы 1 и 2 дают точное представление ПСИ Стратоновича и Ито, но эти представления содержат бесконечные матрицы-столбцы, плоские и пространственные матрицы. При непосредственном моделировании ПСИ предполагается, что все спектральные характеристики, которые фигурируют в формулировках теорем 1 и 2, являются усеченными до некоторого выбранного порядка L. Это означает, что $\mathcal{V}_1,\ldots,\mathcal{V}_s$ – L-мерные случайные векторы, компоненты которых независимы в совокупности и имеют стандартное нормальное распределение, $\mathbf{1}$ – L-мерный вектор, P^{-1} и A – квадратные матрицы $L \times L$, V – пространственная матрица $L \times L \times L$. При таком подходе осуществляется приближенное моделирование.

Формулы для нахождения указанных выше спектральных характеристик здесь не приводятся, поскольку они неоднократно публиковались и в научных статьях, и в монографиях, и в учебных пособиях [5, 9–11]. Однако в следующем разделе приведены программы нахождения их усеченных вариантов при выборе базисной системы косинусоид, которая зарекомендовала себя, как наиболее перспективная (для большей части ПСИ она обеспечивает минимальную среднеквадратическую ошибку аппроксимации в сравнении с другими базисным системами: полиномами Лежандра, функциями Уолша или Хаара, тригонометрическими функциями) [8].

4. АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЧИСЛЕННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ МЕТОДОВ

Сосредоточим внимание на моделировании ПСИ согласно теоремам 1 и 2 для реализации численно-спектральных методов решения СДУ (методов моделирования траекторий стохастических динамических систем). Ниже приведены соответствующие программы для системы компьютерной математики Mathcad.

Рис. 1–3 содержат программы моделирования ПСИ Стратоновича. Для программ ssi2(Y,J), ssi3(Y,J), ssi4(Y,J) (см. рис. 1) используются следующие параметры: Y – набор реализаций спектральных характеристик независимых гауссовских белых шумов, а также векторный параметр J – мультииндекс $(j_1 \ldots j_k)$ с номерами винеровских процессов, относительно которых определены ПСИ. Они соответствуют функции $\mathbb{k}(\cdot)$.

$$\mathrm{ssi2}(\Upsilon, \mathrm{J}) := \Upsilon_{\mathrm{J}_1}{}^{\mathrm{T}} \mathrm{I} \Upsilon_{\mathrm{J}_0}$$

$$\mathrm{ssi3}(\Upsilon, \mathrm{J}) := \Upsilon_{\mathrm{J}_2}{}^{\mathrm{T}} \mathrm{I}\,\mathrm{VF}\left(\mathrm{V}, \Upsilon_{\mathrm{J}_1}\right) \mathrm{I} \Upsilon_{\mathrm{J}_0}$$

$$\mathrm{ssi4}(\Upsilon, \mathrm{J}) := \Upsilon_{\mathrm{J}_3}{}^{\mathrm{T}} \mathrm{I}\,\mathrm{VF}\left(\mathrm{V}, \Upsilon_{\mathrm{J}_2}\right) \mathrm{I}\,\mathrm{VF}\left(\mathrm{V}, \Upsilon_{\mathrm{J}_1}\right) \mathrm{I} \Upsilon_{\mathrm{J}_0}$$

Рис. 1. Моделирование ПСИ Стратоновича ${}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \ldots j_k)} \mathbb{k}(\cdot)$ *кратности* $k = 2, 3, 4$

Идентификаторы программ, которые приведены на рис. 2, содержат постфикс n и дополнительный векторный параметр n с показателями степеней $n_1, \ldots, n_k$ (в программе принята нумерация индексов с нуля) – это программы ssi2n(Y,J,n), ssi3n(Y,J,n), ssi4n(Y,J,n). Они соответствуют функции $\mathbb{k}_{n_1 \ldots n_k}(\cdot)$.

$$\mathrm{ssi2n}(\Upsilon, \mathrm{J}, \mathrm{n}) := \Upsilon_{\mathrm{J}_1}{}^{\mathrm{T}} \mathrm{A}^{\mathrm{n}_1} \mathrm{I} \mathrm{A}^{\mathrm{n}_0} \Upsilon_{\mathrm{J}_0}$$

$$\mathrm{ssi3n}(\Upsilon, \mathrm{J}, \mathrm{n}) := \Upsilon_{\mathrm{J}_2}{}^{\mathrm{T}} \mathrm{A}^{\mathrm{n}_2} \mathrm{I} \mathrm{A}^{\mathrm{n}_1} \mathrm{VF}\left(\mathrm{V}, \Upsilon_{\mathrm{J}_1}\right) \mathrm{I} \mathrm{A}^{\mathrm{n}_0} \Upsilon_{\mathrm{J}_0}$$

$$\mathrm{ssi4n}(\Upsilon, \mathrm{J}, \mathrm{n}) := \Upsilon_{\mathrm{J}_3}{}^{\mathrm{T}} \mathrm{A}^{\mathrm{n}_3} \mathrm{I} \mathrm{A}^{\mathrm{n}_2} \mathrm{VF}\left(\mathrm{V}, \Upsilon_{\mathrm{J}_2}\right) \mathrm{I} \mathrm{A}^{\mathrm{n}_1} \mathrm{VF}\left(\mathrm{V}, \Upsilon_{\mathrm{J}_1}\right) \mathrm{I} \mathrm{A}^{\mathrm{n}_0} \Upsilon_{\mathrm{J}_0}$$

Рис. 2. Моделирование ПСИ Стратоновича ${}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \ldots j_k)} \mathbb{k}_{n_1 \ldots n_k}(\cdot)$ *кратности* $k = 2, 3, 4$

Программы ssi(Y,J) и ssin(Y,J,n) подходят для произвольной кратности (см. рис. 3), кратность определяется как размер передаваемых векторных параметров.

$$\mathrm{ssi}(\Upsilon, J) := \left|\begin{array}{l} k \leftarrow \mathrm{rows}(J) \\ X_1 \leftarrow I\,\Upsilon_{J_0} \\ \text{for } l \in 2..k-1 \quad \text{if } k > 2 \\ \quad X_l \leftarrow I\,VF\left(V, \Upsilon_{J_{l-1}}\right) X_{l-1} \\ {\Upsilon_{J_{k-1}}}^{T} X_{k-1} \end{array}\right.$$

$$\mathrm{ssin}(\Upsilon, J, n) := \left|\begin{array}{l} k \leftarrow \mathrm{rows}(J) \\ X_1 \leftarrow I\,A^{n_0}\Upsilon_{J_0} \\ \text{for } l \in 2..k-1 \quad \text{if } k > 2 \\ \quad X_l \leftarrow I\,A^{n_{l-1}}\,VF\left(V, \Upsilon_{J_{l-1}}\right) X_{l-1} \\ {\Upsilon_{J_{k-1}}}^{T} A^{n_{k-1}} X_{k-1} \end{array}\right.$$

Рис. 3. Моделирование ПСИ Стратоновича ${}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\Bbbk(\cdot)$ *и* ${}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\Bbbk_{n_1\ldots n_k}(\cdot)$ *произвольной кратности*

Далее на рис. 4–6 показаны программы моделирования ПСИ Ито, они имеют те же параметры, а их идентификаторы отличаются одной буквой: isi2(Y,J), isi3(Y,J), isi4(Y,J), isi(Y,J), isi2n(Y,J,n), isi3n(Y,J,n), isi4n(Y,J,n) и isin(Y,J,n).

$$\mathrm{isi2}(\Upsilon, J) := \left|\begin{array}{l} X_0 \leftarrow F1 \\ X_1 \leftarrow I\,\Upsilon_{J_0} \\ {\Upsilon_{J_1}}^{T} X_1 - \dfrac{J_0 = J_1}{2} F1^{T} X_0 \end{array}\right.$$

$$\mathrm{isi3}(\Upsilon, J) := \left|\begin{array}{l} X_0 \leftarrow F1 \\ X_1 \leftarrow I\,\Upsilon_{J_0} \\ X_2 \leftarrow I\,VF\left(V, \Upsilon_{J_1}\right) X_1 - \dfrac{J_0 = J_1}{2} I X_0 \\ {\Upsilon_{J_2}}^{T} X_2 - \dfrac{J_1 = J_2}{2} F1^{T} X_1 \end{array}\right.$$

$$\mathrm{isi4}(\Upsilon, J) := \left|\begin{array}{l} X_0 \leftarrow F1 \\ X_1 \leftarrow I\,\Upsilon_{J_0} \\ X_2 \leftarrow I\,VF\left(V, \Upsilon_{J_1}\right) X_1 - \dfrac{J_0 = J_1}{2} I X_0 \\ X_3 \leftarrow I\,VF\left(V, \Upsilon_{J_2}\right) X_2 - \dfrac{J_1 = J_2}{2} I X_1 \\ {\Upsilon_{J_3}}^{T} X_3 - \dfrac{J_2 = J_3}{2} F1^{T} X_2 \end{array}\right.$$

Рис. 4. Моделирование ПСИ Ито ${}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\Bbbk(\cdot)$ *кратности* $k = 2, 3, 4$

$$\mathrm{isi2n}(\Upsilon, J, n) := \left|\begin{array}{l} X_0 \leftarrow F1 \\ X_1 \leftarrow I\,A^{n_0}\Upsilon_{J_0} \\ {\Upsilon_{J_1}}^{T} A^{n_1} X_1 - \dfrac{J_0 = J_1}{2} F1^{T} A^{n_0+n_1} X_0 \end{array}\right.$$

$$\mathrm{isi3n}(\Upsilon, J, n) := \left|\begin{array}{l} X_0 \leftarrow F1 \\ X_1 \leftarrow I\,A^{n_0}\Upsilon_{J_0} \\ X_2 \leftarrow I\,A^{n_1}\,VF\left(V, \Upsilon_{J_1}\right) X_1 - \dfrac{J_0 = J_1}{2} I\,A^{n_0+n_1} X_0 \\ {\Upsilon_{J_2}}^{T} A^{n_2} X_2 - \dfrac{J_1 = J_2}{2} F1^{T} A^{n_1+n_2} X_1 \end{array}\right.$$

$$\mathrm{isi4n}(\Upsilon, J, n) := \left|\begin{array}{l} X_0 \leftarrow F1 \\ X_1 \leftarrow I\,A^{n_0}\Upsilon_{J_0} \\ X_2 \leftarrow I\,A^{n_1}\,VF\left(V, \Upsilon_{J_1}\right) X_1 - \dfrac{J_0 = J_1}{2} I\,A^{n_0+n_1} X_0 \\ X_3 \leftarrow I\,A^{n_2}\,VF\left(V, \Upsilon_{J_2}\right) X_2 - \dfrac{J_1 = J_2}{2} I\,A^{n_1+n_2} X_1 \\ {\Upsilon_{J_3}}^{T} A^{n_3} X_3 - \dfrac{J_2 = J_3}{2} F1^{T} A^{n_2+n_3} X_2 \end{array}\right.$$

Рис. 5. Моделирование ПСИ Ито ${}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\Bbbk_{n_1\ldots n_k}(\cdot)$ *кратности* $k = 2, 3, 4$

$$
\mathrm{isi}(\Upsilon,\mathrm{J}) := \left|\begin{array}{ll}
\mathrm{k} \leftarrow \mathrm{rows}(\mathrm{J}) & \\
\mathrm{X}_0 \leftarrow \mathrm{F1} & \\
\mathrm{X}_1 \leftarrow \mathrm{I}\,\Upsilon_{\mathrm{J}_0} & \\
\text{for } \mathrm{l} \in 2..\mathrm{k}-1 & \text{if } \mathrm{k} > 2 \\
\quad \mathrm{X}_\mathrm{l} \leftarrow \mathrm{I}\,\mathrm{VF}\left(\mathrm{V},\Upsilon_{\mathrm{J}_{\mathrm{l}-1}}\right)\mathrm{X}_{\mathrm{l}-1} - \dfrac{\mathrm{J}_{\mathrm{l}-2} = \mathrm{J}_{\mathrm{l}-1}}{2}\mathrm{I}\,\mathrm{X}_{\mathrm{l}-2} & \\
{\Upsilon_{\mathrm{J}_{\mathrm{k}-1}}}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}_{\mathrm{k}-1} - \dfrac{\mathrm{J}_{\mathrm{k}-2} = \mathrm{J}_{\mathrm{k}-1}}{2}\mathrm{F1}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}_{\mathrm{k}-2} &
\end{array}\right.
$$

$$
\mathrm{isin}(\Upsilon,\mathrm{J},\mathrm{n}) := \left|\begin{array}{ll}
\mathrm{k} \leftarrow \mathrm{rows}(\mathrm{J}) & \\
\mathrm{X}_0 \leftarrow \mathrm{F1} & \\
\mathrm{X}_1 \leftarrow \mathrm{I}\,\mathrm{A}^{\mathrm{n}_0}\Upsilon_{\mathrm{J}_0} & \\
\text{for } \mathrm{l} \in 2..\mathrm{k}-1 & \text{if } \mathrm{k} > 2 \\
\quad \mathrm{X}_\mathrm{l} \leftarrow \mathrm{I}\,\mathrm{A}^{\mathrm{n}_{\mathrm{l}-1}}\mathrm{VF}\left(\mathrm{V},\Upsilon_{\mathrm{J}_{\mathrm{l}-1}}\right)\mathrm{X}_{\mathrm{l}-1} - \dfrac{\mathrm{J}_{\mathrm{l}-2} = \mathrm{J}_{\mathrm{l}-1}}{2}\mathrm{I}\,\mathrm{A}^{\mathrm{n}_{\mathrm{l}-2}+\mathrm{n}_{\mathrm{l}-1}}\mathrm{X}_{\mathrm{l}-2} & \\
{\Upsilon_{\mathrm{J}_{\mathrm{k}-1}}}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{n}_{\mathrm{k}-1}}\mathrm{X}_{\mathrm{k}-1} - \dfrac{\mathrm{J}_{\mathrm{k}-2} = \mathrm{J}_{\mathrm{k}-1}}{2}\mathrm{F1}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{n}_{\mathrm{k}-2}+\mathrm{n}_{\mathrm{k}-1}}\mathrm{X}_{\mathrm{k}-2} &
\end{array}\right.
$$

Рис. 6. Моделирование ПСИ Ито ${}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\mathbb{k}(\cdot)$ *и* ${}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\mathbb{k}_{n_1\ldots n_k}(\cdot)$ *произвольной кратности*

Для моделирования ПСИ Стратоновича и Ито должны быть предварительно заданы величины t_0 и T (достаточно выбрать базисную систему $\{q(i,\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2([0,1])$, т.е. $t_0 = 0$ и $T = 1$) и L (порядок усечения спектральных характеристик), а также вычислены:

I – усеченная спектральная характеристика P^{-1} оператора интегрирования (программа spI(L), рис. 7),

A – усеченная спектральная характеристика A оператора умножения на функцию $f_1(\cdot)$ (для интегралов, соответствующих функции $\mathbb{k}(\cdot)$, она не требуется; программа spAt1(L), рис. 7),

V – усеченная спектральная характеристика V множительного звена (только при $k > 2$; программа spV(L), рис. 8),

F1 – усеченная спектральная характеристика $\mathbf{1}$ функции $f(\cdot)$ (для моделирования ПСИ Ито или любых ПСИ смешанного типа; программа spF1(L), рис. 9).

Дополнительно требуется программа моделирования усеченных спектральных характеристик $\mathcal{V}_1,\ldots,\mathcal{V}_s$ гауссовских белых шумов. Так как они не зависят от выбора базисной системы и представляют собой случайные векторы с независимыми компонентами, имеющими стандартное нормальное распределение, для реализации достаточно использовать встроенную функцию Mathcad (программы spGWN(L) и spGWNs(L,s), где параметр s – размер векторного винеровского процесса $W(\cdot)$, рис. 10).

$$\mathrm{spI}(L) := T \left| \begin{array}{l} c_{0,0} \leftarrow \dfrac{1}{2} \\ \text{for } m \in 1..L-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} c_{0,m} \leftarrow \sqrt{2}\,\dfrac{1-(-1)^m}{m^2\pi^2} \\ c_{m,0} \leftarrow -c_{0,m} \end{array}\right. \\ \text{for } m \in 2..L-1 \qquad \text{if } L>2 \\ \quad \text{for } k \in 1..m-1 \\ \qquad \left| \begin{array}{l} c_{m-k,m} \leftarrow 2\,\dfrac{1-(-1)^k}{k(2m-k)\,\pi^2} \\ c_{m,m-k} \leftarrow -c_{m-k,m} \end{array}\right. \\ c \end{array}\right.$$

$$\mathrm{spAt1}(L) := T \left| \begin{array}{l} \text{for } m \in 0..L-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} c_{m,m} \leftarrow \dfrac{1}{2} \\ \text{if } m>0 \\ \quad \left| \begin{array}{l} c_{0,m} \leftarrow \sqrt{2}\,\dfrac{(-1)^m-1}{m^2\pi^2} \\ c_{m,0} \leftarrow c_{0,m} \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \text{for } m \in 2..L-1 \qquad \text{if } L>2 \\ \quad \text{for } k \in 1..m-1 \\ \qquad \left| \begin{array}{l} c_{m-k,m} \leftarrow 2\,\dfrac{\left[m^2+(m-k)^2\right]\left[(-1)^k-1\right]}{k^2(k-2m)^2\pi^2} \\ c_{m,m-k} \leftarrow c_{m-k,m} \end{array}\right. \\ c \end{array}\right.$$

Рис. 7. Формирование плоских матриц P^{-1} и A

$$\mathrm{spV}(L) := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 0..L-1 \\ \quad c_k \leftarrow \mathrm{Vk}(L,k) \\ c \end{array}\right. \qquad \mathrm{VF}(V,F) := \sum_{k=0}^{\mathrm{rows}(F)-1} \left(V_k F_k\right)$$

$$\mathrm{Vk}(L,k) := \frac{1}{\sqrt{T}} \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..L-1 \\ \quad \text{for } j \in 0..L-1 \\ \qquad c_{i,j} \leftarrow \dfrac{1}{\sqrt{1+(i>0)(j>0)(k>0)}} \quad \text{if } \left(|i-j| = k\right) \vee \left(|i+j| = k\right) \\ c \end{array}\right.$$

Рис. 8. Формирование пространственной матрицы V и вспомогательная программа умножения пространственной матрицы на матрицу-столбец

$$\mathrm{spF1}(L) := \sqrt{T} \left| \begin{array}{l} c_0 \leftarrow 1 \\ \text{for } i \in 1..L-1 \\ \quad c_i \leftarrow 0 \\ c \end{array}\right.$$

Рис. 9. Формирование матрицы-столбца **1**

$$\mathrm{spGWN}(L) := \mathrm{rnorm}(L,0,1) \qquad \mathrm{spGWNs}(L,s) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..s-1 \\ \quad \Upsilon_j \leftarrow \mathrm{rnorm}(L,0,1) \\ \Upsilon \end{array}\right.$$

Рис. 10. Формирование реализаций случайных матриц-столбцов $\mathcal{V}_1,\ldots,\mathcal{V}_s$

Литература

1. *Аверина Т.А.* Статистическое моделирование решений стохастических дифференциальных уравнений и систем со случайной структурой. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2019.
2. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977.
3. *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. С программами в среде MATLAB // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2018. № 4. С. А.1–А.1073.
4. *Леваков А.А.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Минск: БГУ, 2009.
5. *Рыбаков К.А.* Спектральный метод моделирования линейных непрерывных стохастических систем. – М.: Изд-во МАИ, 2021.
6. *Рыбаков К.А.* Спектральное представление повторных стохастических интегралов // Открытые эволюционирующие системы: Цифровая трансформация. Шестая международная научно-практическая конференция, Хабаровск, 8–9 июня 2022 г.: Материалы конф. – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2022. С. 145–162.
7. *Рыбаков К.А.* Особенности разложения кратных стохастических интегралов Стратоновича с применением функций Уолша и Хаара // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2023. № 1. С. 137–150.
8. *Рыбаков К.А.* Точное вычисление погрешности аппроксимации кратных стохастических интегралов Ито // Сибирский журнал вычислительной математики. 2023. Т. 26. № 2. С. 205–213.
9. *Рыбин В.В.* Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики. – М.: Изд-во МАИ, 2011.
10. *Солодовников В.В., Семенов В.В., Пешель М., Недо Д.* Расчет систем управления на ЦВМ: спектральный и интерполяционный методы. – М.: Машиностроение, 1979.
11. Таблицы и математическое обеспечение спектрального метода теории автоматического управления / Под ред. В.В. Семенова. – М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1973.
12. *Kloeden P.E., Platen E.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. – Springer, 1995.
13. *Kuznetsov D.F.* Mean-square approximation of iterated Ito and Stratonovich stochastic integrals: Method of generalized multiple Fourier series. Application to numerical integration of Ito SDEs and Semilinear SPDEs // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2023. № 1. С. А.1–А.947.
14. *Kuznetsov M.D., Kuznetsov D.F.* SDE-MATH: A software package for the implementation of strong high-order numerical methods for Ito SDEs with multidimensional non-commutative noise based on multiple Fourier–Legendre series // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2021. № 1. С. 93–422.
15. *Milstein G.N., Tretyakov M.V.* Stochastic Numerics for Mathematical Physics. – Springer-Verlag, 2004.
16. *Rybakov K.A.* Using spectral form of mathematical description to represent Stratonovich iterated stochastic integrals // Smart Innovation, Systems and Technologies. Vol. 217. – Springer, 2021. P. 287–304.
17. *Rybakov K.A.* Using spectral form of mathematical description to represent Ito iterated stochastic integrals // Smart Innovation, Systems and Technologies. Vol. 274. – Springer, 2022. P. 331–344.

Algorithms of Numerical-spectral Methods for Modeling Stochastic Dynamical Systems

Konstantin A. Rybakov*
Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6839-1090, e-mail: rkoffice@mail.ru

Representations of iterated Stratonovich and Ito stochastic integrals are obtained on the basis of the spectral form of mathematical description, they have both theoretical and practical significance. The latter is due to the possibility of constructing quite simple algorithms for the approximate modeling iterated stochastic integrals, which are necessary for the implementation of numerical methods for solving stochastic differential equations. The use of spectral representations of iterated stochastic integrals in numerical methods forms the numerical-spectral methods. Algorithms for them are presented in the form of programs for the computer algebra system Mathcad.

Keywords: iterated stochastic integrals, spectral form of mathematical description, spectral method, stochastic differential equation, numerical-spectral method, numerical method.

For citation:
Rybakov K.A. Algorithms of Numerical-spectral Methods for Modeling Stochastic Dynamical Systems. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 3, pp. 79–95. DOI: 10.17759/mda.2023130306 (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Averina T.A. *Statisticheskoe modelirovanie reshenii stokhasticheskikh differentcialnykh uravnenii i sistem so sluchainoi strukturoi* [Statistical Modeling of Solutions of Stochastic Differential Equations and Systems with a Random Structure]. Novosibirsk, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences Publ., 2019. (In Russ.).
2. Gikhman I.I., Skorokhod A.V. *Introduction to the Theory of Random Processes*. Dover Publ., 1997.
3. Kuznetsov D.F. Stokhasticheskie differentcialnye uravneniia: teoriia i praktika chislennogo resheniia. S programmami v srede MATLAB [Stochastic differential equations: Theory and practice of numerical solution. With programs on MATLAB]. *Differencialnie Uravnenia i Protsesy Upravlenia = Differential Equations and Control Processes*, 2018, no. 4, pp. A.1–A.1073. (In Russ.).
4. Levakov A.A. *Stokhasticheskie differentcialnye uravneniia* [Stochastic Differential Equations]. Minsk, Belarusian State University Publ., 2009. (In Russ.).
5. Rybakov K.A. *Spektralnyi metod modelirovaniia lineinykh nepreryvnykh stokhasticheskikh system* [Spectral Method for Modeling Linear Continuous Stochastic Systems]. Moscow, Moscow Aviation Institute Publ., 2021. (In Russ.).

***Konstantin A. Rybakov,** PhD (Physics & Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematical Cybernetics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6839-1090, e-mail: rkoffice@mail.ru

6. Rybakov K.A. Spektralnoe predstavlenie povtornykh stokhasticheskikh integralov [Spectral representation of iterated stochastic integrals]. *Otkrytye evoliutcioniruiushchie sistemy: Tcifrovaia transformatciia = Open Evolving Systems: Digital Transformation*. Proceedings of Sixth International Scientific and Practical Conference, Khabarovsk, June 8–9, 2022. Khabarovsk, Far-Eastern State Transport University Publ., 2022, pp. 145–162. (In Russ.).
7. Rybakov K.A. Osobennosti razlozheniia kratnykh stokhasticheskikh integralov Stratonovicha s primeneniem funktcii Uolsha i Khaara [Features of the expansion of multiple stochastic Stratonovich integrals using Walsh and Haar functions]. *Differencialnie Uravnenia i Protsesy Upravlenia = Differential Equations and Control Processes*, 2023, no. 1, pp. 137–150. (In Russ.).
8. Rybakov K.A. Exact calculation of the approximation error of multiple Ito stochastic integrals. *Numerical Analysis and Applications*, 2023, vol. 26, no. 2, pp. 205–213.
9. Rybin .V. *Modelirovanie nestatcionarnykh nepreryvno-diskretnykh sistem upravleniia spektralnym metodom v sistemakh kompiuternoi matematiki* [Modeling of Nonstationary Continuous-Discrete Control Systems by Spectral Method on Computers]. Moscow, Moscow Aviation Institute Publ., 2011. (In Russ.).
10. Solodovnikov V.V., Semenov V.V., Peshel M., Nedo D. *Raschet sistem upravleniia na TcVM: spektralnyi i interpoliatcionnyi metody* [Design of Control Systems on Digital Computers: Spectral and Interpolational Methods]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1979. (In Russ.).
11. *Tablitcy i matematicheskoe obespechenie spektralnogo metoda teorii avtomaticheskogo upravleniia* [Tables and Mathware for the Spectral Method of Control Theory]. Moscow, Bauman Moscow State Technical University Publ., 1973. (In Russ.).
12. Kloeden P.E., Platen E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer, 1995.
13. Kuznetsov D.F. Mean-square approximation of iterated Ito and Stratonovich stochastic integrals: Method of generalized multiple Fourier series. Application to numerical integration of Ito SDEs and Semilinear SPDEs. *Differencialnie Uravnenia i Protsesy Upravlenia = Differential Equations and Control Processes*, 2023, no. 1, pp. A.1–A.947.
14. Kuznetsov M.D., Kuznetsov D.F. SDE-MATH: A software package for the implementation of strong high-order numerical methods for Ito SDEs with multidimensional non-commutative noise based on multiple Fourier–Legendre series // *Differencialnie Uravnenia i Protsesy Upravlenia = Differential Equations and Control Processes*, 2021, no. 1, pp. 93–422.
15. Milstein G.N., Tretyakov M.V. *Stochastic Numerics for Mathematical Physics*. Springer-Verlag, 2004.
16. Rybakov K.A. Using spectral form of mathematical description to represent Stratonovich iterated stochastic integrals. *Smart Innovation, Systems and Technologies*. Vol. 217. Springer, 2021, pp. 287–304.
17. Rybakov K.A. Using spectral form of mathematical description to represent Ito iterated stochas-tic integrals. *Smart Innovation, Systems and Technologies*. Vol. 274. Springer, 2022, pp. 331–344.

Получена 28.07.2023
Принята в печать 28.08.2023

Received 28.07.2023
Accepted 28.08.2023