Моделирование и анализ данных
2021. Том 11. № 4. С. 21–32
DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2021110402
ISSN: 2219-3758 (печатный)
ISSN: 2311-9454 (online)

Modelling and Data Analysis
2021. Vol. 11, no. 4, pp. 21–32
DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2021110402
ISSN: 2219-3758 (print)
ISSN: 2311-9454 (online)

◇◇◇◇◇◇◇◇◇ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ◇◇◇◇◇◇◇◇◇

УДК 517.977

Синтез оптимального управления группой объектов переменного состава

Бортаковский А.С.*
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8233-4535
e-mail: asbortakov@mail.ru

Евдокимова Е.А.**
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4719-2786
e-mail: evdokimovaekan@mail.ru

В статье рассматривается задача оптимального по быстродействию управления гибридной системой переменной размерности. Проблема синтеза оптимальных гибридных систем переменной размерности представляет теоретический интерес, поскольку рассматриваемые задачи отличаются от классических задач оптимального управления детерминированными системами, а методы их решения недостаточно разработаны. Необходимость исследований определяется современными задачами проектирования сложных систем, а полученные результаты имеют практическую направленность и могут использоваться при создании систем автоматического управления.

Ключевые слова: гибридные системы переменной размерности, оптимальное управление, переключаемые системы, быстродействие.

Бортаковский Александр Сергеевич, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математической кибернетики института «Информационные технологии и прикладная математика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8233-4535, e-mail: asbortakov@mail.ru

****Евдокимова Екатерина Андреевна,*** студент магистратуры института «Информационные технологии и прикладная математика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4719-2786 , e-mail: evdokimovaekan@mail.ru

Для цитаты:
Бортаковский А.С., Евдокимова Е.А. Синтез оптимального управления группой объектов переменного состава // Моделирование и анализ данных. 2021. Том 11. № 4. С. 21–32. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2021110402

1. ВВЕДЕНИЕ

Современные задачи управления иерархическими и многофункциональными системами актуальны в различных областях науки и техники. Цель управления, как правило, достигается в результате многоэтапного процесса при использовании разных режимов функционирования. Переключение режима работы происходит в зависимости от сложившейся операционной ситуации и состояния системы. Такая организация процесса управления характерна для гибридных систем (ГС), исследование которых идет с нарастающей интенсивностью [6;7].

В статье рассматривается задача быстродействия группы объектов переменного состава. В процессе управления количество управляемых объектов меняется, при этом, разумеется, изменяется размерность всей системы. Такие изменения считаются переключениями гибридной системы переменной размерности (ГСПР). Процесс управления заканчивается при достижении группой управляемых объектов заданных терминальных положений (целей). Задача быстродействия состоит в нахождении управления, обеспечивающего минимальное время достижения всех терминальных состояний. Число переключений определяется количеством терминальных положений, моменты переключений не заданы, а сами переключения управляемы. При этом не исключаются процессы с мгновенными многократными переключениями [3].

На основе достаточных условий разработан алгоритм синтеза оптимального управления группой подвижных объектов переменного состава. Согласно алгоритму, в результате рекуррентной минимизации вспомогательных функций находится оптимальное управление. Вспомогательными функциями являются, так называемые, образующие функции, по которым впоследствии строится «настоящая» функция цены. Эта процедура опирается на использование решений вспомогательных задач быстродействия.

Эффективность работы алгоритма демонстрируется на академическом примере. Для получения численного решения задачи была написана программа, реализующая работу алгоритма. Программа написана лишь для частного случая, описанного в статье.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На промежутке времени $[0,T]$ динамическая система совершает переключения в моменты времени t_i, $i=1,...,N$; они образуют неубывающую последовательность $\mathcal{T}=\{t_1,...,t_N\}$:

$$0 \le t_1 \le ... \le t_N \le T. \qquad (1)$$

Между неравными последовательными моментами переключений состояние системы изменяется непрерывно, согласно дифференциальному уравнению:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t), u_i(t)), \quad t \in T_i,\ i \in \mathcal{N}, \tag{2}$$

а в моменты переключений – дискретно, согласно рекуррентному уравнению

$$x_i(t_i) = g_i(x_{i-1}(t_i), v_i), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{3}$$

В соотношениях (2) $\mathcal{N} \triangleq \{i = 0, 1, \ldots, N \mid t_i < t_{i+1}\}$ – множество номеров ненулевых частичных промежутков $T_i = [t_i, t_{i+1}]$ непрерывного движения системы, $t_0 \triangleq 0$, $t_{N+1} \triangleq T$; $x_i(t)$ – состояние системы в момент времени $t \in T_i$, $x_i(t) \in X_i = \mathbb{R}^{n_i}$; $u_i(t)$ – управление непрерывным движением, $t \in T_i$, $u_i(t) \in U_i \subset \mathbb{R}^{p_i}$; U_i – заданное множество допустимых значений управления, $i \in \mathcal{N}$. В уравнении (3) v_i – управление переключением системы в момент $t_i \in \mathcal{T}$, $v_i \in V_i \subset \mathbb{R}^{q_i}$, V_i – заданное множество допустимых управлений переключениями, $i = 1, \ldots, N$. Функция $f_i : X_i \times U_i \to \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 0, 1, \ldots, N$, непрерывна на всей области определения вместе с производной $\partial f_i / \partial x_i$; функция $g_i : X_{i-1} \times V_i \to \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, \ldots, N$, ограничена. Возможное равенство последовательных моментов в (1) означает, что система совершает мгновенные многократные переключения [3].

Начальное и конечное состояния системы заданы

$$x_0(0) = x_{00},\ x_N(T) = x_{NT}. \tag{4}$$

Множество допустимых управлений $W_0(x_{00})$ образовано упорядоченными парами $w = (u(\cdot), v(\cdot))$, $u(\cdot) = \{u_i(\cdot)\}_{i=1}^{N}$ – управление непрерывным движением, $u_i : T_i \to U_i$ – ограниченная измеримая функция, $v(\cdot) \triangleq \{(t_i, v_i) \mid t_i \in \mathcal{T}, v_i \in V_i, i = 1, \ldots, N\}$ – управление переключениями, $v(\cdot)$ и $u(\cdot)$ для краевых условий (4) порождают траекторию движения системы (2), (3). Множество моментов переключений $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots, t_N\}$ – область определения управления $v(\cdot)$. Не исключается случай отсутствия переключений, когда $N = 0$ и $\mathcal{T} = \varnothing$ – пустое множество по определению.

Управление ГСПР осуществляется выбором моментов переключений $\mathcal{T}$, заданием управления непрерывным движением $u(\cdot)$ и управления переключениями $v(\cdot)$. Эти функции и множество образуют «управляющий комплекс».

Качество допустимого управления оценивается временем непрерывного движения системы и затратами на переключения

$$T_0(x_{00}, w) = T + \sum_{i=1}^{N} g_i^+(x_{i-1}(t_i), v_i). \tag{5}$$

Здесь $g_i^+ : X_{i-1} \times V_i \to \mathbb{R}_+$, $i = 1, \ldots, N$, – неотрицательные функции, каждое слагаемое $g_i^+(x_{i-1}(t_i), v_i)$ в (5) можно рассматривать как время, затраченное на переключение $x_{i-1}(t_i) \to x_i(t_i)$ под действием управления v_i, T – время непрерывного движения системы.

Требуется найти минимальное значение функционала (5) и оптимальное по быстродействию управление $w^* = (u^*(\cdot), v^*(\cdot)) \in W_0(x_0)$, на котором это значение достигается:

$$T_0(x_{00}, w^*) = \min_{w \in W_0(x_{00})} T_0(x_0, w). \tag{6}$$

3. ФУНКЦИЯ ЦЕНЫ И ЕЕ ОБРАЗУЮЩИЕ

В [4] предложен метод синтеза оптимального управления, в котором функция цены (функция Гамильтона – Якоби – Беллмана (ГЯБ)) [2] строится при помощи вспомогательных функций – образующих функции цены. Напомним, что функция цены определяется минимальным значением функционала оставшихся потерь.

Пусть $W_i\left(x_{i0}\right)$ множество допустимых управлений после i-го переключения, удовлетворяющих условию $x_i\left(0\right)=x_{i0}$. Оставшиеся переключения происходят в моменты $t_{i+1},\ldots,t_{i+k}$, образующие неубывающую последовательность:

$$0\le t_i\le t_{i+1}\le\ldots\le t_{i+k}\le T. \tag{7}$$

Количество k оставшихся переключений и сами моменты $t_{i+1},\ldots,t_{i+k}$ переключений не фиксированы, у разных допустимых управлений из $W_i\left(x_{i0}\right)$ они могут не совпадать.

На множестве $W_i\left(x_{i0}\right)$ допустимых управлений после i-го переключения определим функционал оставшихся потерь:

$$T_i\left(x_i,w\right)=T+\sum_{j=i+1}^{i+k}g_j^+\left(x_{j-1}\left(t_j\right),v_j\right). \tag{8}$$

Функция цены $\theta_i\left(x_i\right)$ после i-го переключения, по определению, равна значению функционала оставшихся потерь (8), вычисленному на оптимальном процессе, удовлетворяющем начальному условию $x_i\left(0\right)=x_{i0}$, т.е. вычисленному на множестве допустимых управлений $W_i\left(x_i\right)$:

$$\theta_i\left(x_i\right)=\min_{w\in W_i\left(x_i\right)}T_i\left(x_i,w\right). \tag{9}$$

Для задачи (6) определим образующую функции цены с k переключениями после i-го переключения, значение $\theta_i^k\left(x_i\right)$ которой равно значению функционала оставшихся потерь (8), вычисленному на процессе, который оптимален среди всех допустимых процессов, исходящих из начальной позиции $\left(0,x_i\right)$ после i-го переключения и имеющих k переключений после i-го. Если обозначить через $W_i^k\left(x_i\right)$ множество допустимых управлений из $W_i(x_i)$, имеющих k переключений, а через $T_i^k\left(x_i,w\right)$ – функционал (8) при фиксированном количестве k оставшихся переключений, то

$$\theta_i^k\left(x_i\right)=\min_{w\in W_i^k\left(x_i\right)}T_i^k\left(x_i,w\right). \tag{10}$$

Функция цены находится по своим образующим

$$\theta_i\left(x_i\right)=\min_{k\in\mathbb{Z}_+}\theta_i^k\left(x_i\right), \tag{11}$$

где $\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел.

Важную роль для нахождения образующих играет так называемая двухпозиционная функция цены $\theta_i(x_{i0}\mid x_{iT})$, $i=0,1,\ldots N$. Она определяется как решение задачи быстродействия для системы (2) с фиксированными концами траектории:

$$\dot{x}_i\left(t\right)=f_i\left(x_i\left(t\right),u_i\left(t\right)\right),\quad x_i\left(0\right)=x_{i0},\quad x_i\left(T\right)=x_{iT},\quad T\to\min. \tag{12}$$

При фиксированной конечной позиции функция $x_i\to\Theta_i(x_i|x_{iT})$ является функцией цены для задачи (12) и удовлетворяет уравнению ГЯБ с нулевым конечным условием

$$\min_{u\in U_i}\left[\frac{\partial\Theta_i(x_i\mid x_{iT})}{\partial x_i}f_i\left(x_i,u\right)+1\right]=0\,,\quad \Theta_i(x_{iT}\mid x_{iT})=0\,. \tag{13}$$

При минимизации левой части уравнения ГЯБ (13) получаем оптимальное двухпозиционное управление

$$u_i(x_i\mid x_{iT})=\arg\min_{u\in U_i}\frac{\partial\Theta_i(x_i\mid x_{iT})}{\partial x_i}f_i\left(x_i,u\right). \tag{14}$$

Считаем, что функция $\Theta_i(x_{i0}\mid x_{iT})$ определена для всех пар позиций x_{i0}, x_{iT} из X_i, тогда нахождение значения двухпозиционной функции цены при фиксированных начальной и конечной позициях сводится к решению двухточечной краевой задачи принципа максимума [5].

Нулевые образующие совпадают с двухпозиционной функцией цены

$$\theta_i^0\left(x_i\right)=\Theta_i(x_i\mid x_{iT}) \tag{15}$$

при заданном конечном состоянии x_{iT}.

Остальные образующие находятся в результате рекуррентной процедуры, для которой нулевые образующие (15) служат начальными условиями.

Пусть для некоторого номера $k\in\mathbb{N}$ известны образующие θ_i^{k-1}, $i\in\mathbb{Z}_+$. Тогда, согласно принципу оптимальности, следующие образующие θ_i^k, $i\in\mathbb{Z}_+$, удовлетворяют уравнению

$$\theta_i^k\left(x_i\right)=\min_{\hat{x}_i\in X_i}\{\,\Theta_i(x_i\mid\hat{x}_i)+\min_{v\in V_{i+1}}\left[\theta_{i+1}^{k-1}\left(g_{i+1}\left(\hat{x}_i,v\right)\right)+g_{i+1}^{+}\left(\hat{x}_i,v\right)\right]\}. \tag{16}$$

Непрерывное движение после i-го переключения до первого из оставшихся k переключений происходит, учитывая (12), при оптимальном управлении (14), переводящим систему из позиции x_i в позицию $\hat{x}_i$, в которой совершается скачок. Оптимальность ($i+1$)-го переключения обеспечивает операция минимизации по управлению v. Поэтому выражение в фигурных скобках равно минимальному значению функционала оставшихся потерь при заданной позиции $\hat{x}_i$ переключения. Таким образом, правая часть (16) дает минимальное значение функционала (8) с k переключениями, оставшимися после i-го переключения, которое определяет образующую (10). Наименьшее значение функционала (8) вычисляется, согласно (9), (11), по образующим функции цены:

$$\min_{w\in W_i(x_i)}T_i(x_i,w)=\theta_i(x_i)=\min_{k\in\mathbb{Z}_+}\theta_i^k(x_i). \tag{17}$$

Оптимальные моменты переключений, управления непрерывным движением и переключениями составляют оптимальный «управляющий комплекс», который находится при решении уравнений (13), (16), (17). В этих уравнениях имеется четыре операции минимизации. При минимизации левой части (13) получаем оптимальное двухпозиционное управление (14). Для позиции переключения $x_{iT}=\hat{x}_i$ оно имеет вид

$$u_i(x_i\mid\hat{x}_i)=\arg\min_{u\in U_i}\frac{\partial\Theta_i(x_i\mid\hat{x}_i)}{\partial x_i}f_i\left(x_i,u\right). \tag{18}$$

При минимизации правой части (16) определяется оптимальное позиционное управление переключениями системы

$$v_{i+1}^{k}(\hat{x}_i) = \arg\min_{v\in V_{i+1}} \left[\theta_{i+1}^{k-1}\left(g_{i+1}(\hat{x}_i, v)\right) + g_{j+1}^{+}(\hat{x}_i, v)\right] \tag{19}$$

и оптимальное состояние x_i^k перед первым из оставшихся k переключений

$$x_i^k(x_i) = \arg\min_{\hat{x}_i\in X_i} \{\ \Theta_i(x_i|\hat{x}_i) + \min_{v\in V_{i+1}} [\ \theta_{i+1}^{k-1}(g_{i+1}(\hat{x}_i, v)) + g_{i+1}^{+}(\hat{x}_i, v)\ ]\ \}. \tag{20}$$

Заметим, что позиционные конструкции (19), (20) зависят не только от позиции $x_i \in X_i$ системы после i-го переключения, но и количества k оставшихся переключений. Напротив, двухпозиционное управление (18) не зависит от количества оставшихся переключений. При минимизации правой части (17) находим оптимальное количество переключений, оставшихся после i-го переключения

$$k_i(x_i) = \operatorname*{argmin}_{k\in\mathbb{Z}_+} \theta_i^k(x_i). \tag{21}$$

Таким образом, оптимальное позиционное управление представляет собой «управляющий комплекс» позиционных конструкций, состоящий из функций: $u_i(x_i \mid \hat{x}_i)$ – оптимальное двухпозиционное управление (18) непрерывным движением системы, $x_i^k\left(x_i\right)$ – оптимальное управление (19) первым из k оставшихся переключений после i-го переключения.

4. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Предполагается, что количество N целей и их положения $z_1, z_2, \ldots, z_N$ заданы, а также известны двухпозиционная функция цены $\Theta_i(x_{i0} \mid x_{iT})$ и оптимальное двухпозиционное управление $u_i(x_i \mid \hat{x}_i)$.

Шаг 1. Найти нулевые образующие θ_i^0, $i = 1, \ldots, N$, используя равенство $\theta_i^0\left(x_i\right) = \Theta_i(x_i \mid x_{iT})$.

Шаг 2. Найти первые образующие θ_i^1, $i = 1, \ldots, N-1$, решая рекуррентное уравнение

$$\theta_i^1(x_i) = \min_{\hat{x}_i\in X_i}\{\ \Theta_i(x_i|\hat{x}_i) + \min_{v\in V_{i+1}} [\ \theta_{i+1}^{0}(g_{i+1}(\hat{x}_i, v)) + g_{i+1}^{+}(\hat{x}_i, v)]\},$$

и позиционные конструкции $v_i^1\left(x_{i-1}\right)$, $x_i^1\left(x_i\right)$, по формулам (19), (20) соответственно.

. . .

Шаг N. Найти последнюю образующую θ_0^N решая уравнение

$$\theta_0^N(x_0) = \min_{\hat{x}_0\in X_0}\{\ \Theta_0(x_0|\hat{x}_0) + \min_{v\in V_1}[\ \theta_1^{N-1}(g_1(\hat{x}_0, v)) + g_1^{+}(\hat{x}_0, v)]\},$$

и конструкцию $x_0^N\left(x_0\right)$ по формуле (20).

Вычислить минимальное значение функционала

$$\min_{w\in W_i(x_i)} T_i(x_i, w) = \theta_i(x_i) = \min_{k\in\mathbb{Z}_+}\theta_i^k(x_i).$$

В результате работы алгоритма находятся оптимальные позиционные конструкции x_i^k – позиции, в которых нужно сделать переключение, и условные оптимальные управления v_i^k. Используя эти конструкции, для любых начальных позиций можно получить оптимальные траектории системы.

5. ПРИМЕР

Рассмотрим задачу быстродействия группой управляемых объектов. Движение начинает составной объект – носитель, в процессе управления от него отделяются простые объекты. При каждом переключении от носителя отделяется один простой объект и затрачивается время на разгрузку. После отделения каждый из простых объектов движется самостоятельно в направлении к соответствующей ему цели. Качество управления группой оценивается максимальным временем достижения объектами всех целей.

На промежутке времени $\left[t_0, t_F\right]$ система совершает N переключений в моменты времени $t_1, \ldots, t_N$: $t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_N \le t_F$. При каждом переключении от носителя отделяется один простой объект, размерность системы управления увеличивается.

Непрерывное движение носителя описывается дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x}(t) = V(t)\cos\gamma(t), \dot{y}(t) = V(t)\sin\gamma(t), \dot{\gamma}(t) = 0, \dot{M}(t) = 0, \dot{V}(t) = U(t),$$

где x, y – плоские координаты, угол γ определяет направление движения (это угол наклона вектора скорости к оси абсцисс); V – величина скорости движения, M – масса нагруженного носителя, U – ускорение. Скорость носителя ограничена: $0 \le V(t) \le V_{max}(M)$. Ускорение носителя также ограничено: $|U(t)| \le U_{max.}$

В момент переключения t_i положение носителя сохраняется, а направление его движения меняется:

$$x(t_i) = x(t_i - 0), \quad y(t_i) = y(t_i - 0), \quad \gamma(t_i) = \gamma(t_{i-1}) + \Delta\gamma(t_i)$$
$$M(t_i) = M(t_i - 0) - m, \qquad V(t_i) = 0. \tag{27}$$

В этот момент от носителя отделяется простой объект, согласно уравнениям:

$$x_i(t_i) = x(t_i), \quad y_i(t_i) = y(t_i), \quad \gamma_i(t_i) = \gamma(t_i) + \Delta\gamma_i, \tag{28}$$

состояние ранее отделившихся объектов сохраняется:

$$x_j(t_i) = x_j(t_i - 0), \ y_j(t_i) = y_j(t_i - 0), \ \gamma_j(t_i) = \gamma_j(t_i - 0), \ j = 1, \ldots, i. \tag{29}$$

В уравнениях (27) – (29): (x_j, y_j, γ_j)– состояние j-го простого объекта. Изменение направления движения носителя и j-го простого объекта определяется приращениями углов $\Delta\gamma(t_i)$ и $\Delta\gamma_j$ соответственно, m – масса простого объекта. Отделившиеся от носителя простые объекты движутся прямолинейно с постоянной скоростью v.

На рис. 1 представлено оптимальное по быстродействию управление непрерывным движением носителя между двумя последовательными моментами переключения.

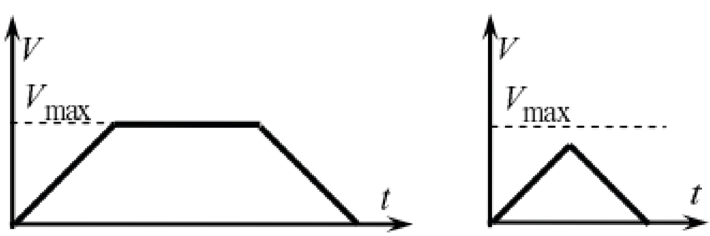

Рис.1. График изменения скорости носителя при непрерывном движении

Минимальное время непрерывного движения носителя между двумя последовательными моментами переключения определяется двухпозиционной функцией цены:

$$\Theta\left(x\left(t_i\right), y\left(t_i\right) | x\left(t_{i+1}\right), y\left(t_{i+1}\right)\right)=\begin{cases} 2\sqrt{\dfrac{2s}{U_{max}}}+\dfrac{d-2s}{V_{max}}, s \geq d, \\ 2\sqrt{\dfrac{d}{2}}, s<d, \end{cases}$$

где $s=U_{max} t_c^2$, $t_c=\dfrac{V_{max}}{U_{max}}$, $d=\left|\left(x\left(t_i\right), y\left(t_i\right)\right)-\left(x\left(t_{i+1}\right), y\left(t_{i+1}\right)\right)\right|$. Текущая максимальная скорость V_{max} определяется следующим образом: $V_{max}=\dfrac{m \cdot V_{MAX}}{M}$, где V_{MAX} – заданная максимальная скорость, M – общая масса носителя и простых объектов, m – масса простого объекта.

На отделение каждого из простых объектов затрачивается время ΔT, t_F^j – время достижения j-й цели. Качество управления группой оценивается максимальным временем достижения объектами всех целей:

$$T=\max_{j=1, \ldots, M}\{t_F^j\}. \tag{30}$$

Требуется найти наименьшее значение функционала (30) и управление, на котором это значение достигается.

«Управляющий комплекс» – количество переключений N, моменты переключений $t_1, \ldots, t_N$, управление непрерывным движением носителя $U(\cdot)$, управление переключением носителя $\left\{\Delta\gamma\left(t_i\right)\right\}_{i=1}^N$.

Образующая θ_i^k определяется максимальным временем достижения простыми объектами их терминальных положений, если i переключений уже сделано, а k осталось сделать.

Для задачи с пятью терминальными положениями образующие выглядят следующим образом:

$$\theta_5^0\left(x, y, x^1, y^1, x^2, y^2, x^3, y^3, x^4, y^4, x^5, y^5\right)=\frac{1}{v} \max\left\{\left|\left(x^1, y^1\right)-z^1\right|, \left|\left(x^2, y^2\right)-z^2\right|, \ldots, \left|\left(x^5, y^5\right)-z^5\right|\right\},$$

$$\theta_4^1\left(x, y, x^1, y^1, x^2, y^2, x^3, y^3, x^4, y^4\right)=\min_{(\hat{x}, \hat{y})}\left\{\Theta(x, y | \hat{x}, \hat{y})+\Delta T+\theta_5^0\left(\hat{x}, \hat{y}, x^1, y^1, x^2, y^2, x^3, y^3, x^4, y^4, \hat{x}, \hat{y}\right)\right\},$$

$$\theta_3^2\left(x, y, x^1, y^1, x^2, y^2, x^3, y^3\right)=\min_{(\hat{x}, \hat{y})}\left\{\Theta(x, y | \hat{x}, \hat{y})+\Delta T+\theta_4^1\left(\hat{x}, \hat{y}, x^1, y^1, x^2, y^2, x^3, y^3, \hat{x}, \hat{y}\right)\right\},$$

$$\theta_2^3\left(x, y, x^1, y^1, x^2, y^2\right)=\min_{(\hat{x}, \hat{y})}\left\{\Theta(x, y | \hat{x}, \hat{y})+\Delta T+\theta_3^2\left(\hat{x}, \hat{y}, x^1, y^1, x^2, y^2, \hat{x}, \hat{y}\right)\right\},$$

$$\theta_1^4\left(x, y, x^1, y^1\right)=\min_{(\hat{x}, \hat{y})}\left\{\Theta(x, y | \hat{x}, \hat{y})+\Delta T+\theta_2^3\left(\hat{x}, \hat{y}, x^1, y^1, \hat{x}, \hat{y}\right)\right\},$$

$$\theta_0^5(x, y)=\min_{(\hat{x}, \hat{y})}\left\{\Theta(x, y | \hat{x}, \hat{y})+\Delta T+\theta_1^4\left(\hat{x}, \hat{y}, \hat{x}, \hat{y}\right)\right\},$$

где (x, y) – положение носителя, $\left(x^i, y^i\right)$ – положение i-го простого объекта.

Функция θ_0^5 – минимум из образующих, она является функцией цены.

Для нахождения численного решения плоской задачи с пятью терминальными положениями была разработана программа, реализующая вышеописанный алгоритм. Программа представляет собой комплекс подпрограмм, обеспечивающих рекуррентную процедуру вычисления образующих. Рекуррентная процедура представляет собой каскадную минимизацию. Минимизация проводится перебором по узлам сетки в пространстве позиций носителя. Шаг задан $\varepsilon = 0.1$. Искомые функции (двухпозиционная функция цены и образующие функции цены) представляются в виде сеточных функций.

Расчёты проводились для начального состояния $(x(t_0), y(t_0)) = (0,3)$ и положения целей $z^1 = (2,0)$, $z^2 = (3,0)$, $z^3 = (5,0)$, $z^4 = (7,0)$, $z^5 = (9,0)$ при параметрах: $U_{max} = 10$, $V_{MAX} = 15000$, $M = 150$, $m = 10$, $v = 1$, $\ddot{A}T = 0.1$.

Получены следующие результаты: $(x(t_1), y(t_1)) = (3.6, 0.3)$, $t_1 = t_2 = t_3$, $(x(t_4), y(t_4)) = (7.6, 0.2)$, $(x(t_5), y(t_5)) = (9, 0)$, $T = 2.6766$

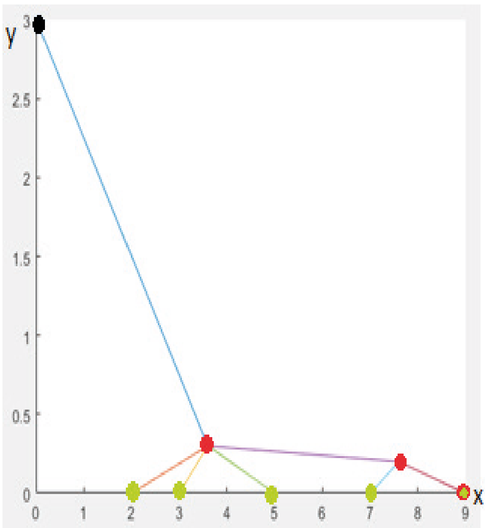

Рис. 2. Оптимальная траектория для задачи с учётом изменения массы

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан алгоритм решения задачи быстродействия гибридной системы переменной размерности, основанный на достаточных условиях оптимальности. Его программная реализация предназначена для решения задачи управления плоским движением группы объектов переменного состава. Модели непрерывного движения объектов управления простые. В моменты переключений учитывается изменение массы и время разгрузки. Дальнейшие исследования связаны с усложнением уравнений движения, например, с использованием модели Маркова-Дубинса [1].

Литература

1. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005. 392 с.
2. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 400 с.
3. *Бортаковский А.С.* Достаточные условия оптимальности гибридных систем переменной размерности // Тр. МИАН 308, 2020, С. 88–100.
4. *Бортакоаский А.С., Евдокимова Е.А.* Синтез оптимальных гибридных систем многоцелевого быстродействия // Проблемы математического анализа, вып.109, 2021. С. 39–50.
5. Математическая теория оптимальных процессов/ Л.С. Понтрягин [и д.р.] М.: Физматгиз, 1961. – 393 с.
6. *Dmitruk A.V., Kaganovich A.M.* The hybrid maximum principle is a consequence of Pontryagin maximum principle , Syst. Control Lett. 57, No. 11.P 964–970 (2008).
7. *Sussmann H.J.* A maximum principle for hybrid optimal control problems // Proc. of 38th IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, 1999.

Synthesis of Optimal Control of a Group of Objects of Variable Dimension

Alexandr S. Bortakovskii*
MAI (National Research University), Moscow, Russia
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8233-4535
e-mail: asbortakov@mail.ru

Ekaterina A. Evdokimova**
MAI (National Research University), Moscow, Russia
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4719-2786
e-mail: evdokimovaekan@mail.ru

The article deals with the problem of time-optimal control of a hybrid system of variable dimension. The problem of synthesis of optimal hybrid systems of variable dimension is of theoretical interest, since the problems under consideration differ from the classical problems of optimal control of deterministic systems, and methods for their solution have not been developed. The need for research is determined by modern problems of designing complex aviation and rocket and space systems, and the results obtained have a practical orientation and can be used in the creation of automatic control systems.

Keywords: hybrid systems of variable dimension, optimal control, switch systems, time-optimal operation.

For citation:
Bortakovskii A.S., Evdokimova E.A. Synthesis of Optimal Control of a Group of Objects of Variable Dimension. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis,* 2021. Vol. 11, no. 4, pp. 21–32. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2021110402 (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Agrachev A.A., Sachkov U.L. Geometric control theory. Moscow: Physmathlit, 2005. 392 p.
2. Bellman R. Dynamic programmimg. Moscow: Foreign literature, 1960. 400 p.
3. Bortakovskii A.S. Sufficient optimality conditions for hybrid systems of variable dimension // Works of MIAN 308, 2020, P.88–100.
4. Bortakovskii A.S., Evdokimova E.A. Synthesis of optimal hybrid systems for multipurpose time-optimal operation // Problems of mathematical analysis, ed. 109, 2021. P. 39–50.

Alexandr S. Bortakovskii, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics and Cybernetics, Institute of Information Technologies and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8233-4535, e-mail: asbortakov@mail.ru

****Ekaterina A. Evdokimova,*** Student of the Institute of Information Technologies and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4719-2786, e-mail: evdokimovaekan@mail.ru

5. Mathematical theory of optimal processes / L.S. Pontryagin [and others] Moscow: Fizmatgiz, 1961. 393 p.
6. Dmitruk A.V., Kaganovich A.M. The hybrid maximum principle is a consequence of Pontryagin maximum principle , Syst. Control Lett. 57, No. 11. P. 964–970 (2008).
7. Sussmann H.J. A maximum principle for hybrid optimal control problems // Proc. of 38th IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, 1999.