

## ◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆ АНАЛИЗ ДАННЫХ ◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

УДК 004.925.8:621.771.068

# Оптимизация выбора схемы 3D-печати функциональных объектов из композиционных материалов

*Денискина Г.Ю.\**

Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет) (МАИ)  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-4226-3288>  
e-mail: [dega17@yandex.ru](mailto:dega17@yandex.ru)

Реализация приоритетных направлений развития российской экономики, цифровая трансформация производства, совершенствование и разработка новых конструкций, применяемых на отечественных предприятиях авиационной и ракетно-космической отрасли, энергетики, машиностроения и других, в значительной мере связано с использованием полимерных композиционных материалов (КМ), которые обеспечивают оптимальные физико-механические характеристики конструкций (функциональных объектов). В качестве армирующих элементов КМ широкое применение находят углеродные волокна, т.к. они обладают большой удельной прочностью. При этом механические свойства изделий существенно зависят от направления волокон. Одним из перспективных направлений изготовления объектов из КМ, позволяющим создавать конструкции сложной формы, является технология 3D-печати. Применение 3D-печати в технологии композитов в принципе позволяет получать конструкции с пространственным армированием по заданным траекториям. Это связано с тем, что для печати используется полимерный композит, армированный непрерывным углеродным волокном (CFRT). При этом возможен полный контроль над расположением волокон во время процесса печати, что позволяет располагать 100 % волокон в соответствии с требуемыми условиями эксплуатации объекта. Однако практически неисследованными являются вопросы, связанные с оптимизацией процесса 3D-печати функциональных объектов из КМ методом 3D-печати CFRT в части контроля расположения волокон при печати, позволяющих учитывать критерии разрушения композита. Именно этой цели посвящена настоящая работа, в которой предлагаются общие подходы к постановке и решению задачи оптимизации выбора схемы 3D-печати.

**Ключевые слова:** оптимизация, композиционные материалы, теория упругости, критерии разрушения композита, 3D-печать, вейвлет-анализ.



**Для цитаты:**

Денискина Г.Ю. Оптимизация выбора схемы 3D-печати функциональных объектов из композиционных материалов // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 2. С. 7–35. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130201>

\*Денискина Галина Юрьевна, ассистент кафедры теории вероятностей и компьютерного моделирования, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-4226-3288>, e-mail: [dega17@yandex.ru](mailto:dega17@yandex.ru)

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что схема укладки волокна заложена в самих уравнениях механики КМ в виде некоторой (неизвестной) локальной ортогональной системы координат. То есть найти оптимальную схему можно только из решения уравнений с разными локальными системами координат. Традиционно схемы укладки волокон рассчитываются численными методами, главным недостатком которых является большой объём и трудоёмкость вычислительного процесса. В настоящей работе предлагается схемы укладки волокон при печати моделировать с помощью аналитических функций, которые находятся из задачи Неймана для уравнения Лапласа. Работа базируется на научно-технологических решениях исследователей Yamanaka Y., Todoroki A., Ueda M., Hirano Y., Matsuzaki R., которые предложили укладывать волокна по линиям тока несжимаемой жидкости [18, 27].

Для выбора оптимальной схемы печати в качестве целевой функции можно взять любой из критериев разрушения композиционного материала [1, 12].

Краевые условия для задачи Неймана строятся на основе задания углов между волокнами и границей области печати. Сама задача Неймана решается посредством конформного преобразования области печати на круг, которое задаётся с помощью формулы Чизотти. Таким образом, критерий разрушения композита становится функцией от углов, образуемых волокнами с границей области печати. Минимизация целевой функции осуществляется с помощью генетического алгоритма поиска глобального минимума функции нескольких переменных. Для приближённого решения уравнений механики композиционных материалов предлагается использовать вейвлеты, построенные на основе схем подразделений и подъёма [3, 4, 10, 11, 13]. Применению вейвлетов в различных дисциплинах посвящены многочисленные исследования, в первую очередь таких авторов, как Amati G., Bujurke N., Daubechies I., Lepik, U., Mallat S., Micchelli C.A., Stollnitz E.J., Sweldens W. [9, 14, 15–17, 19–26] и др. Преимущество вейвлетов перед другими базисными функциями состоит в том, что вейвлет-коэффициенты убывают быстро, поэтому достаточно небольшого числа слагаемых в разложениях. Дополнительное преимущество вейвлетов, использующих схемы подразделений и подъёма состоит в возможности управлять формой и гладкостью базисных функций, например, можно обнулять их на выбранной области, что ещё уменьшает число слагаемых в разложении. Эти преимущества оказываются важ-



ны, т.к. при минимизации целевой функции требуется многократно решать систему уравнений в частных производных, описывающую напряжённо-деформируемое состояние конструкции [3].

В данной работе предлагается общая схема решения задачи выбора оптимальной схемы 3D-печати функциональных объектов из полимерных КМ, армированных непрерывным углеродным волокном, в части контроля расположения волокон (рис. 1).

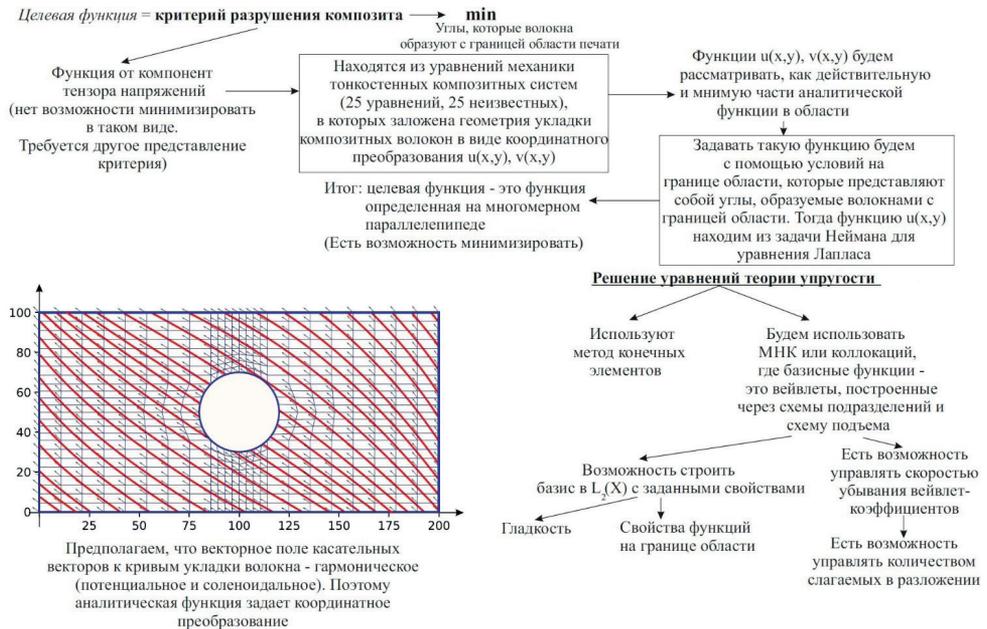


Рис. 1. Общая схема решения задачи выбора оптимальной схемы печати

## 2. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Представим уравнения теории упругости ортотропной среды, которые позволяют описать напряжённо-деформированное состояние широкого класса композитных систем [2].

Введём декартову систему координат  $O, x_1, x_2, x_3$  и связанную с рассматриваемой средой ортогональную систему криволинейных координат  $O', v_1, v_2, v_3$ . Пусть соответствие между декартовой и криволинейной системами задаётся с помощью преобразования

$$\begin{cases} x_1 = x_1(v_1, v_2, v_3), \\ x_2 = x_2(v_1, v_2, v_3), \\ x_3 = x_3(v_1, v_2, v_3). \end{cases} \quad (1)$$



Обратное к (1) преобразование пусть задано в виде

$$\begin{cases} v_1 = v_1(x_1, x_2, x_3), \\ v_2 = v_2(x_1, x_2, x_3), \\ v_3 = v_3(x_1, x_2, x_3). \end{cases} \quad (2)$$

Обозначим

$$H_i^2 = (\partial_i x_1)^2 + (\partial_i x_2)^2 + (\partial_i x_3)^2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

параметры Ламе для принятой системы координат  $O', v_1, v_2, v_3$ .

Напряжённое состояние в какой-либо точке  $M$  сплошного трёхмерного тела, как известно, характеризуется тензором напряжений, который определяется девятью компонентами. Из этих компонентов три являются нормальными напряжениями, которые действуют по трём взаимно перпендикулярным направлениям координатных линий  $O'v_i, i = 1, 2, 3$  и шесть – касательными напряжениями (рис. 2), действующими в трёх взаимно перпендикулярных плоскостях, являющихся касательными плоскостями в точке  $M$  к трём взаимно перпендикулярным координатным поверхностям  $v_1 = const, v_2 = const, v_3 = const$ .

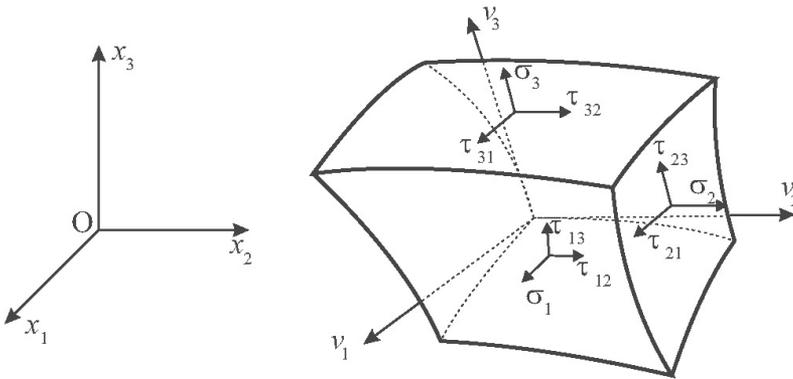


Рис. 2. Элемент сплошной среды, отнесённый к декартовой системе координат  $O, x_1, x_2, x_3$  и криволинейной системе  $O', v_1, v_2, v_3$

Уравнения равновесия, связывающие напряжения, действующие по граням выделенного из среды элемента и объёмные силы

$$F = (F_1(v_1, v_2, v_3) \quad F_2(v_1, v_2, v_3) \quad F_3(v_1, v_2, v_3))$$

имеют вид [2]:

$$\frac{\partial}{\partial v_1}(H_2 H_3 \sigma_1) + \frac{\partial}{\partial v_2}(H_1 H_3 \tau_{12}) + \frac{\partial}{\partial v_3}(H_1 H_2 \tau_{13}) - \sigma_2 H_3 \frac{\partial H_2}{\partial v_1} - \quad (4)$$



$$-\sigma_3 H_2 \frac{\partial H_3}{\partial v_1} + \tau_{12} H_3 \frac{\partial H_1}{\partial v_2} + \tau_{13} H_2 \frac{\partial H_1}{\partial v_3} + F_1 H_1 H_2 H_3 = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial v_2} (H_1 H_3 \sigma_2) + \frac{\partial}{\partial v_3} (H_1 H_2 \tau_{23}) + \frac{\partial}{\partial v_1} (H_2 H_3 \tau_{12}) - \sigma_3 H_1 \frac{\partial H_3}{\partial v_2} - \quad (5)$$

$$-\sigma_1 H_3 \frac{\partial H_1}{\partial v_2} + \tau_{23} H_1 \frac{\partial H_2}{\partial v_3} + \tau_{12} H_3 \frac{\partial H_2}{\partial v_1} + F_2 H_1 H_2 H_3 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v_3} (H_1 H_2 \sigma_3) + \frac{\partial}{\partial v_1} (H_3 H_2 \tau_{13}) + \frac{\partial}{\partial v_2} (H_1 H_3 \tau_{23}) - \sigma_1 H_2 \frac{\partial H_1}{\partial v_3} - \quad (6)$$

$$-\sigma_2 H_1 \frac{\partial H_2}{\partial v_3} + \tau_{13} H_2 \frac{\partial H_3}{\partial v_1} + \tau_{23} H_1 \frac{\partial H_3}{\partial v_2} + F_3 H_1 H_2 H_3 = 0.$$

Касательные напряжения обладают свойством парности  $\tau_{i,k} = \tau_{k,i}$ . В криволинейно ортотропной среде, оси которой совпадают с координатными линиями  $v_1, v_2, v_3$  нормальные напряжения вызывают удлинения [2]

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E_1} \sigma_1 - \mu_{12} \frac{\sigma_2}{E_2} - \mu_{13} \frac{\sigma_3}{E_3}, \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E_2} \sigma_2 - \mu_{23} \frac{\sigma_3}{E_3} - \mu_{21} \frac{\sigma_1}{E_1}, \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E_3} \sigma_3 - \mu_{31} \frac{\sigma_1}{E_1} - \mu_{32} \frac{\sigma_2}{E_2}, \end{cases} \quad (7)$$

а касательные напряжения – деформации сдвига [2]

$$\begin{cases} \varepsilon_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}}, \\ \varepsilon_{23} = \frac{\tau_{23}}{G_{23}}, \\ \varepsilon_{31} = \frac{\tau_{31}}{G_{31}}. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь имеют место условия симметрии упругих постоянных [2]

$$\begin{cases} \mu_{12} E_1 = \mu_{21} E_2; \\ \mu_{23} E_2 = \mu_{32} E_3; \\ \mu_{31} E_3 = \mu_{13} E_1. \end{cases} \quad (9)$$



Нормальные и сдвиговые деформации связаны с перемещениями  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  вдоль соответствующих координатных линий геометрическими соотношениями [2]:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{H_1} \partial_1 \xi_1 + \partial_2 H_1 \frac{\xi_2}{H_1 H_2} + \partial_3 H_1 \frac{\xi_3}{H_1 H_3}, \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{H_2} \partial_2 \xi_2 + \partial_3 H_2 \frac{\xi_3}{H_2 H_3} + \partial_1 H_2 \frac{\xi_1}{H_2 H_1}, \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{H_3} \partial_3 \xi_3 + \partial_1 H_3 \frac{\xi_1}{H_3 H_1} + \partial_2 H_3 \frac{\xi_2}{H_3 H_2}, \\ \varepsilon_{12} = \frac{H_1}{H_2} \partial_2 \left( \frac{\xi_1}{H_1} \right) + \frac{H_2}{H_1} \partial_1 \left( \frac{\xi_2}{H_2} \right), \\ \varepsilon_{23} = \frac{H_2}{H_3} \partial_3 \left( \frac{\xi_2}{H_2} \right) + \frac{H_3}{H_2} \partial_2 \left( \frac{\xi_3}{H_3} \right), \\ \varepsilon_{31} = \frac{H_3}{H_1} \partial_1 \left( \frac{\xi_3}{H_3} \right) + \frac{H_1}{H_3} \partial_3 \left( \frac{\xi_1}{H_1} \right). \end{cases} \quad (10)$$

Равенства (4) – (8) и (10) образуют полную систему уравнений теории упругости в ортогональных криволинейных координатах. Решение этих уравнений должно удовлетворять граничным условиям, заданным на поверхности тела. Геометрические граничные условия накладываются непосредственно на перемещения  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ . Статические граничные условия, определяющие характер нагружения тела поверхностными силами, записываются следующим способом

$$\begin{cases} \sigma_1 n_1 + \tau_{12} n_2 + \tau_{13} n_3 = F_{n,1}, \\ \sigma_2 n_2 + \tau_{23} n_3 + \tau_{21} n_1 = F_{n,2}, \\ \sigma_3 n_3 + \tau_{31} n_1 + \tau_{32} n_2 = F_{n,3}, \end{cases} \quad (11)$$

где  $\mathbf{n}$  – нормаль к границе тела, а  $n_i$  – косинус угла между нормалью и осью  $O'v_i$ .

#### Уравнения механики тонкостенных композитных систем.

Рассмотрим некоторый элемент слоистого материала отнесённый к ортогональной системе криволинейных координат  $v_1, v_2, v_3$  (рис. 3).

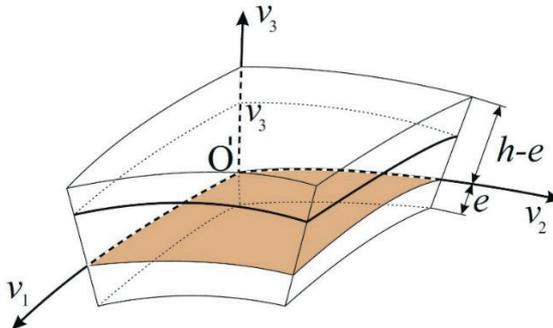


Рис. 3. Элемент слоистого материала



При этом ось  $O'v_1$  совпадает с направлением волокна, ось  $O'v_3$  ортогональна некоторой заданной начальной поверхности  $v_3 = 0$ . Обозначим  $A_1(v_1, v_2) = H_1(v_1, v_2, 0)$ ,  $A_2(v_1, v_2) = H_2(v_1, v_2, 0)$  – коэффициенты первой квадратичной формы начальной поверхности. Тогда, если  $R_1, R_2$  – главные радиусы кривизны начальной поверхности, тогда коэффициенты Ламе вычисляются по формулам [2]

$$H_i = A_i \left( 1 + \frac{v_3}{R_i} \right), \quad H_3 = 1. \quad (11)$$

Будем считать, что материал не деформируется в направлении оси  $O'v_3$ . Таким образом, изменение толщины  $h$  материала не учитывается. Поэтому  $\varepsilon_3 = 0$  и  $\mu_{31} = \mu_{32} = 0$ ,  $E_3 = \infty$ . Следовательно, на основании этой гипотезы, получаем

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E_1} \sigma_1 - \mu_{12} \frac{\sigma_2}{E_2}, \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E_2} \sigma_2 - \mu_{21} \frac{\sigma_1}{E_1} \end{cases} \quad (12)$$

Выражая из (12) и (8) напряжения, получим

$$\begin{cases} \sigma_1 = a_{11} \varepsilon_1 + a_{12} \varepsilon_2; \\ \sigma_2 = a_{21} \varepsilon_1 + a_{22} \varepsilon_2; \\ \tau_{12} = a_{33} \varepsilon_{12}, \end{cases} \quad (13)$$

где

$$a_{11} = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}; \quad a_{12} = \frac{E_1\mu_{12}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}; \quad a_{21} = \frac{E_2\mu_{21}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}; \\ a_{22} = \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, \quad a_{33} = G_{12}.$$

Уравнения (10) примут вид

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{H_1} \partial_1 \xi_1 + \partial_2 H_1 \frac{\xi_2}{H_1 H_2}, \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{H_2} \partial_2 \xi_2 + \partial_1 H_2 \frac{\xi_1}{H_2 H_1}, \\ \varepsilon_3 = \partial_3 \xi_3 = 0, \\ \varepsilon_{12} = \frac{H_1}{H_2} \partial_2 \left( \frac{\xi_1}{H_1} \right) + \frac{H_2}{H_1} \partial_1 \left( \frac{\xi_2}{H_2} \right), \\ \varepsilon_{23} = H_2 \partial_3 \left( \frac{\xi_2}{H_2} \right) + \frac{1}{H_2} \partial_2 (\xi_3), \\ \varepsilon_{31} = \frac{1}{H_1} \partial_1 (\xi_3) + H_1 \partial_3 \left( \frac{\xi_1}{H_1} \right). \end{cases} \quad (14)$$



Отсюда получаем  $\xi_3 = \xi_3(v_1, v_2)$ . В равенствах для  $\varepsilon_{23}$  и  $\varepsilon_{31}$  осредним деформацию сдвига по толщине материала

$$t_1 = \frac{1}{hA_1} \int_{-e}^{h-e} \varepsilon_{1,3} H_1 dv_3 = \frac{1}{hA_1} \int_{-e}^{h-e} \frac{\tau_{13}}{G_{13}} H_1 dv_3,$$

$$t_2 = \frac{1}{hA_2} \int_{-e}^{h-e} \varepsilon_{2,3} H_2 dv_3 = \frac{1}{hA_2} \int_{-e}^{h-e} \frac{\tau_{23}}{G_{23}} H_2 dv_3.$$

Тогда распределение перемещений по толщине материала выражается следующими формулами

$$\xi_i = \xi_{i,0}(v_1, v_2) + v_3 \theta_i(v_1, v_2), \quad i = 1, 2,$$

где  $\theta_i = t_i + \frac{\xi_{i,0}}{R_i} - \frac{1}{A_i} \partial_i \xi_3$ ,

$\xi_{i,0}(v_1, v_2)$  – перемещения точек начальной поверхности в направлении  $v_i$ .

Обозначим

$$N_1 = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^{h-e} \sigma_1 H_2 dv_3, \quad N_2 = \frac{1}{A_1} \int_{-e}^{h-e} \sigma_2 H_1 dv_3;$$

$$N_{12} = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^{h-e} \tau_{12} H_2 dv_3, \quad N_{21} = \frac{1}{A_1} \int_{-e}^{h-e} \tau_{21} H_1 dv_3;$$

$$M_1 = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^{h-e} \sigma_1 H_2 v_3 dv_3, \quad M_2 = \frac{1}{A_1} \int_{-e}^{h-e} \sigma_2 H_1 v_3 dv_3;$$

$$M_{12} = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^{h-e} \tau_{12} H_2 v_3 dv_3, \quad M_{21} = \frac{1}{A_1} \int_{-e}^{h-e} \tau_{21} H_1 v_3 dv_3.$$

Кроме этого, пусть

$$K_{12} = \frac{A_1 H_2}{A_2 H_1}; \quad K_{21} = \frac{A_2 H_1}{A_1 H_2};$$

$$B_{11} = \int_{-e}^{h-e} K_{12} a_{11} dv_3; \quad C_{11} = \int_{-e}^{h-e} K_{12} a_{11} v_3 dv_3; \quad D_{11} = \int_{-e}^{h-e} K_{12} a_{11} v_3^2 dv_3;$$

$$B_{12} = B_{21} = \int_{-e}^{h-e} a_{12} dv_3; \quad C_{12} = C_{21} = \int_{-e}^{h-e} a_{12} v_3 dv_3; \quad D_{12} = D_{21} = \int_{-e}^{h-e} a_{12} v_3^2 dv_3;$$

$$B_{33}^{11} = \int_{-e}^{h-e} K_{12} a_{33} dv_3; \quad C_{33}^{11} = \int_{-e}^{h-e} K_{12} a_{33} v_3 dv_3; \quad D_{33}^{11} = \int_{-e}^{h-e} K_{12} a_{33} v_3^2 dv_3;$$

$$B_{33}^{12} = B_{33}^{21} = \int_{-e}^{h-e} a_{33} dv_3; \quad C_{33}^{12} = C_{33}^{21} = \int_{-e}^{h-e} a_{33} v_3 dv_3; \quad D_{33}^{12} = D_{33}^{21} = \int_{-e}^{h-e} a_{33} v_3^2 dv_3;$$



$$K_1 = \frac{h^2}{\int_{-e}^{h-e} \frac{K_{21}}{G_{13}} dv_3}; \quad K_2 = \frac{h^2}{\int_{-e}^{h-e} \frac{K_{12}}{G_{23}} dv_3}.$$

Эти выражения определяют мембранные  $B$ , изгибные  $D$  и смешанные  $C$  жесткости материала. Пусть

$$Q_1 = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^{h-e} \tau_{13} H_2 dv_3; \quad Q_2 = \frac{1}{A_1} \int_{-e}^{h-e} \tau_{23} H_1 dv_3$$

и статические граничные условия на внутренней и внешней поверхностях композитной стенки имеют вид:

$$\begin{aligned} \tau_{13} &= -p_1; \quad \tau_{23} = -p_2; \quad \sigma_3 = -p, \quad \text{при } v_3 = -e; \\ \tau_{13} &= q_1; \quad \tau_{23} = q_2; \quad \sigma_3 = -q, \quad \text{при } v_3 = h - e. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \left( 1 - \frac{e}{R_1} \right); \quad B_2 = A_2 \left( 1 - \frac{e}{R_2} \right); \\ C_1 &= A_1 \left( 1 + \frac{h-e}{R_1} \right); \quad C_2 = A_2 \left( 1 + \frac{h-e}{R_2} \right). \\ g_i &= \int_{-e}^{h-e} F_i H_1 H_2 dv_3 + B_1 B_2 p_i + C_1 C_2 q_i; \quad i = 1, 2; \\ g_3 &= \int_{-e}^{h-e} F_3 H_1 H_2 dv_3 + B_1 B_2 p - C_1 C_2 q; \\ m_i &= \int_{-e}^{h-e} F_i H_1 H_2 v_3 dv_3 - e B_1 B_2 p_i + (h-e) C_1 C_2 q_i, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Полная система уравнений относительно усилий, моментов, деформаций и перемещений имеет вид [2]

$$\begin{aligned} \partial_1 (A_2 N_1) - N_2 \partial_1 (A_2) + \partial_2 (A_1 N_{21}) + N_{12} \partial_2 (A_1) + \frac{A_1 A_2}{R_1} Q_1 + g_1 &= 0; \\ \partial_2 (A_1 N_2) - N_1 \partial_2 (A_1) + \partial_1 (A_2 N_{12}) + N_{21} \partial_1 (A_2) + \frac{A_1 A_2}{R_2} Q_2 + g_2 &= 0; \\ \partial_1 (A_2 M_1) - M_2 \partial_1 (A_2) + \partial_2 (A_1 M_{21}) + M_{12} \partial_2 (A_1) - A_1 A_2 Q_1 + m_1 &= 0; \\ \partial_2 (A_1 M_2) - M_1 \partial_2 (A_1) + \partial_1 (A_2 M_{12}) + M_{21} \partial_1 (A_2) - A_1 A_2 Q_2 + m_2 &= 0; \\ \partial_1 (A_2 Q_1) + \partial_2 (A_1 Q_2) - A_1 A_2 \left( \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} \right) + g_3 &= 0 \end{aligned}$$



$$N_1 = B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + C_{11}\kappa_1 + C_{12}\kappa_2$$

$$N_2 = B_{22}\varepsilon_2 + B_{21}\varepsilon_1 + C_{22}\kappa_2 + C_{21}\kappa_1$$

$$M_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2$$

$$M_2 = C_{22}\varepsilon_2 + C_{21}\varepsilon_1 + D_{22}\kappa_2 + D_{21}\kappa_1$$

$$N_{12} = B_{33}^{11}\varepsilon_{12} + B_{33}^{12}\varepsilon_{21} + C_{33}^{11}\kappa_{12} + C_{33}^{12}\kappa_{21}$$

$$N_{21} = B_{33}^{11}\varepsilon_{21} + B_{33}^{21}\varepsilon_{12} + C_{33}^{11}\kappa_{21} + C_{33}^{21}\kappa_{12}$$

$$M_{12} = C_{33}^{11}\varepsilon_{12} + C_{33}^{12}\varepsilon_{21} + D_{33}^{11}\kappa_{12} + D_{33}^{12}\kappa_{21}$$

$$M_{21} = C_{33}^{11}\varepsilon_{21} + C_{33}^{21}\varepsilon_{12} + D_{33}^{11}\kappa_{21} + D_{33}^{21}\kappa_{12}$$

$$Q_1 = K_1 t_1; \quad Q_2 = K_2 t_2$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1} \partial_1 \xi_{1,0} + \frac{\xi_{2,0}}{A_1 A_2} \partial_2 (A_1) + \frac{\xi_3}{R_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{A_2} \partial_2 \xi_{2,0} + \frac{\xi_{1,0}}{A_1 A_2} \partial_1 (A_2) + \frac{\xi_3}{R_2};$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{A_1} \partial_1 \xi_{2,0} - \frac{\xi_{1,0}}{A_1 A_2} \partial_2 (A_1); \quad \varepsilon_{21} = \frac{1}{A_2} \partial_2 \xi_{1,0} - \frac{\xi_{2,0}}{A_1 A_2} \partial_1 (A_2);$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{A_1} \partial_1 \theta_1 + \frac{\theta_2}{A_1 A_2} \partial_2 (A_1), \quad \kappa_2 = \frac{1}{A_2} \partial_2 \theta_2 + \frac{\theta_1}{A_1 A_2} \partial_1 (A_2);$$

$$\kappa_{12} = \frac{1}{A_1} \partial_1 \theta_2 - \frac{\theta_2}{A_1 A_2} \partial_2 (A_1), \quad \kappa_{21} = \frac{1}{A_2} \partial_2 \theta_1 - \frac{\theta_1}{A_1 A_2} \partial_1 (A_2);$$

$$t_1 = \theta_1 - \frac{\xi_{1,0}}{R_1} + \frac{1}{A_1} \partial_1 \xi_3, \quad t_2 = \theta_2 - \frac{\xi_{2,0}}{R_2} + \frac{1}{A_2} \partial_2 \xi_3.$$

Будем рассматривать случай  $R_i = +\infty$ . В этом случае  $H_1 = A_1$ ,  $H_2 = A_2$ ,  $H_3 = 1$ , а также  $K_{12} = K_{21} = 1$  и  $B_1 = C_1 = A_1$ ,  $B_2 = C_2 = A_2$ . Уравнения примут вид:

$$\partial_1 (A_2 N_1) - N_2 \partial_1 (A_2) + \partial_2 (A_1 N_{21}) + N_{12} \partial_2 (A_1) + g_1 = 0; \quad (15)$$

$$\partial_2 (A_1 N_2) - N_1 \partial_2 (A_1) + \partial_1 (A_2 N_{12}) + N_{21} \partial_1 (A_2) + g_2 = 0; \quad (16)$$

$$\partial_1 (A_2 M_1) - M_2 \partial_1 (A_2) + \partial_2 (A_1 M_{21}) + M_{12} \partial_2 (A_1) - A_1 A_2 Q_1 + m_1 = 0; \quad (17)$$

$$\partial_2 (A_1 M_2) - M_1 \partial_2 (A_1) + \partial_1 (A_2 M_{12}) + M_{21} \partial_1 (A_2) - A_1 A_2 Q_2 + m_2 = 0; \quad (18)$$

$$\partial_1 (A_2 Q_1) + \partial_2 (A_1 Q_2) + g_3 = 0 \quad (19)$$

$$N_1 = B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + C_{11}\kappa_1 + C_{12}\kappa_2 \quad (20)$$

$$N_2 = B_{22}\varepsilon_2 + B_{21}\varepsilon_1 + C_{22}\kappa_2 + C_{21}\kappa_1 \quad (21)$$

$$M_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2 \quad (22)$$

$$M_2 = C_{22}\varepsilon_2 + C_{21}\varepsilon_1 + D_{22}\kappa_2 + D_{21}\kappa_1 \quad (23)$$



$$N_{12} = B_{33}^{11} \varepsilon_{12} + B_{33}^{12} \varepsilon_{21} + C_{33}^{11} \kappa_{12} + C_{33}^{12} \kappa_{21} \quad (24)$$

$$N_{21} = B_{33}^{11} \varepsilon_{21} + B_{33}^{21} \varepsilon_{12} + C_{33}^{11} \kappa_{21} + C_{33}^{21} \kappa_{12} \quad (25)$$

$$M_{12} = C_{33}^{11} \varepsilon_{12} + C_{33}^{12} \varepsilon_{21} + D_{33}^{11} \kappa_{12} + D_{33}^{12} \kappa_{21} \quad (26)$$

$$M_{21} = C_{33}^{11} \varepsilon_{21} + C_{33}^{21} \varepsilon_{12} + D_{33}^{11} \kappa_{21} + D_{33}^{21} \kappa_{12} \quad (27)$$

$$Q_1 = K_1 t_1; \quad Q_2 = K_2 t_2 \quad (28)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1} \partial_1 \xi_{1,0} + \frac{\xi_{2,0}}{A_1 A_2} \partial_2 (A_1); \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{A_2} \partial_2 \xi_{2,0} + \frac{\xi_{1,0}}{A_1 A_2} \partial_1 (A_2); \quad (29)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{A_1} \partial_1 \xi_{2,0} - \frac{\xi_{1,0}}{A_1 A_2} \partial_2 (A_1); \quad \varepsilon_{21} = \frac{1}{A_2} \partial_2 \xi_{1,0} - \frac{\xi_{2,0}}{A_1 A_2} \partial_1 (A_2); \quad (30)$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{A_1} \partial_1 \theta_1 + \frac{\theta_2}{A_1 A_2} \partial_2 (A_1), \quad \kappa_2 = \frac{1}{A_2} \partial_2 \theta_2 + \frac{\theta_1}{A_1 A_2} \partial_1 (A_2); \quad (31)$$

$$\kappa_{12} = \frac{1}{A_1} \partial_1 \theta_2 - \frac{\theta_2}{A_1 A_2} \partial_2 (A_1), \quad \kappa_{21} = \frac{1}{A_2} \partial_2 \theta_1 - \frac{\theta_1}{A_1 A_2} \partial_1 (A_2); \quad (32)$$

$$t_1 = \theta_1 + \frac{1}{A_1} \partial_1 \xi_3, \quad t_2 = \theta_2 + \frac{1}{A_2} \partial_2 \xi_3. \quad (33)$$

В результате имеем 25 уравнений относительно 25 неизвестных.

### 3. ПОСТРОЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

В двумерном случае преобразования (1), (2) имеют вид  $x_1 = x_1(v_1, v_2)$ ,  $x_2 = x_2(v_1, v_2)$  и  $v_1 = v_1(x_1, x_2)$ ,  $v_2 = v_2(x_1, x_2)$ . Условимся точки  $x = (x_1 \ x_2)$  изображать на одной комплексной плоскости, а точки  $v = (v_1 \ v_2)^T$  на другой. Тогда указанные преобразования представляют собой преобразование подмножества  $X$  плоскости  $x$  на подмножество  $\Omega$  плоскости  $v$ . Поскольку

$$\begin{cases} x_1 = x_1(v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2)); \\ x_2 = x_2(v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2)), \end{cases}$$

то должны выполняться равенства

$$\begin{cases} \partial_1 x_1 \partial_1 v_1 + \partial_2 x_1 \partial_1 v_2 = 1; & \partial_1 x_1 \partial_2 v_1 + \partial_2 x_1 \partial_2 v_2 = 0; \\ \partial_1 x_2 \partial_1 v_1 + \partial_2 x_2 \partial_1 v_2 = 0, & \partial_1 x_2 \partial_2 v_1 + \partial_2 x_2 \partial_2 v_2 = 1. \end{cases}$$

Пусть  $\Delta = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(v_1, v_2)}$ . Тогда, из полученных систем, находим

$$\partial_1 v_1 = \frac{\partial_2 x_2}{\Delta}, \quad \partial_1 v_2 = -\frac{\partial_1 x_2}{\Delta}; \quad (34)$$



$$\partial_2 v_1 = -\frac{\partial_2 x_1}{\Delta}, \quad \partial_1 v_2 = \frac{\partial_1 x_1}{\Delta}. \quad (35)$$

Касательные векторы к кривым, по которым укладываются волокна при 3D-печати образуют векторное поле  $\mathbf{r}$  в  $X$ , которое будем характеризовать комплексным числом  $\mathbf{r} = r_1 + ir_2$ , где  $r_1 = r_1(x_1, x_2)$ ,  $r_2 = r_2(x_1, x_2)$ . Будем считать это поле гармоническим, т.е. соленоидальным и потенциальным [7]. Такое поле не имеет источников и вихрей. Кроме того, обозначим  $\tilde{X}$  односвязную область, содержащей множество  $X$ , и поле будем рассматривать в этой односвязной области (рис. 4).

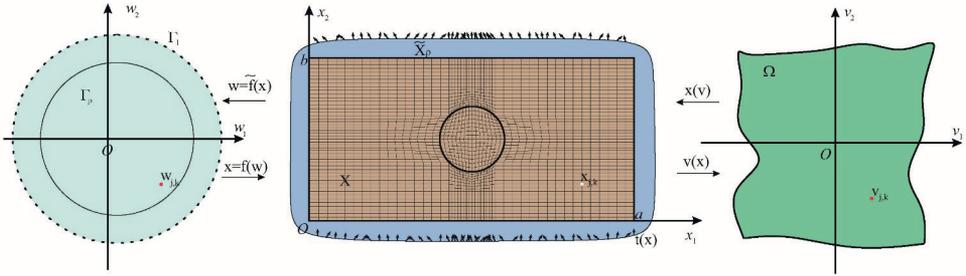


Рис. 4. Преобразование множества  $X$

Следовательно,

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \partial_1 r_1 + \partial_2 r_2 = 0.$$

Значит,  $-r_2 dx_1 + r_1 dx_2$  есть полный дифференциал некоторой функции  $v_2$ , определенной на  $X$ . Эта функция называется функцией тока. Таким образом,  $r_2 = -\partial_1 v_2$  и  $r_1 = \partial_2 v_2$ . Поскольку поле потенциально, имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{r} = 0.$$

Отсюда  $\partial_1 r_2 - \partial_2 r_1 = 0$ . Таким образом, выражение  $r_1 dx_1 + r_2 dx_2$  есть полный дифференциал некоторой функции  $v_1(x_1, x_2)$ , которая называется потенциалом поля.

Итак,  $r_1 = \partial_1 v_1$ ,  $r_2 = \partial_2 v_1$ . Кроме того, выполняются соотношения Коши-Римана

$$\partial_1 v_1 = \partial_2 v_2, \quad \partial_2 v_1 = -\partial_1 v_2.$$

Таким образом, функция тока  $v_2(x_1, x_2)$  и потенциал поля  $v_1(x_1, x_2)$  являются сопряженными гармоническими функциями. Следовательно, линии тока и линии равного потенциала образуют ортогональное семейство. Аналитическая функция

$$v_1(x_1, x_2) + iv_2(x_1, x_2), \quad x_1 + ix_2 \in X \quad (36)$$

называется комплексным потенциалом поля [8]. Таким образом, любая аналитическая функция в области  $\tilde{X}$  даёт нам и схему укладки волокон и локальную криволинейную систему координат в  $X \subset \tilde{X}$ . Сеть линий уровня  $v_1(x_1, x_2) = \text{const}$ ,



$v_2(x_1, x_2) = \text{const}$  называется изотермической сетью. Кривые, по которым укладываются волокна, определяются параметрическими представлениями

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha,1} : r_{\alpha,1}(v_1) &= x_1(v_1, \alpha) + ix_2(v_1, \alpha), \quad v_1 \in T_{\alpha,1}, \\ \gamma_{\beta,2} : r_{\beta,2}(v_2) &= x_1(\beta, v_2) + ix_2(\beta, v_2), \quad v_2 \in T_{\beta,2}. \end{aligned}$$

где  $T_{\alpha,1}, T_{\beta,2}$  – некоторые промежутки,  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  и  $T_{\alpha,1} \times \{\alpha\}, \{\beta\} \times T_{\beta,2} \subset \Omega$ .

Пусть  $\Gamma_\rho = \{w = w_1 + iw_2 : w_1^2 + w_2^2 < \rho\}$  и  $x = f(w) = f_1(w_1, w_2) + if_2(w_1, w_2)$  – конформное отображение круга  $\Gamma_1$  на область  $\tilde{X}$ , а  $w = \tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x_1, x_2) + i\tilde{f}_2(x_1, x_2)$  – преобразование обратное к  $x = f(w)$ . Для  $\rho \in (0; 1)$  обозначим  $\tilde{X}_\rho = f(\Gamma_\rho)$ .

Зададим на границе области  $\tilde{X}_\rho$  ориентацию волокна. Пусть  $n = n_1 + in_2$  – внешняя единичная нормаль к границе  $\tilde{X}_\rho$  и направление волокна в точке  $x \in \partial\tilde{X}_\rho$  задается вектором

$$t(x) = \partial_1 x_1 \Big|_{v(x)} + i\partial_1 x_2 \Big|_{v(x)}. \quad (37)$$

С учётом равенств (34) и (35) и соотношений Коши-Римана, формулу (37) можно переписать в виде

$$t(x) = \Delta \cdot \partial_2 v_2(x) - i\Delta \cdot \partial_1 v_2(x) = \Delta \cdot \partial_1 v_1(x) + i\Delta \cdot \partial_2 v_1(x).$$

Итак функцию  $v_1(x_1, x_2)$  на  $\tilde{X}_\rho$  можно искать из задачи Неймана

$$\begin{cases} \partial^{(2,0)} v_1 + \partial^{(0,2)} v_1 = 0; \\ \frac{\partial v_1}{\partial n}(x) = \partial_1 v_1(x) n_1(x) + \partial_2 v_1(x) n_2(x) = a(x) \cos \theta(x), \quad x \in \partial\tilde{X}_\rho, \end{cases} \quad (38)$$

где  $\theta(x)$  – угол между  $n(x)$  и  $t(x)$ .

Обозначим  $\eta(x) = a(x) \cos \theta(x)$ . Известно, что должно выполняться условие

$$\int_{\partial\tilde{X}_\rho} \frac{\partial v_1(x)}{\partial n} ds = \int_{\partial\tilde{X}_\rho} \frac{\partial v_2(x)}{\partial s} ds = \int_{\partial\tilde{X}_\rho} dv_2 = 0,$$

где  $\frac{\partial v_2(x)}{\partial s}$  – производная по направлению касательной к границе области. Функция  $a(x)$  в представленных примерах выбиралась следующим образом

$$a(x) = \begin{cases} \frac{1}{\int_{\cos \theta(x) > 0} \cos \theta(x) ds}, & \text{если } \cos \theta(x) > 0; \\ -\frac{1}{\int_{\cos \theta(x) < 0} \cos \theta(x) ds}, & \text{если } \cos \theta(x) < 0. \end{cases} \quad (39)$$



Из соотношений Коши-Римана и гармоничности функций  $f_1(w_1, w_2)$ ,  $f_2(w_1, w_2)$  следует, что функция  $z(w) = v_1(f(w))$  удовлетворяет уравнению

$$\partial_{1,1}z + \partial_{2,2}z = 0.$$

Рассмотрим, какому краевому условию удовлетворяет функция  $z(w)$ .

Пусть  $w \in \partial\Gamma_\rho$  и  $m$  – единичная нормаль к границе круга  $\Gamma_\rho$ . Тогда  $m = \frac{w_1}{\rho} + i \frac{w_2}{\rho}$ . Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial m}(w) = \partial_1 z(w) \frac{w_1}{\rho} + \partial_2 z(w) \frac{w_2}{\rho} = \partial_1 v_1(f(w)) \frac{\partial f_1}{\partial m}(w) + \partial_2 v_1(f(w)) \frac{\partial f_2}{\partial m}(w).$$

Рассмотрим кривую  $\partial\Gamma_\rho$  и кривую с параметрическими представлениями

$$\gamma_w : r_w(t) = w_1 \tau + i w_2 \tau, \quad \tau \in [0; 1].$$

Они перпендикулярны в точке  $\tau = 1$ , а их образы при конформном отображении  $x = f(w)$  представляют собой кривую  $\partial\tilde{X}_\rho$  и кривую

$$\gamma_{f(w)} : r_{f(w)}(\tau) = f_1(w_1 \tau, w_2 \tau) + i f_2(w_1 \tau, w_2 \tau), \quad \tau \in [0; 1].$$

Так как конформное отображение сохраняет углы между кривыми, то вектор нормали к границе  $\partial\tilde{X}_\rho$  коллинеарен касательному вектору кривой  $\gamma_{f(w)}$ . С учётом того, что

$$\left| r'_{f(w)}(1) \right| = \rho \left| \nabla f_1(w) \right| = \rho \sqrt{(\partial_1 f_1(w))^2 + (\partial_2 f_1(w))^2},$$

получаем

$$n = \frac{r'_{f(w)}(1)}{\left| r'_{f(w)}(1) \right|} = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial m}(w) + i \frac{\partial f_2}{\partial m}(w)}{\left| \nabla f_1(w) \right|}.$$

Следовательно, функция  $z$  является решением следующей задачи Неймана для круга  $\Gamma_\rho$

$$\partial_{1,1}z + \partial_{2,2}z = 0.$$

$$\frac{\partial z}{\partial m}(w) = \eta(f(w)) \left| \nabla f_1(w) \right|, \quad w \in \partial\Gamma_\rho.$$

Как известно [8], решение такой задачи может быть найдено по формуле Дини

$$z(w_1, w_2) = -\frac{\rho}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(f(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)) \left| \nabla f_1(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau) \right| \cdot \ln \frac{(w_1 - \rho \cos \tau)^2 + (w_2 - \rho \sin \tau)^2}{\rho^2} d\tau + z_0, \quad (40)$$

где  $z_0 \in \mathbb{C}$  – произвольная константа.

Для дальнейших приложений необходимы ещё формулы для частных производных  $\partial_i z$ ,  $\partial^{(i,s)} z$ ,  $i, s = 0, 1, 2$ ,  $i + s \leq 2$ . Дифференцированием интеграла по параметру получаем

$$\partial_1 z(w_1, w_2) = -\frac{\rho}{\pi} \int_0^{2\pi} \eta(f(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)) |\nabla f_1(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)| \cdot \frac{(w_1 - \rho \cos \tau)}{(w_1 - \rho \cos \tau)^2 + (w_2 - \rho \sin \tau)^2} d\tau; \quad (41)$$

$$\partial_2 z(w_1, w_2) = -\frac{\rho}{\pi} \int_0^{2\pi} \eta(f(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)) |\nabla f_1(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)| \cdot \frac{(w_2 - \rho \sin \tau)}{(w_1 - \rho \cos \tau)^2 + (w_2 - \rho \sin \tau)^2} d\tau; \quad (42)$$

$$\partial^{(2,0)} z(w_1, w_2) = -\frac{\rho}{\pi} \int_0^{2\pi} \eta(f(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)) |\nabla f_1(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)| \cdot \frac{(w_2 - \rho \sin \tau)^2 - (w_1 - \rho \cos \tau)^2}{((w_1 - \rho \cos \tau)^2 + (w_2 - \rho \sin \tau)^2)^2} d\tau; \quad (43)$$

$$\partial^{(0,2)} z(w_1, w_2) = -\frac{\rho}{\pi} \int_0^{2\pi} \eta(f(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)) |\nabla f_1(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)| \cdot \frac{(w_1 - \rho \cos \tau)^2 - (w_2 - \rho \sin \tau)^2}{((w_1 - \rho \cos \tau)^2 + (w_2 - \rho \sin \tau)^2)^2} d\tau; \quad (44)$$

$$\partial^{(1,1)} z(w_1, w_2) = \frac{2\rho}{\pi} \int_0^{2\pi} \eta(f(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)) |\nabla f_1(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)| \cdot \frac{(w_1 - \rho \cos \tau)(w_2 - \rho \sin \tau)}{((w_1 - \rho \cos \tau)^2 + (w_2 - \rho \sin \tau)^2)^2} d\tau. \quad (45)$$

Отсюда решение исходной задачи Неймана имеет вид  $v_1(x) = z(f^{-1}(x))$ .

Обозначим  $\nu(t)$  – угол наклона касательной к  $\partial \tilde{X}$  в точке  $x$ , соответствующей точке  $w = w_1 + iw_2 \in \partial \Gamma$  при конформном отображении  $x = f(w)$ . Тогда конформное преобразование единичного круга на область  $\tilde{X}$  может быть найдено по формуле Чизотти [8]



$$x = f_1(w_1, w_2) + if_2(w_1, w_2) = i \int_{w_{1,0} + iw_{2,0}}^{w_1 + iw_2} \frac{e^{i\zeta(y)}}{(1-y)^2} dy + x_0, \quad (46)$$

где

$$\zeta(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu(t) \frac{e^{it} + y}{e^{it} - y} dt + iA, \quad (47)$$

$A$  – некоторая действительная постоянная,  $x_0 \in \tilde{X}$ ,  $w_{0,1} + iw_{0,2} \in \Gamma$  – заданные точки.

Имеем

$$\zeta(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu(t) \frac{\cos t + i \sin t + y_1 + iy_2}{\cos t - y_1 + i(\sin t - y_2)} dt + iA = \zeta_1(y_1, y_2) + i\zeta_2(y_1, y_2),$$

где

$$\zeta_1(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu(t) \frac{1 - y_1^2 - y_2^2}{1 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 \cos t - 2y_2 \sin t} dt, \quad (48)$$

$$\zeta_2(y_1, y_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \nu(t) \frac{y_2 \cos t - y_1 \sin t}{1 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 \cos t - 2y_2 \sin t} dt + A. \quad (49)$$

Пусть  $w_{1,0} + iw_{2,0} = 0$ ,  $x_0 = x_{1,0} + ix_{2,0}$  а кривая интегрирования – это отрезок прямой с параметрическим представлением  $w = w_1 t + iw_2 t$ ,  $t \in [0; 1]$ . Тогда

$$f_1(w_1, w_2) = \text{Ref} = - \int_0^1 e^{-\zeta_2(w_1 t, w_2 t)} \left[ \sin \zeta_1(tw_1, tw_2) (w_1 b_1(t) - w_2 b_2(t)) + \right. \\ \left. + \cos \zeta_1(tw_1, tw_2) (w_2 b_1(t) + w_1 b_2(t)) \right] dt + x_{1,0}; \quad (50)$$

$$f_2(w_1, w_2) = \text{Imf} = \int_0^1 e^{-\zeta_2(w_1 t, w_2 t)} \left[ \cos \zeta_1(tw_1, tw_2) (w_1 b_1(t) - w_2 b_2(t)) - \right. \\ \left. - \sin \zeta_1(tw_1, tw_2) (w_2 b_1(t) + w_1 b_2(t)) \right] dt + x_{2,0}, \quad (51)$$

где

$$b_1(t) = \frac{1 - 2tu_1 + t^2(u_1^2 - u_2^2)}{(1 - 2tu_1 + t^2(u_1^2 + u_2^2))^2}, \quad (52)$$

$$b_2(t) = \frac{2tu_2(1 - tu_1)}{(1 - 2tu_1 + t^2(u_1^2 + u_2^2))^2}. \quad (53)$$

Нам потребуются формулы для частных производных  $\partial_i \tilde{f}_k$ ,  $\partial^{(\lambda, \mu)} \tilde{f}_k$ ,  $i, k = 1, 2$ ,  $\lambda, \mu = 0, 1, 2$ ,  $\lambda + \mu \leq 2$ . Для начала найдем частные производные  $\partial_i \zeta_s$ ,  $i, s = 1, 2$ . Дифференцированием интеграла по параметру находим



$$\begin{aligned} \partial_1 \zeta_2(y_1, y_2) &= -\partial_2 \zeta_1(y_1, y_2) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \nu(t) \frac{(1 + y_2^2 - y_1^2) \sin t - 2y_2 + 2y_1 y_2 \cos t}{(1 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 \cos t - 2y_2 \sin t)^2} dt, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \partial_1 \zeta_1(y_1, y_2) &= \partial_2 \zeta_2(y_1, y_2) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \nu(t) \frac{(1 + y_1^2 - y_2^2) \cos t - 2y_1 + 2y_1 y_2 \sin t}{(1 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 \cos t - 2y_2 \sin t)^2} dt. \end{aligned} \quad (55)$$

Из формулы Чизотти находим

$$(\partial_1 f_1 + i \partial_1 f_2)(w) = i \frac{e^{i\zeta(w)}}{(1-w)^2}.$$

Отсюда, обозначая

$$\begin{aligned} I_1(w) &= \left( (1-w_1)^2 - w_2^2 \right) \sin \zeta_1(w) + 2w_2(1-w_1) \cos \zeta_1(w); \\ I_2(w) &= (1-w_1)^2 + w_2^2; \\ I_3(w) &= \left( (1-w_1)^2 - w_2^2 \right) \cos \zeta_1(w) - 2w_2(1-w_1) \sin \zeta_1(w), \end{aligned}$$

и, вычисляя частные производные этих функций

$$\begin{aligned} \partial_1 I_1(w) &= -2(1-w_1) \sin \zeta_1(w) + \left( (1-w_1)^2 - w_2^2 \right) \partial_1 \zeta_1(w) \cos \zeta_1(w) - \\ &\quad - 2w_2 \cos \zeta_1(w) - 2w_2(1-w_1) \partial_1 \zeta_1(w) \sin \zeta_1(w), \\ \partial_2 I_1(w) &= -2w_2 \sin \zeta_1(w) + \left( (1-w_1)^2 - w_2^2 \right) \partial_2 \zeta_1(w) \cos \zeta_1(w) + \\ &\quad + 2(1-w_1) \cos \zeta_1(w) - 2w_2(1-w_1) \partial_2 \zeta_1(w) \sin \zeta_1(w), \\ \partial_1 I_2(w) &= -2(1-w_1), \quad \partial_2 I_2(w) = 2w_2, \end{aligned}$$

получаем

$$\partial_1 f_1(w) = \partial_2 f_2(w) = -e^{-\zeta_2(w)} \frac{I_1(w)}{(I_2(w))^2}; \quad (56)$$

$$\partial_2 f_1(w) = -\partial_1 f_2(w) = -e^{-\zeta_2(w)} \frac{I_3(w)}{(I_2(w))^2}; \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \partial^{(2,0)} f_1(w) &= e^{-\zeta_2(w)} \partial_1 \zeta_2(w) \frac{I_1(w)}{(I_2(w))^2} - e^{-\zeta_2(w)} \frac{\partial_1 I_1(w)}{(I_2(w))^2} + \\ &\quad + 2e^{-\zeta_2(w)} \frac{I_1(w) \partial_1 I_2(w)}{(I_2(w))^3}; \end{aligned} \quad (58)$$



$$\begin{aligned} \partial^{(1,1)} f_1(\mathbf{w}) &= e^{-\zeta_1(\mathbf{w})} \partial_2 \zeta_2(\mathbf{w}) \frac{I_1(\mathbf{w})}{(I_2(\mathbf{w}))^2} - e^{-\zeta_1(\mathbf{w})} \frac{\partial_2 I_1(\mathbf{w})}{(I_2(\mathbf{w}))^2} + \\ &+ 2e^{-\zeta_1(\mathbf{w})} \frac{I_1(\mathbf{w}) \partial_2 I_2(\mathbf{w})}{(I_2(\mathbf{w}))^3}; \end{aligned} \quad (59)$$

$$\partial^{(0,2)} f_1(\mathbf{w}) = -\partial^{(2,0)} f_1(\mathbf{w}); \quad (60)$$

$$\partial^{(2,0)} f_2(\mathbf{w}) = -\partial^{(1,1)} f_1(\mathbf{w}); \quad \partial^{(0,2)} f_2(\mathbf{w}) = \partial^{(1,1)} f_1(\mathbf{w}); \quad (61)$$

$$\partial^{(1,1)} f_2(\mathbf{w}) = \partial^{(2,0)} f_1(\mathbf{w}). \quad (62)$$

Теперь значения  $\partial_i \tilde{f}_k$ ,  $\partial^{(\lambda,\mu)} \tilde{f}_k$ ,  $i, k = 1, 2$ ,  $\lambda, \mu = 0, 1, 2$ ,  $\lambda + \mu \leq 2$  можно найти по формулам (64) – (70).

Из равенств

$$\begin{cases} x_1 = x_1(u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2)), \\ x_2 = x_2(u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2)) \end{cases} \quad (63)$$

находим

$$\begin{cases} 1 = \partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}); \\ 0 = \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}). \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) = \frac{\partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k})}; \\ \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) = -\frac{\partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k})}. \end{cases} \quad (64)$$

Аналогично, дифференцируя (63) по  $x_2$ , получаем

$$\begin{cases} 0 = \partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k}); \\ 1 = \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k}) \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) = -\frac{\partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k})}; \\ \partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k}) = \frac{\partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k})}. \end{cases} \quad (65)$$

Для нахождения частных производных второго порядка продифференцируем уравнения (63) дважды по  $x_1$ . Получим



$$\begin{aligned}
 & \partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(2,0)} u_1(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(2,0)} u_2(x_{j,k}) = \\
 & = -\partial^{(2,0)} x_1(u_{j,k}) \left( \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \right)^2 - \\
 & -2 \partial^{(1,1)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) - \partial^{(0,2)} x_1(u_{j,k}) \left( \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) \right)^2. \\
 & \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(2,0)} u_1(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(2,0)} u_2(x_{j,k}) = \\
 & = -\partial^{(2,0)} x_2(u_{j,k}) \left( \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \right)^2 - \\
 & -2 \partial^{(1,1)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) - \partial^{(0,2)} x_2(u_{j,k}) \left( \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) \right)^2.
 \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
 B_1 &= -\partial^{(2,0)} x_1(u_{j,k}) \left( \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \right)^2 - 2 \partial^{(1,1)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) - \\
 & \quad - \partial^{(0,2)} x_1(u_{j,k}) \left( \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) \right)^2; \\
 B_2 &= -\partial^{(2,0)} x_2(u_{j,k}) \left( \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \right)^2 - 2 \partial^{(1,1)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) - \\
 & \quad - \partial^{(0,2)} x_2(u_{j,k}) \left( \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) \right)^2.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 & \partial^{(2,0)} u_1(x_{j,k}) = \\
 & = \frac{B_1 \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) - B_2 \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k})}; \\
 & \partial^{(2,0)} u_2(x_{j,k}) = \\
 & = \frac{B_2 \partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) - B_1 \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k})}.
 \end{aligned} \tag{66}$$

Продифференцируем уравнения (63) по  $x_1, x_2$ . Получим

$$\begin{aligned}
 & \partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(1,1)} u_1(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(1,1)} u_2(x_{j,k}) = \\
 & = -\partial^{(2,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) - \\
 & -\partial^{(1,1)} x_1(u_{j,k}) \left( \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) \right) - \\
 & -\partial^{(0,2)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k}). \\
 & \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(1,1)} u_1(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(1,1)} u_2(x_{j,k}) = \\
 & = -\partial^{(2,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) - \\
 & -\partial^{(1,1)} x_2(u_{j,k}) \left( \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) \right) - \\
 & -\partial^{(0,2)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k}).
 \end{aligned}$$

Обозначим



$$\begin{aligned}
D_1 &= -\partial^{(2,0)}x_1(u_{j,k})\partial^{(1,0)}u_1(x_{j,k})\partial^{(0,1)}u_1(x_{j,k}) - \\
&\quad -\partial^{(1,1)}x_1(u_{j,k})[\partial^{(1,0)}u_1(x_{j,k})\partial^{(0,1)}u_2(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)}u_1(x_{j,k})\partial^{(1,0)}u_2(x_{j,k})] - \\
&\quad -\partial^{(0,2)}x_1(u_{j,k})\partial^{(1,0)}u_2(x_{j,k})\partial^{(0,1)}u_2(x_{j,k}) \\
D_2 &= -\partial^{(2,0)}x_2(u_{j,k})\partial^{(1,0)}u_1(x_{j,k})\partial^{(0,1)}u_1(x_{j,k}) - \\
&\quad -\partial^{(1,1)}x_2(u_{j,k})[\partial^{(1,0)}u_1(x_{j,k})\partial^{(0,1)}u_2(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)}u_1(x_{j,k})\partial^{(1,0)}u_2(x_{j,k})] - \\
&\quad -\partial^{(0,2)}x_2(u_{j,k})\partial^{(1,0)}u_2(x_{j,k})\partial^{(0,1)}u_2(x_{j,k})
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\partial^{(1,1)}u_1(x_{j,k}) = \\
&= \frac{D_1\partial^{(0,1)}x_2(u_{j,k}) - D_2\partial^{(0,1)}x_1(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)}x_1(u_{j,k})\partial^{(0,1)}x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)}x_2(u_{j,k})\partial^{(0,1)}x_1(u_{j,k})}; \tag{67}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\partial^{(1,1)}u_2(x_{j,k}) = \\
&= \frac{D_2\partial^{(1,0)}x_1(u_{j,k}) - D_1\partial^{(1,0)}x_2(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)}x_1(u_{j,k})\partial^{(0,1)}x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)}x_2(u_{j,k})\partial^{(0,1)}x_1(u_{j,k})}. \tag{68}
\end{aligned}$$

Далее продифференцируем уравнения (63) дважды по  $x_2$ . Получим

$$\begin{aligned}
&\partial^{(0,2)}u_1(x_{j,k}) = \\
&= \frac{C_1\partial^{(0,1)}x_2(u_{j,k}) - C_2\partial^{(0,1)}x_1(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)}x_1(u_{j,k})\partial^{(0,1)}x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)}x_2(u_{j,k})\partial^{(0,1)}x_1(u_{j,k})}; \tag{69}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\partial^{(0,2)}u_2(x_{j,k}) = \\
&= \frac{C_2\partial^{(1,0)}x_1(u_{j,k}) - C_1\partial^{(1,0)}x_2(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)}x_1(u_{j,k})\partial^{(0,1)}x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)}x_2(u_{j,k})\partial^{(0,1)}x_1(u_{j,k})}, \tag{70}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
C_1 &= -\partial^{(2,0)}x_1(u_{j,k})\left(\partial^{(0,1)}u_1(x_{j,k})\right)^2 - 2\partial^{(1,1)}x_1(u_{j,k})\partial^{(0,1)}u_1(x_{j,k})\partial^{(0,1)}u_2(x_{j,k}) - \\
&\quad -\partial^{(0,2)}x_1(u_{j,k})\left(\partial^{(0,1)}u_2(x_{j,k})\right)^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 &= -\partial^{(2,0)}x_2(u_{j,k})\left(\partial^{(0,1)}u_1(x_{j,k})\right)^2 - 2\partial^{(1,1)}x_2(u_{j,k})\partial^{(0,1)}u_1(x_{j,k})\partial^{(0,1)}u_2(x_{j,k}) - \\
&\quad -\partial^{(0,2)}x_2(u_{j,k})\left(\partial^{(0,1)}u_2(x_{j,k})\right)^2.
\end{aligned}$$

Диффеоморфизмы  $x_\theta(v) = (x_1(v_1, v_2) \quad x_2(v_1, v_2))^T$ , определяющие криволинейные системы координат на  $X$ , найдём через их обратные

$$v_\theta(x) = (v_1(x_1, x_2) \quad v_2(x_1, x_2))^T.$$

Как далее увидим, функция  $v_2(x_1, x_2)$  не потребуется. Для решения задач теории упругости достаточно иметь только функцию  $v_1$  и соотношения Коши-Римана.

Функция  $\theta(x)$  задаётся в дискретном множестве точек границы  $\partial\tilde{X}_\rho$ . Выбор углов  $\theta(x_i)$ , где  $x_i \in \partial\tilde{X}_\rho$  для приближённого вычисления (40), производится следующим образом. Как было отмечено выше, должно выполняться условие  $\int_{\partial\tilde{X}_\rho} a(x) \cos\theta(x) ds = 0$ . Таким образом, из (39) следует, что должны быть участки границы, на которых  $\theta(x_i) \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ , и должны быть участки границы, на которых  $\theta(x_i) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Поэтому выберем произвольное разбиение кривой  $s$  на дуги  $[x_{i_s}, x_{i_{s+1}})$ ,  $s = 0, 1, \dots, \tilde{N}-1$ ,  $i_0 = 0 < i_1 < \dots < i_{\tilde{N}}$  и зафиксируем его.

Пусть

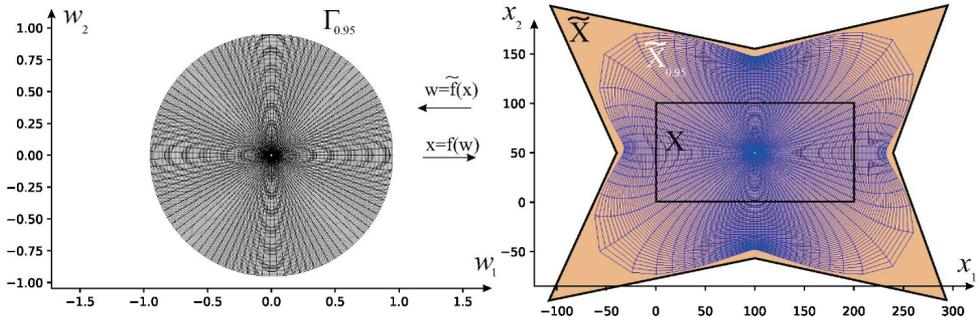
$$I_{\tilde{N}} = \{e = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_{\tilde{N}})^T: e_i \in \{-1, 0, 1\}, i = 1, \dots, \tilde{N} \text{ и } \exists i_1, i_2, e_{i_1} \cdot e_{i_2} = -1\}.$$

На каждой из дуг  $[x_{i_s}, x_{i_{s+1}})$

$$\theta(x_i) = \frac{\pi}{2} - e_{s+1} \cdot \theta_i \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \theta_i \in (0; 1], \quad i = i_s, \ i_s + 1, \dots, i_{s+1} - 1.$$

Таким образом, если  $e_{s+1} = 1$ , то  $\theta(x_i) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $i = i_s, \ i_s + 1, \dots, i_{s+1} - 1$ , если  $e_{s+1} = -1$ , то  $\theta(x_i) \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ ,  $i = i_s, \ i_s + 1, \dots, i_{s+1} - 1$  и, если  $e_{s+1} = 0$ , то  $\theta(x_i) = \frac{\pi}{2}$ ,  $i = i_s, \ i_s + 1, \dots, i_{s+1} - 1$ . При этом обязательно есть две дуги такие, что на одной –  $\theta(x_i) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ , а на другой –  $\theta(x_i) \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ .

На рис. 5 показано конформное преобразование круга на многоугольник и его ограничения на круги  $\Gamma_{0,95}$  и  $\Gamma_{0,75}$ . На рис. 6 и рис. 7 показано векторное поле, образованное касательными векторами к кривым  $v_1(x_1, x_2) = \text{const}$  и  $v_2(x_1, x_2) = \text{const}$ , построенное для случаев  $e = (-1, 1, 1, 1)^T$  и  $e = (-1, 1, -1, 1)^T$  соответственно.



a

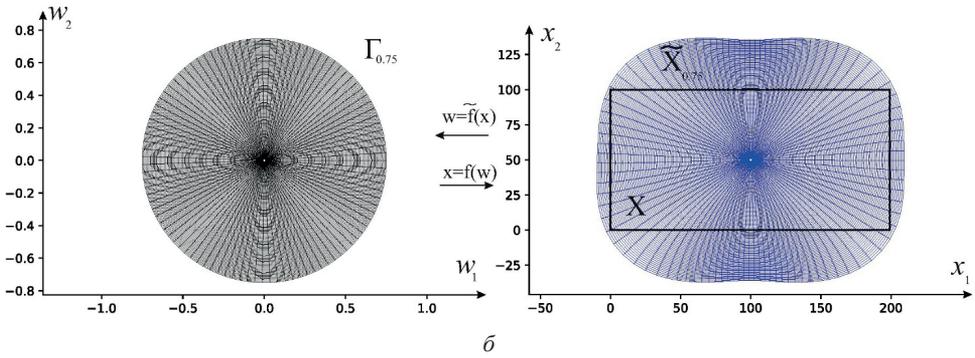


Рис. 5. Конформное преобразование круга на многоугольник и его ограничения на круги:  $a$  – круг  $\Gamma_{0.95}$ ,  $\bar{b}$  – круг  $\Gamma_{0.75}$

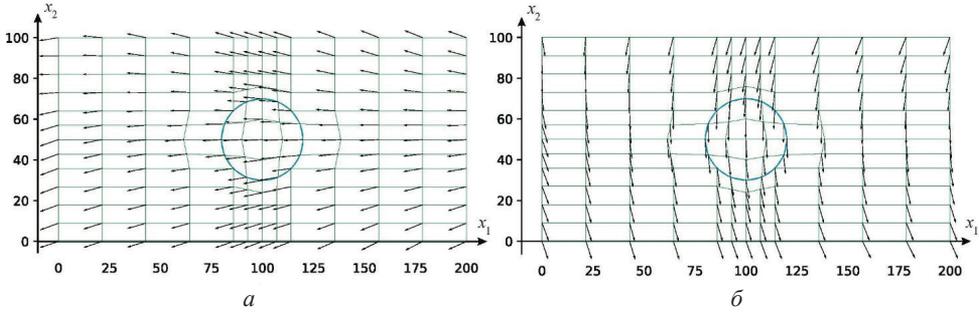


Рис. 6. Касательные векторы к кривым для случая  $e = (-1, 1, 1)^T$ :  
 $a$  – кривая  $v_1(x_1, x_2) = const$ ,  $\bar{b}$  – кривая  $v_2(x_1, x_2) = const$

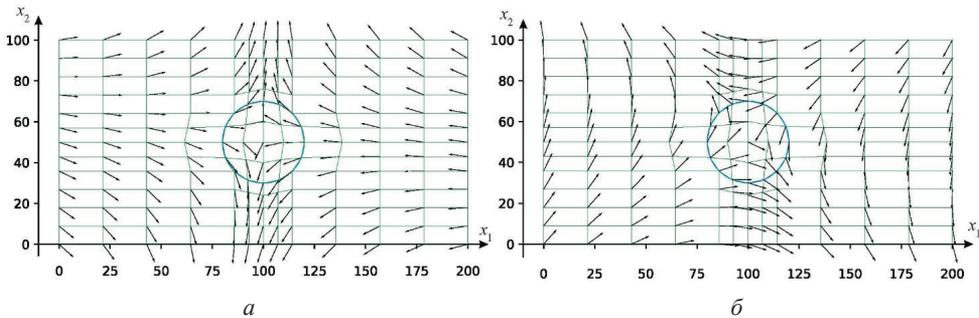


Рис. 7. Касательные векторы к кривым для случая  $e = (-1, 1, -1)^T$ :  
 $a$  – кривая  $v_1(x_1, x_2) = const$ ,  $\bar{b}$  – кривая  $v_2(x_1, x_2) = const$

## 4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ИЗГОТОВЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ МЕТОДОМ 3D-ПЕЧАТИ

В разделе ставится задача нахождения оптимальных траекторий укладки волокон при 3D-печати функциональных объектов (конструкций из композиционных материалов, армированных непрерывными волокнами).

Пусть  $\sigma_1^\pm, \sigma_2^\pm$  – пределы прочности при растяжении и сжатии вдоль и поперёк волокон, а  $\hat{\tau}_{12}$  – предел прочности при сдвиге в плоскости слоя. В качестве целевой функции будет использован критерий максимальных напряжений [2]

$$R(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}) = \max\left(\frac{\sigma_1}{m_1(\sigma_1)}, \frac{\sigma_2}{m_2(\sigma_2)}, \frac{\tau_{12}}{\hat{\tau}_{12}}\right),$$

где

$$m_1(\sigma_1) = \begin{cases} \sigma_1^+, & \text{если } \sigma_1 > 0; \\ \sigma_1^-, & \text{если } \sigma_1 < 0, \end{cases} \quad m_2(\sigma_2) = \begin{cases} \sigma_2^+, & \text{если } \sigma_2 > 0; \\ \sigma_2^-, & \text{если } \sigma_2 < 0. \end{cases}$$

Как было отмечено выше  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$  могут быть найдены из уравнений (15) – (33), если задать преобразование  $v(x)$ , которое можно найти из уравнения (38). Краевые условия к этому уравнению получаем заданием углов  $\theta(x_i)$ ,  $x_i \in \partial X$ , которые волокна образуют с внешней нормалью к границе множества  $X$ . Следовательно, целевая функция, на самом деле, является функция этих углов  $\theta$

$$\theta|_{\partial X} \mapsto v(x) = (v_1(x), v_2(x)) \mapsto (\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}) \mapsto \max\left(\frac{\sigma_1}{m_1(\sigma_1)}, \frac{\sigma_2}{m_2(\sigma_2)}, \frac{\tau_{12}}{\hat{\tau}_{12}}\right).$$

Соответствие  $(v_1(x), v_2(x)) \mapsto (\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12})$  осуществляется с помощью описанного в настоящей работе метода путём приближённого решения уравнений механики композиционных материалов. Минимизировать функцию  $R$  предлагается с помощью метода, представленного в работе [25] и реализованного в библиотеке SciPy© для языка программирования Python©.

С учётом обозначений предыдущего раздела оптимальные траектории укладки волокон можно найти из решения оптимизационной задачи

$$(e^*, \theta_0^*, \dots, \theta_{i_N}^*) = \arg \min_{e \in I_N} \min_{\theta_0, \dots, \theta_{i_N-1} \in (0; \pi]} R\left(\frac{\pi - e_1 \cdot \theta_0}{2}, \dots, \frac{\pi - e_N \cdot \theta_{i_N-1}}{2}\right).$$

Также можно будет найти координатное преобразование  $v^*(x)$ , которое и задаёт траектории укладки волокон.

На основе предлагаемого подхода автором разработаны алгоритмы и программный комплекс управления и оптимизации процесса 3D-печати функционального объекта, в которых реализована возможность нахождения оптимальной схемы печати, диктуемой условиями его эксплуатации [3, 5, 6].



## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе получены следующие результаты:

1. Применительно к предмету исследования проанализированы основные сведения из механики композиционных материалов. Показано, что схема укладки волокна заложена в самих уравнениях механики композиционных материалов в виде некоторой (неизвестной) локальной ортогональной системы координат. Поэтому найти оптимальную схему можно только из уравнений путём их решения с разными локальными системами координат.
2. Разработана математическая модель укладки волокон при 3D-печати функциональных объектов из композиционных материалов. Траектории укладки волокон получаются с помощью аналитических функций, краевые условия для которых – это углы, образуемые волокнами с границей области печати.
3. В рамках модели предложен метод нахождения оптимальной схемы укладки волокон при печати, диктуемой условиями эксплуатации объекта. Критерий разрушения композиционного материала представлен как функция углов, которые волокна образуют с границей области печати. Разработан вычислительный алгоритм нахождения значения критерия разрушения по заданным углам, основанный на конформных преобразованиях.
4. Поставлена задача оптимизации для нахождения траекторий укладки волокон при 3D-печати функциональных объектов из композиционных материалов. Предложен метод нахождения значений критерия разрушения композиционного материала как целевой функции задачи оптимизации.

### *Литература*

1. Босов, А.В., Битюков, Ю.И., Денискина, Г.Ю. О поиске оптимальной схемы 3D-печати конструкций из композиционных материалов / А.В. Босов, Ю.И. Битюков, Г.Ю. Денискина // Информатика и её применения. – 2022. – Т. 16. – Вып. 1. – С. 10–19. – DOI: 10.14357/19922264220102.
2. Васильев, В.В. Механика конструкций из композиционных материалов / В.В. Васильев. – Москва: Машиностроение, 1988. – 272 с.
3. Денискина, Г.Ю. CAD/CAM/CAE-система для изготовления конструкций из волокнистых композиционных материалов методом 3D-печати / Г.Ю. Денискина // Труды МАИ. – 2022. – № 126. – DOI: 10.34759/trd-2022-126-21.
4. Денискина, Г.Ю. Приближённое решение уравнений теории упругости с помощью сплайн-вейвлетов / Г.Ю. Денискина // Труды МАИ. – 2021. – № 121. – DOI: 10.34759/trd-2021-121-24.
5. Денискина, Г.Ю. Программа для моделирования процесса 3D-печати CompositeCAD (подсистема САД) / Г.Ю. Денискина // Свидетельство № 2022682105 о государственной регистрации программы для ЭВМ. – 2022.
6. Денискина, Г.Ю. Программа для моделирования процесса 3D-печати CompositeCAD (подсистема САЕ) / Г.Ю. Денискина // Свидетельство № 2022682106 о государственной регистрации программы для ЭВМ. – 2022.
7. Зорич, В.А. Математический анализ: в 2 ч. / В.А. Зорич. – Изд. 3-е, испр. и доп. – Москва: МЦМНМО, 2001. – 794 с.



8. *Лаврентьев, М.А., Шабат, Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – Москва: Наука, 1973. – 736 с.
9. *Amati, G.* The Reuse of Free-Form Surface Features: A Wavelet Approach / G. Amati, A. Liverani, G. Caligiana // Proceedings of the IASTED International Conference APPLIED SIMULATION AND MODELLING, June 28–30, 2004, Rhodes, Greece. – P. 247–252.
10. *Bityukov, Y.I.* Spline Wavelets Use for Output Processes Analysis of Multi-Dimensional Non-Stationary Linear Control Systems / Y.I. Bityukov, Y.I. Deniskin, G.Y. Deniskina // Journal of Physics: Conference Series. – Omsk: Institute of Physics Publishing, 2018. – P. 012018. – DOI 10.1088/1742-6596/944/1/012018.
11. *Deniskina, G.Y.* About Biorthogonal Wavelets, Created on the Basis of Scheme of Increasing of Lazy Wavelets / G.Y. Deniskina, Y.I. Deniskin, Y.I. Bityukov // Lecture Notes in Electrical Engineering. – 2021. – Vol. 729 LNEE. – P. 173–181. – DOI 10.1007/978-3-030-71119-1\_18.
12. Application of Wavelets and Conformal Reflections to Finding Optimal Scheme of Fiber Placement at 3D-Printing Constructions from Composition Materials / Yu. Bityukov, Yu. Deniskin, G. Deniskina, I.V. Potsebnova // E3S Web of Conferences: 2021. – P. 05004. – DOI 10.1051/e3sconf/202124405004.
13. *Deniskina, G.Y.* About Some Computational Algorithms for Locally Approximation Splines, Based on the Wavelet Transformation and Convolution / G.Y. Deniskina, Y.I. Deniskin, Y.I. Bityukov // Lecture Notes in Electrical Engineering. – 2021. – Vol. 729 LNEE. – P. 182–191. – DOI 10.1007/978-3-030-71119-1\_19.
14. *Bujurke, N., Shiralashetti, S., Salimath, C.* An Application of Single-term Haar Wavelet Series in the Solution of Non-linear Oscillator Equations / N. Bujurke, S. Shiralashetti, C.J. Salimath // Comput. Appl. Math. – 2009. – 227. – P. 234–244.
15. *Daubechies, I.* A Simple Wilson Orthonormal Basis with Exponential Decay / I. Daubechies, S. Jaffard, J.L. Journé // SIAM J. Math. Anal. – 1991. – 22. – P. 554–572.
16. *Daubechies, I.* Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets / I. Daubechies // Comm. Pure Appl. Math. – 1988. – 41. – P. 909–996.
17. *Daubechies, I.* Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets II. Variations on a Theme / I. Daubechies // SIAM J. Math. Anal. – 1993. – 21. – P. 499–519.
18. Fiber Line Optimization in Single Ply for 3D Printed Composites / Yusuke Yamanaka, Akira Todoroki, Masahito Ueda, Yoshiyasu Hirano and Ryosuke Matsuzaki // Open Journal of Composite Materials, SCIRP. – 2016, Vol. 6, No 4. – P. 121–131.
19. *Lepik, U.* Application of the Haar Wavelet Transform to Solving Integral and Differential Equations / U. Lepik // Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. – 2007. – 56. – P. 28–46.
20. *Lepik, U., Hein, H.* Haar Wavelets with Applications / U. Lepik, H. Hein. – Springer, 2014. – 207 p.
21. *Mallat, S.* Multiresolution Approximation and Wavelets / S. Mallat // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – 315. – P. 69–88.
22. *Mallat, S.* Zero-crossings of a Wavelet Transform / S. Mallat // IEEE Trans. Inform. Theory. – 1991. – 37. – P. 1019–1033.
23. *Micchelli, C.A.* Interpolatory Subdivision Schemes and Wavelets / C.A. Micchelli // Journal of Approximation Theory. – 1996. – Vol. 86, Issue 1. – P. 41–71.
24. *Stollnitz, E.J.* Wavelets for Computer Graphics: A Primer / Eric J. Stollnitz, T.D. DeRose, David H. Salesin // IEEE Computer Graphics and Applications. – 1995. – May. – 15(3). – P. 76–84 (part 1); July. – 15(4). – P. 75–85 (part 2).
25. *Storn, R., Price, K.* Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization Over Continuous Spaces / R. Storn, K. Price // Journal of Global Optimization. – 1997, No. 11. – P. 341–359.



26. *Sweldens, W.* The Lifting Scheme: A Custom-Design Construction of Biorthogonal Wavelets / *W. Sweldens* // *Applied and Computational Harmonic Analysis*. – 1996. – Vol. 3, Issue 2. – P. 186–200.
27. *Torghabehi, O.O.* Developing a Computational Approach Towards a Performance Based Design and Robotic Fabrication of Fibrous Skin Structures / *Omid Oliyan Torghabehi, Alireza Seyedahmadian and Wes McGee* // *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2015, Amsterdam Future Visions, 17–20 August 2015, Amsterdam, The Netherlands*. – DOI: 10.13140/RG.2.1.2324.6569.



# Optimization of Scheme Selection for 3D Printing of Functional Objects from Composite Materials

**Galina Y. Deniskina\***

Moscow State Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-4226-3288>  
e-mail: [dega17@yandex.ru](mailto:dega17@yandex.ru)

The implementation of priority areas for the development of the Economy of the Russian Federation, the digital transformation of production, the improvement and development of new designs used at domestic enterprises in the aviation and rocket and space industries, energy, mechanical engineering and others, is largely associated with the use of polymer composite materials (CM), which provide optimal physical and mechanical characteristics of structures (functional objects). As reinforcing elements of CM, carbon fibers are widely used, because they have high specific strength. At the same time, the mechanical properties of products significantly depend on the direction of the fibers. One of the promising directions for the manufacture of objects from CM, which makes it possible to create structures of complex shape, is 3D printing technology. The use of 3D printing makes it possible to obtain structures with spatial reinforcement along specified trajectories. This is due to the fact that continuous carbon fiber reinforced polymer composite (CFRT) is used for printing. This allows full control over the location of the fibers during the printing process, which allows you to arrange 100 % of the fibers in accordance with the required operating conditions of the object. However, practically unexplored are issues related to the optimization of the process of 3D printing of functional objects from CM by the method CFRT 3D printing in terms of controlling the location of fibers during printing, allowing to take into account the criteria for the destruction of the composite. This work is devoted to this goal, which proposes general approaches to setting and solving the problem of optimizing the selection of a 3D-printing scheme.

**Keywords:** optimization, composite materials, elasticity theory, composite material destruction criteria, 3D printing, wavelet analysis.

**For citation:**

Deniskina G.Y. Optimization of Scheme Selection for 3D-Printing of Functional Objects from Composite Materials. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 2, pp. 7–35. DOI: 10.17759/mda.2023130201 (In Russ., abstr. in Engl.).

\*Galina Y. Deniskina, Assistant of the Department of Probability Theory and Computer Modeling, Moscow State Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-4226-3288>, e-mail: [dega17@yandex.ru](mailto:dega17@yandex.ru)



## References

1. Bosov, A.V., Bityukov, Y.I., Deniskina, G.Y. About Searching for the Optimal 3D Printing Scheme of Structures from Composite Materials / A.V. Bosov, Y.I. Bityukov, G.Y. Deniskina // *Informatics and Applications*. – 2022. – V.16. – Issue 1. – P. 10–19. – DOI: 10.14357/19922264220102.
2. Vasiljev, V.V. *Mechanics of Structures Made of Composite Materials* / V.V. Vasiljev. – Moscow: Mashinostroenie, 1988. – 272 p.
3. Deniskina, G.Y. CAD/CAM/CAE-System for Manufacturing Structures from Fibrous Composite Materials Using 3D-printing / G.Y. Deniskina // *Trudy MAI*. – 2022. – № 126. – DOI: 10.34759/trd-2022-126-21.
4. Deniskina, G.Y. Method for Finding Approximate Solutions of Elasticity Equations Using Spline Wavelets / Г.Ю. Денискина // G.Y. Deniskina // *Trudy MAI*. – 2021. – № 121. – DOI: 10.34759/trd-2021-121-24.
5. Deniskina, G.Y. Program for Modeling the Process of 3D Printing CompositeCAD (CAD-system) / G.Y. Deniskina // Certificate No. 2022682105 on State Registration of the Computer Program. – 2022.
6. Deniskina, G.Y. Program for Modeling the Process of 3D Printing CompositeCAD (CAE-system) / G.Y. Deniskina // Certificate No. 2022682106 on State Registration of the Computer Program. – 2022.
7. Zorich, V.A. *Mathematical analysis: in 2 parts* / V.A. Zorich. – 3rd ed.– Moscow: MCMNMO, 2001. – 794 p.
8. Lavrentjev, M.A., Shabat, B.V. *Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable* / M.A. Lavrentjev, B.V. Shabat. – Moscow: Nauka, 1973. – 736 p.
9. Amati, G. The Reuse of Free-Form Surface Features: A Wavelet Approach / G. Amati, A. Liverani, G. Caligiana // *Proceedings of the IASTED International Conference APPLIED SIMULATION AND MODELLING*, June 28–30, 2004, Rhodes, Greece. – P. 247–252.
10. Bityukov, Y.I. Spline Wavelets Use for Output Processes Analysis of Multi-Dimensional Non-Stationary Linear Control Systems / Y.I. Bityukov, Y.I. Deniskin, G.Y. Deniskina // *Journal of Physics: Conference Series*. – Omsk: Institute of Physics Publishing, 2018. – P. 012018. – DOI 10.1088/1742-6596/944/1/012018.
11. Deniskina, G.Y. About Biortogonal Wavelets, Created on the Basis of Scheme of Increasing of Lazy Wavelets / G.Y. Deniskina, Y.I. Deniskin, Y.I. Bityukov // *Lecture Notes in Electrical Engineering*. – 2021. – Vol. 729 LNEE. – P. 173–181. – DOI 10.1007/978-3-030-71119-1\_18.
12. Application of Wavelets and Conformal Reflections to Finding Optimal Scheme of Fiber Placement at 3D-Printing Constructions from Composition Materials / Yu. Bityukov, Yu. Deniskin, G. Deniskina, I.V. Potsebnava // *E3S Web of Conferences*: 2021. – P. 05004. – DOI 10.1051/e3sconf/202124405004.
13. Deniskina, G.Y. About Some Computational Algorithms for Locally Approximation Splines, Based on the Wavelet Transformation and Convolution / G.Y. Deniskina, Y.I. Deniskin, Y.I. Bityukov // *Lecture Notes in Electrical Engineering*. – 2021. – Vol. 729 LNEE. – P. 182–191. – DOI 10.1007/978-3-030-71119-1\_19.
14. Bujurke, N., Shiralashetti, S., Salimath, C. An Application of Single-term Haar Wavelet Series in the Solution of Non-linear Oscillator Equations / N. Bujurke, S. Shiralashetti, C.J. Salimath // *Comput. Appl. Math*. – 2009. – 227. – P. 234–244.
15. Daubechies, I. A Simple Wilson Orthonormal Basis with Exponential Decay / I. Daubechies, S. Jaffard, J.L. Journe // *SIAM J. Math. Anal.* – 1991. – 22. – P. 554–572.
16. Daubechies, I. Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets / I. Daubechies // *Comm. Pure Appl. Math.* – 1988. – 41. – P. 909–996.



17. Daubechies, I. Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets II. Variations on a Theme / I. Daubechies // *SIAM J.Math.Anal.* – 1993. – 21. – P. 499–519.
18. Fiber Line Optimization in Single Ply for 3D Printed Composites / Yusuke Yamanaka, Akira Todoroki, Masahito Ueda, Yoshiyasu Hirano and Ryosuke Matsuzaki // *Open Journal of Composite Materials, SCIRP.* – 2016, Vol. 6, No 4. – P. 121–131.
19. Lepik, U. Application of the Haar Wavelet Transform to Solving Integral and Differential Equations / U. Lepik // *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.* – 2007. – 56. – P. 28–46.
20. Lepik, U., Hein, H. Haar Wavelets with Applications / U. Lepik, H. Hein. – Springer, 2014. – 207 p.
21. Mallat, S. Multiresolution Approximation and Wavelets / S. Mallat // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 1989. – 315. – P. 69–88.
22. Mallat, S. Zero-crossings of a Wavelet Transform / S. Mallat // *IEEE Trans. Inform. Theory.* – 1991. – 37. – P. 1019–1033.
23. Micchelli, C.A. Interpolatory Subdivision Schemes and Wavelets / C.A. Micchelli // *Journal of Approximation Theory.* – 1996. – Vol. 86, Issue 1. – P. 41–71.
24. Stollnitz, E.J. Wavelets for Computer Graphics: A Primer / Eric J. Stollnitz, T.D. DeRose, David H. Salesin // *IEEE Computer Graphics and Applications.* – 1995. – May. – 15(3). – P. 76–84 (part 1); July. – 15(4). – P. 75–85 (part 2).
25. Storn, R., Price, K. Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization Over Continuous Spaces / R. Storn, K. Price // *Journal of Global Optimization.* – 1997, No. 11. – P. 341–359.
26. Sweldens, W. The Lifting Scheme: A Custom-Design Construction of Biorthogonal Wavelets / W. Sweldens // *Applied and Computational Harmonic Analysis.* – 1996. – Vol.3, Issue 2. – P. 186–200.
27. Torghabehi, O.O. Developing a Computational Approach Towards a Performance Based Design and Robotic Fabrication of Fibrous Skin Structures / Omid Oliyan Torghabehi, Alireza Seyedahmadian and Wes McGee // *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2015, Amsterdam Future Visions, 17–20 August 2015, Amsterdam, The Netherlands.* – DOI: 10.13140/RG.2.1.2324.6569.

Получена 21.04.2023

Принята в печать 19.05.2023

Received 21.04.2023

Accepted 19.05.2023