Моделирование и анализ данных
2021. Том 11. № 2. С. 89–123
DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2021110206
ISSN: 2219-3758 (печатный)
ISSN: 2311-9454 (online)

Modelling and Data Analysis
2021. Vol. 11, no. 2, pp. 89–123
DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2021110206
ISSN: 2219-3758 (print)
ISSN: 2311-9454 (online)

УДК 372.851

Межпредметные связи в общем курсе высшей математики

Степанов М.Е.*
Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4803-8211
e-mail: mestepanov@yandex.ru

В статье обсуждаются вопросы методики преподавания высшей математики, возникающие при современном уровне образования в нашей стране. Автор опирается на опыт работы на факультете информационных технологий МГППУ.

Ключевые слова: межпредметные связи, высшее образование, методика преподавания математики, элементарная математика, аналитическая геометрия, математический анализ, комплексный анализ, функциональный анализ, общая алгебра, линейная алгебра, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, комбинаторика, теория вероятностей, теория чисел, математическая теория принятия решений, теория групп, математическая логика, дискретная математика, вычислительная математика.

Для цитаты:
Степанов М.Е. Межпредметные связи в общем курсе высшей математики // Моделирование и анализ данных. 2021. Том 11. № 2. С. 89–123. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2021110206

1. ВВЕДЕНИЕ

Можно смело утверждать, что методика преподавания высшей математики по целому ряду причин не является достаточно развитым разделом педагогической науки. По общему мнению, этой темой должны заниматься крупные математики-творцы. Однако, они свои основные усилия направляют на чисто математическое творчество. В лучшем случае им удаётся написать несколько статей методического характера, которые содержат отдельные соображения по соответствующей тематике. Кроме того, данная тема слишком сложна и обширна. Здесь уместно вспомнить историю, связанную с трактатом Леонарда Эйлера «Теория музыки». Про эту книгу говорили, что

****Степанов Михаил Евграфович,*** кандидат педагогических наук, доцент, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4803-8211, e-mail: mestepanov@yandex.ru

в ней слишком много математики для музыкантов, и слишком много музыки для математиков. Точно также можно сказать, что в методике преподавания высшей математики слишком много педагогики для математиков, и слишком много математики для педагогов. Тем не менее, данным вопросом необходимо заниматься, в том числе, и рядовым преподавателям математики. В данной статье делается попытка дать обзор ряда вопросов, относящихся к межпредметным связям в общем курсе высшей математики.

Автор полагает, что эта тематика достаточно актуальна, хотя её разработка и требует значительных усилий. Автор не может претендовать на достаточно подробное обсуждение вопроса, но считает, что даже не слишком детальное его рассмотрение может оказать определённую помощь молодым преподавателям высшей математики. В значительной степени это связано с тем, что изучение данного вопроса позволяет воссоздать общую картину математического знания, изучаемого в вузах, а наличие общей картины всей совокупности математических предметов в их взаимосвязи позволяет лучше понять место и каждого отдельного предмета. Кроме того, это может помочь выделить наиболее важные темы каждого курса.

2. ОБЩИЙ КУРС МАТЕМАТИКИ КАК СОВОКУПНОСТЬ ОТДЕЛЬНЫХ ПРЕДМЕТОВ

Сложность проблем, связанных с межпредметными связями в общем курсе высшей математики, проявляется уже на самых первых стадиях рассмотрения соответствующих вопросов, в частности при перечислении предметов, составляющих корпус общего курса математики в вузах. Это, прежде всего, связано с тем обстоятельством, что в разных учебных заведениях ставятся различные образовательные цели, что приводит к различным совокупностям предметов математического цикла. По этой причине список предметов, которые будут рассматриваться в данной статье, никоим образом не может рассматриваться как универсальный. Однако он тесно связан с совокупностью предметов, составляющих корпус классической математики.

Начнём с перечисления предметов, составляющих ядро курса, и с их краткого (и выборочного) содержания, ориентируясь на приблизительный порядок их изучения.

Непосредственным продолжением курса математического анализа являются курсы теории функций комплексного переменного, теория обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнения математической физики и функциональный анализ. Сюда же можно отнести курсы, посвящённые изучению численных методов, за исключением вопросов относящихся к линейной алгебре.

Самостоятельными курсами являются курсы теории вероятностей и математической статистики. Особое место в современном математическом образовании играет комплекс дисциплин, получивших название «Дискретная математика». Сюда входят математическая логика, теория графов, теория алгоритмов и т.д. В рамки курса математической логики часто включают раздел, связанный с терминологией теории множеств. Конечно, в том случае, когда среди предметов отсутствуют специальные курсы теории множеств или общей топологии.

Элементарная математика,
как основа изучения курса высшей математики

- Арифметика. Умение работать с целыми и дробными числами; вычислительные алгоритмы.
- Алгебра. Работа с символикой; преобразование формул; уравнения и системы уравнений; арифметическая и геометрическая прогрессии.
- Геометрия. Основные геометрические фигуры и их свойства.
- Тригонометрия. Тригонометрические функции острого угла; основные формулы.
- Азы метода координат. Уравнения и графики прямых, окружностей; квадратный трёхчлен; обратная пропорциональность.

↓	↓	↓
Линейная и общая алгебра	**Аналитическая геометрия**	**Математический анализ функций действительного переменного**
Линейные пространства и вектора. Линейная зависимость. Базис. Подпространства. Важные примеры линейных пространств. Линейные преобразования и матрицы. Обратные преобразования. Собственные вектора. Теория систем линейных уравнений. Евклидовы пространства. Скалярное произведение. Длина вектора. Угол между векторами. Ортогональность. Алгебра многочленов. Поле комплексных чисел. Основная теорема алгебры многочленов. Теория делимости. Сравнение с теорией чисел. Кольца, поля, группы. Примеры колец, полей, групп, в том числе, связанных с геометрией.	Метод координат на плоскости. Алгебра векторов. Скалярное произведение. Прямые, окружности, канонические уравнения кривых второго порядка. Аффинные преобразования и общая теория кривых второго порядка. Метод координат в пространстве. Векторное и смешанное произведение. Плоскости, поверхности второго порядка. Методы изучения формы поверхностей второго порядка.	Множество действительных чисел. Элементарные функции. Пределы. Непрерывность. Производная и её смысл. Правила дифференцирования. Использование производной. Дифференциал. Первообразная и интеграл. Методы интегрирования. Формула Ньютона – Лейбница. Использование интеграла. Числовые ряды и ряды Тейлора. Функции двух и более переменных. Частные производные. Дифференциал. Неявные функции.

Относительно новые курсы связаны с кругом вопросов, который определяется называниями «Исследование операций» или «Математическая теория принятия решений».

Отметим несколько угнетённое состояние «царицы математики» – теории чисел, изучение которой часто совмещают с изучением общей алгебры. Что же касается дисциплин, связанных с идеями геометрии, то им могут быть посвящены курсы проективной геометрии, дифференциальной геометрии и топологии. Однако очень часто тематика этих курсов распределяется между другими предметами.

Следует отметить, что современное образование в значительной степени включено во всё более ускоряющиеся процессы преобразования общественных структур. В частности это отражается на оценке значения тех или иных предметов в рамках общего комплекса изучаемых вопросов. Так, в общем и целом, возрастает роль теории вероятностей, математической статистики, математической теории принятия решений и дискретной математики.

Естественно, что компетентное решение вопросов, связанных с усовершенствованием структуры комплекса преподаваемых предметов, является чрезвычайно сложной задачей. По этой причине мы будем исходить из соображений, высказанных автором в одной из его статей: «Выбор целей преподавания определяет содержание курсов и отбор материала, а также выбор уровня строгости и определение удельного веса образного и логического мышления. **В нашем конкретном случае целью является воспитание математика-прикладника или математика-инженера**, что в частности предполагает свободное владение понятиями и методами современной информатики. Ядро комплекса математических дисциплин имеет традиционный характер» [1].

Итак, речь идёт о курсах аналитической геометрия, математического анализа, комплексного анализа, функционального анализа, объединённого курса общей алгебры и теории чисел, курсах линейной алгебры, дифференциальных уравнений, уравнений математической физики, теории вероятностей и математической статистики, математической теории принятия решений, вычислительной математики и разделённых курсов математической логики и дискретной математики, Вопросы, относящиеся к теории множеств, топологии и дифференциальной геометрии, рассматриваются в рамках других предметов.

3. О ПОНЯТИЯХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА И ЧИСЛОВОЙ ПРЯМОЙ

На первом курсе практически одновременно начинается изучение аналитической геометрии, линейной алгебры, математического анализа и алгебры многочленов. Важнейшим понятием, на котором основываются эти предметы, является **понятие действительного числа**. Более точно, речь идёт об изучении структуры поля действительных чисел. Эта структура обладает алгебраическими, геометрическими и топологическими свойствами. Изучение этих свойств может проводиться различными способами, в частности, действительные числа можно определять как сечения на множестве рациональных чисел. Данный подход является логически безупречным, но при подготовке математика-прикладника следует избрать иной подход, при котором **действительное число определяют как десятичную дробь, конечную или бесконечную**.

Этот подход имеет ряд преимуществ. Прежде всего, на практике действительные числа предстают именно как десятичные дроби. Студенты младших курсов связывают с десятичными дробями соответствующие вычислительные алгоритмы. В то же время действительное число, определяемое через сечение, воспринимается как в высшей степени абстрактный объект. Соответствие между конечными и бесконечными периодическими десятичными дробями, с одной стороны, и с рациональными числами, с другой, осуществляется упомянутыми алгоритмами (деление целого числа на натуральное) и с помощью суммирования бесконечных геометрических прогрессий.

Установление взаимно однозначного соответствия между множеством десятичных дробей и точками евклидовой прямой осуществляется с помощью наглядной процедуры измерения отрезков. Именно так происходит формирование понятие числовой прямой, которая является геометрическим образом множества действительных чисел. Несомненным является тот факт, что соединение алгебраического лица действительных чисел как десятичных дробей с их совокупным геометрическим образом как точек евклидовой прямой является основой двойственного восприятия действительных чисел в аналитической геометрии и математическом анализе. Можно взять десятичное число и говорить о нём как о точке на числовой прямой, и можно выбрать точку на числовой прямой, и сказать, что рассматривается число.

Это важнейшее обстоятельство лежит в основе всей классической математики. По этой причине, памятуя о том, что повторение – мать учения, следует о понятии числовой прямой говорить в курсах аналитической геометрии, математического анализа и линейной алгебры. Естественно, в курсе аналитической геометрии требуется менее подробное рассмотрение свойств числовой прямой, чем в курсе математического анализа. В курсе геометрии, прежде всего, следует подчёркивать, что координата точки является расстоянием по горизонтали или вертикали до осей координат с учётом знака. Именно этот факт определяет способы вычисления расстояний в евклидовых пространствах.

В математическом анализе требуется несравненно более детальное изучение структуры числового континуума, которое, по сути, является топологическим исследованием. Это связано с тем обстоятельством, что в математическом анализе используется сложное понятие предела.

Тем не менее, и при рассмотрении этих вопросов важнейшим понятием является расстояние между точками числовой прямой. Именно с его помощью вводится топологическое понятие окрестности точки. На данном, фактически начальном, этапе изучения числового континуума желательно ввести понятие **метрического пространства**. Это понятие, несомненно, является сквозным для всего курса математики в целом. Особенно важным моментом является фиксация того факта, что если в рамках аналитической геометрии расстояние вводится на основе теоремы Пифагора, то в линейной алгебре исходным является понятие скалярного произведение. Это обстоятельство позволяет перенести идеи линейной алгебры на другие разделы математики, включая математический анализ, что приводит в итоге к возникновению функционального анализа.

Вернёмся, однако, к числовой прямой. Введение понятия предела связано с ещё одним вездесущим объектом математики, который является настолько естественным, что работа с ним считается само собой разумеющейся. Речь идёт о понятии **числовой последовательности**. Числовые последовательности изучались и в курсе элементарной математики, и проявляют себя во всех разделах математика, например, как коэффициенты в формулах кривых второго порядка, как коэффициенты многочленов, как коэффициенты рядов Тейлора и Фурье и т.д. Понятие предела вводится, прежде всего, для последовательностей. При этом в рамках математического анализа доказываются важные теоремы о пределе монотонных ограниченных последовательностей и о вложенных промежутках.

Важнейшим понятием общего курса математики является **понятие функции**. Формальное определение функции является весьма простым, но одним из проблемных мест преподавания математики как раз и является разрыв между простыми, но крайне абстрактными математическими определениями типа функции или алгебраической группы и образами этих объектов. А ведь именно образы являются истинным материалом любого мышления и в частности научного, поскольку понимание проблем достигается на уровне образного мышления. Таким образом, путь к пониманию такого важнейшего понятия как функция должен включать работу по формированию соответствующих образов. Одним из путей к этому является компьютерная визуализация математических объектов [3]. Другим способом формирования образа функций определённого вида является переход от более наглядного понятия числовой последовательности, или иными словами функции от натурального аргумента, к функциям действительного аргумента с помощью уплотнения множества аргументов [1].

На самом деле рассмотрение функций и графиков в школьном курсе математики фактически основано на таком же уплотнении. Речь идёт о построении графиков по точкам и проведении через полученные точки достаточно гладкой кривой. Именно на этом этапе и возникают исходные образы основных элементарных функций.

Отметим, что полезно использовать и пластические образы кривых, когда график функции трактуется как гибкая нить, первоначально расположенная на оси абсцисс. Далее координата y, возникающая при аналитическом описании функции $y = f(x)$, трактуется как вертикальное смещение каждой точки эластичной нити по декартовой плоскости.

Следует отметить ещё и тот факт, что аналитическая геометрия и математический анализ несколько по-разному рассматривают аналитическое описание кривых на координатной плоскости. Об этом следует говорить и на том, и на другом предмете. Это позволит подойти к понятию неявной функции.

Добавим, что сведения, которые студент должен получить по теории множеств достаточно успешно сочетаются с представлением о множестве действительных чисел как десятичных дробей. В частности эта точка зрения позволяет естественным образом доказать несчётность точек единичного отрезка. Кроме того, на той же основе можно доказать равномощность множества точек отрезка и квадрата.

Связь между теорией множеств и основами математического анализа, кроме всего прочего, определяется историческими обстоятельствами. Возникновение теории множеств Георга Кантора началось с выработки учёным особой точки зрения на важные понятия анализа. По этой причине на занятиях по математическому анализу, как и на более поздних занятиях связанных с изложением азов теории множеств должны рассматриваться как операции над множествами, так и многие другие вопросы теории множеств. Это обстоятельство нужно учитывать, что требует согласования содержания двух предметов.

Возвращаясь к понятию функции, следует отметить, что **важнейшим видом функций в высшей математике являются многочлены**. Они являются непременными действующими лицами во всех предметах математического цикла, включая, в том числе, и математическую логику (полиномы Жегалкина). Именно это обстоятельство делает соответствующую часть курса высшей алгебры исключительно важной. Этот факт необходимо особо отметить по следующей причине. Современная алгебра в отличие от алгебры классической, которая являлась теорией уравнений, превратилась в теорию алгебраических структур. Соответственно, изучение групп, колец и полей рассматривается как наиболее важная часть алгебры. Конечно, это так, но недостаточное внимание к алгебре многочленов может привести к пробелам в понимании многих других математических предметов.

Первой важной особенностью многочленов с действительными коэффициентами является то, что возможны задачи, связанные с конструированием многочленов, обладающих особыми свойствами. Примером является построение интерполяционного многочлена Лагранжа. Второй особенностью является повелительное поведение многочленов, определившее направление развитие математики даже вопреки желаниям самих математиков. Речь идёт о появлении **мнимых и комплексных чисел**. Итак, алгебра многочленов является стартовым пунктом для изучения комплексных чисел. Поле комплексных чисел рассматривается в рамках общей алгебры, в математическом анализе функций пока ещё действительного переменного, в курсе комплексного анализа, теории дифференциальных уравнений, в уравнениях математической физики, в линейной алгебре. Естественно, изучение комплексных чисел основано на хорошем знании действительных чисел. И, надо полагать, что даже при бурном развитии абстрактной алгебры всё же именно действительные и комплексные числа являются чувственными образами произвольных алгебраических полей.

4. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА КАК ТОЧКА СБОРКИ В ОБЩЕМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Линейная алгебра возникла в точке соприкосновения алгебры и геометрии. Видимо, именно по этой причине она стала языком, связывающим практически все остальные разделы математики. С одной стороны в них используется терминология линейной алгебры. Так, например, последовательности, функции, решения линейных дифференциальных уравнений и т.д. являются векторами и образуют векторные пространства, в которых различным образом задаются скалярные произведения. С другой стороны объекты общей алгебры, математического анализа и геометрии в рамках линейной алгебры рассматриваются как содержательные примеры линейных пространств.

Рассмотрим конкретный пример межпредметных связей. В нём будут рассматриваться бесконечные числовые последовательности, ряды Тейлора и линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Сразу отметим, что в книге [4] описано параллельное использование методов линейной алгебры в дискретном и непрерывном случае. Наш пример имеет иной характер. Сначала нами будет получен результат для последовательностей, а затем он будет использован для получения результата для дифференциальных уравнений. Таким образом, в нашем примере методы линейной алгебры применяются в дискретном и непрерывном случае последовательно.

Начнём с рассмотрения частного случая, относящегося к решению линейных однородных дифференциальных уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Более того, вначале предположим, что характеристическое уравнение имеет простые корни.

Пример совокупности заданий для студентов при изучении однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Начнём с определения. Говорят, что последовательность $\{a_k\}$ определяется рекуррентным отношением, если для любых нескольких *m + 1* последовательных членов которой выполняется равенство $c_1 a_i + c_2 a_{i+1} + \ldots + c_m a_{i+m-1} + c_{m+1} a_{i+m} = 0$, где $c_1, c_2, \ldots, c_m, c_{m+1}$ – константы. Выполнение этого равенства в частности означает, что начальные m членов последовательности определяют значение *m + 1* члена. Затем может быть вычислен *m + 2* член и т.д. Таким образом, чтобы задать всю рекуррентную последовательность достаточно задать начальные *m* членов последовательности.

Например, последовательность чисел Фибоначчи определяется равенством $a_{i+1} - a_i - a_{i-1} = 0$. Понятно, что таких последовательностей может быть бесконечно много. Чтобы рассмотреть непосредственно последовательность чисел Фибоначчи, нужно положить, что $a_1 = a_2 = 1$. Поскольку очередной член равен сумме двух предыдущих, возникнет последовательность: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55…

Задание 1. Доказать, что все рекуррентные последовательности, определяемые равенством с коэффициентами $c_1, c_2, \ldots, c_m, c_{m+1}$, образуют линейное пространство. *Указание*. Сумма двух таких последовательностей также является такой последовательностью. Произведение такой последовательности на действительное число также является такой последовательностью.

Задание 2. Доказать, что пространство всех рекуррентных последовательностей, задаваемых формулой $c_1 a_i + c_2 a_{i+1} + \ldots + c_m a_{i+m-1} + c_{m+1} a_{i+m} = 0$, имеет размерность n.

Задание 3. Пусть рекуррентная последовательность описывается уравнением $a_{n+1} + p \cdot a_n + q \cdot a_{n-1} = 0$ $\left(c_1 = q; c_2 = p; c_3 = 1\right)$ и уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет два различных действительных корня λ_1 и λ_2. Тогда геометрические прогрессии $\{1,\ \lambda_1, \lambda_1^2, \ldots\}$ и $\{1,\ \lambda_2, \lambda_2^2, \ldots\}$ являются соответствующими рекуррентными последовательностями. Кроме того, любая рекуррентная последовательность этого вида является их линейной комбинацией.

Задание 4. Найти соответствующие корни λ_1 и λ_2 для чисел Фибоначчи и выразить последовательность чисел Фибоначчи в виде линейной комбинации двух геометрических прогрессий (формула Бине).

Задание 5. Пусть разложение функции в ряд Тейлора имеет вид $f(x)=u_0+\frac{u_1}{1!}x+\frac{u_2}{2!}x^2+\frac{u_3}{3!}x^3+\ldots$ Доказать, что производная n-го порядка получается заменой индекса 0 на n, 1 на n+1, 2 на n+2…

Задание 6. Если функция удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка $y''+py'+q=0$, то коэффициенты ряда Тейлора удовлетворяют рекуррентной формуле ... Значит, коэффициенты ряда Тейлора являются соответствующим образом описанной рекуррентной последовательностью.

Задание 7. Пусть функция удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка $y''+py'+q=0$. Уравнение $\lambda^2+p\lambda+q=0$ называется характеристическим уравнением. Если это уравнение имеет два различных действительных корня, то можно найти коэффициенты ряда Тейлора, являющиеся геометрическими прогрессиями. Более того, ряды Тейлора можно свернуть в экспоненты. Доказать этот факт.

При решении последнего задания мы получаем два ряда Тейлора, которые дают два решения исходного уравнения. В принципе, отправляясь от рекуррентной формулы, можно получить и другие ряды Тейлора. Однако ряды, связанные с геометрическими прогрессиями, легко свернуть в экспоненты:

$$f(x)=u_0+\frac{u_1}{1!}x+\frac{u_2}{2!}x^2+\frac{u_3}{3!}x^3+\ldots=1+\frac{\lambda_1}{1!}x+\frac{\lambda_1^2}{2!}x^2+\frac{\lambda_1^3}{3!}x^3+\ldots=e^{\lambda_1 x}.$$

В итоге, решив указанные задания, студент получает утверждение о том, что дифференциальное уравнение второго порядка $y''+py'+q=0$, характеристическое уравнение имеет простые (некратные) корни λ_1 и λ_2, имеет два решения $y=e^{\lambda_1 x}$ и $y=e^{\lambda_2 x}$. Кроме того, доказано, что любое другое решение того же уравнения является линейной комбинацией двух этих базовых решений. Особое значение имеет тот факт, что результат, хотя и частный, получен самим студентом. Далее можно перейти к рассмотрению случая кратных корней, а затем и общего случая. Эти вопросы мы сейчас и рассмотрим.

Но предварительно отметим, что опыт показывает наличие затруднений у студентов с использованием рядов Тейлора, в частности с их свёртыванием в функции. Этот вопрос мы тоже ещё обсудим ниже.

Пример совокупности заданий для студентов при изучении однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в случае кратных корней. Начнём с уравнений второго порядка.

Задание 8. Пусть характеристическое уравнение дифференциального уравнению второго порядка $y''+py'+q=0$ имеет кратные корни. Найти общее решение дифференциального уравнения.

Решение. Чтобы характеристическое уравнение $\lambda^2+p\lambda+q=0$ имело кратные корни, необходимо, чтобы $q=\frac{p^2}{4}$. Во избежание недоразумений отметим, что λ в данном случае является переменной. Корень кратности два равен $-\frac{p}{2}=\lambda.$ И опять отмечаем, что с этого момента λ обретает смысл постоянной величины. Таким образом, рекуррентная последовательность описывается уравнением $a_{n+1}+p\cdot a_n+\frac{p^2}{4}\cdot a_{n-1}=0$

$(c_1 = \dfrac{p^2}{4}; c_2 = p; c_3 = 1)$. Выражая коэффициенты через значение корня λ, можно записать то же уравнение в виде $a_{n+1} \pm 2\lambda \cdot a_n + \lambda^2 \cdot a_{n-1} = 0$ $(c_1 = \lambda^2; c_2 = -2\lambda; c_3 = 1)$ ..

Как и в случае простых корней, последовательность коэффициентов ряда Тейлора, начинающаяся двумя членами 1 и λ, приводит к решению $y = e^x$. Задача состоит в том, чтобы найти ещё один вектор $(a_1; a_2; a_3)$ перпендикулярный к вектору $(c_1; c_2; c_3)$. При этом хотелось бы получить ряд Тейлора, который легко свернуть в элементарную функцию.

Рекуррентное описание последовательности показывает, что скалярное произведение векторов $(a_{n-1}; a_n; a_{n+1})$ и $(\lambda^2; -2\lambda; 1)$ равно нулю, то есть $a_{n-1}\lambda^2 - a_n 2\lambda + a_{n+1} = 0$. Следовательно, $a_{n+1} = 2\lambda a_n - \lambda^2 a_{n-1}$.

Поскольку λ к данному моменту является константой, для записи характеристического уравнения используем переменную ξ: $\xi^2 - 2\lambda\xi + \lambda^2 = 0$. Это уравнение можно переписать в виде $(\xi - \lambda)^2 = 0$. Продифференцируем это уравнение по λ, и эта производная будет равна нулю, именно по той причине, что корень λ имеет кратность два. Используем это обстоятельство следующим образом.

Рекуррентное описание геометрической прогрессии имеет вид $c_1 \cdot \left(\lambda^{n-1}\right) + c_2 \cdot \left(\lambda^n\right) + c_3 \cdot \left(\lambda^{n+1}\right) = 0$. Продифференцируем это уравнение по параметру λ и получим уравнение $c_1 \cdot (n-1) \cdot \left(\lambda^{n-2}\right) + c_2 \cdot n \cdot \left(\lambda^{n-1}\right) + c_3 \cdot (n+1) \cdot \left(\lambda^n\right) = 0$. Это означает, что в данном случае получена ещё одна последовательность, удовлетворяющее рекуррентному описанию. Речь идёт о последовательности $\{a_n = (n-1) \cdot \lambda^{n-2}\}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ Первые члены 0, 1, 2λ, $3\lambda^2, \ldots$

Остаётся свернуть соответствующий ряд Тейлора в функцию, хотя результат можно предвидеть заранее – это производная по λ функции $y = e^{\lambda x}$. Соответственно мы получаем решение в виде $y = xe^{\lambda x}$. Тем не менее, рассмотрим и ряд Тейлора:

$$y = x + x\frac{\lambda x}{1!} + x\frac{(\lambda x)^2}{2!} + x\frac{(\lambda x)^3}{3!} + \ldots = xe^{\lambda x}.$$

Задание 9. Пусть характеристическое уравнение дифференциального уравнению *n*-го порядка имеет *n* кратных корней. Найти общее решение дифференциального уравнения.

Аналогичным образом можно рассмотреть и уравнения в общем случае.

5. РЯДЫ ТЕЙЛОРА В МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЯХ

Ряды Тейлора возникают в рамках математического анализа, но они открывают ворота в новые разделы математики. Ограничимся упоминанием комплексного анализа и анализа функционального. Именно по этой причине им следует уделить особое внимание. Однако этого не происходит, видимо, по той причине, что достаточно просто, так сказать, в лоб, можно получить только несколько разложений функций в ряды Тейлора.

Конечно, разложение в ряды Тейлора экспоненты, синуса и косинуса является важнейшим результатом, который студенты могут получить самостоятельно.

Но крайне желательно получить и разложения в ряд Тейлора и других функций. И в этом помогает работа с бесконечными геометрическими прогрессиями и их суммами. Аналогичные задания давались во времена Леонарда Эйлера при проведении экзамена на должность адьюнкта.

Рассмотрение формулы суммы бесконечной геометрической прогрессии с определённой точки зрения может быть полезным при вычислении рядов Тейлора, поскольку формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

можно рассматривать как разложение функции $y=\dfrac{1}{1-x}$ в ряд Тейлора.

Возможны простые модификации этой формулы. Рассмотрим случай, заменив в исходной формуле x на $-x$. Получим формулу

$$\frac{1}{x+1}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots$$

Начнём с полезного задания, направленного на вычисление производных обратных функций.

Задание 10. Получить формулу вычисления производной натурального логарифма.

Решение. Натуральный логарифм является обратной функцией к экспоненте. Таким образом, если $y=\ln x$, то $x=e^y$. Тогда $x'_y=e^y$. Но производная обратной функции равна единице, делёной на производную исходной функции. То есть $y'_x=\dfrac{1}{e^y}=\dfrac{1}{x}$. Итак, $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$. Из этого следует, что

$$(\ln(1+x))'=\frac{1}{x+1}.$$

Задание 11. Получить разложение натурального логарифма в ряд Тейлора.

Решение. Отправляемся от формулы $\dfrac{1}{x+1}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots$ и интегрируем обе её части. В результате получаем разложение логарифма в бесконечный степенной ряд, то есть в ряд Тейлора:

$$\ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\left(-1\right)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

Рассмотрим второй случай модификации суммы бесконечной геометрической прогрессии, заменив в исходной формуле x на $-x^2$. Получим формулу

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots$$

Задание 12. Получить формулу вычисления производной арктангенса.

Решение. Арктангенс является обратной функцией к тангенсу. Таким образом, если $y=arctg\,x$, то $x=tg\,y$. Тогда $x'_y=\dfrac{1}{cos^2 y}$. Но производная обратной функции равна единице, делёной на производную исходной функции. То есть $y'_x=cos^2 y=\dfrac{=cos^2 y}{=cos^2 y+sin^2 y}=\dfrac{1}{1+tg^2 y}=\dfrac{1}{1+x^2}$. Итак, $(\mathrm{arctg}\,x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$.

Задание 13. Получить разложение арктангенса в ряд Тейлора.

Решение. Отправляемся от формулы $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^n x^{2n} + ...$ и интегрируем обе её части. В результате получаем разложение арктангенса в бесконечный степенной ряд, то есть в ряд Тейлора:

$$arctg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \left(-1\right)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

Конечно, используя этот ряд, следует получить формулу для числовой квадратуры. Напомним, что термин «квадратура» возник в Древней Греции в связи с задачей о построении циркулем и линейкой квадрата, имеющего такую же площадь как у заданного круга. В конечном счёте, задача сводится к вычислению числа пи. Лейбниц, используя разложение арктангенса в ряд Тейлора, заметил, что при $x = 1$ возникает числовой ряд: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$, который и назвали числовой квадратурой, поскольку простая форма ряда давала надежду на его суммируемость.

Попутно отметим один методический принцип, который многими крупными математиками двадцатого века яростно оспаривался. Речь идёт о том, как относиться к классическому математическому наследию. Ряд математиков, среди которых особой активностью выделялись члены группы Бурбаки, сбрасывали с корабля современности любые результаты, которые они считали устаревшими. В книге [5] яростный экстремист в области преподавания математики Жан Дьедонне с глубоким презрением упоминает устаревшие разделы математики: «синтетическая геометрия», «аналитическая геометрия», «тригонометрия», «проективная геометрия», «конформная геометрия», «неевклидова геометрия», «теория комплексных чисел». Заменить их он предлагает на линейную алгебру. Основанием является логическая простота этой науки. На самом деле параллельно из математики изгоняются чувственные образы, исторический и культурный контекст и, в конечном счёте, смысл. Процессы, происходящие в современном обществе и связанные с его дегуманизацией, требуют противодействия и возвращения такого аспекта образования как воспитание. Именно для этого нужно обращаться к драгоценному фонду человеческой мысли, в том числе и математической. Нужно доносить её жемчужины [6] до студентов.

6. КОМБИНАТОРИКА В МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЯХ

Ряды Тейлора подводят к ещё одному разделу математики, который не имеет столь высокого статуса как линейная алгебра, но используется весьма существенным образом в алгебре многочленов, математическом анализе и теории вероятностей. Речь идёт о комбинаторике. Поскольку круг задач теории вероятностей, связанных с комбинаторикой широко известен, отметим только тот факт, что, например, задачи нахождения математического ожидания и дисперсии числа успехов при испытаниях Бернулли требуют довольно сложных преобразований.

Рассмотрим теперь задачи, связанные с рядами Тейлора. Прежде всего, речь идёт о связи бинома Ньютона в школьном понимании (формула для возведения бинома в натуральную степень) и бинома Ньютона как разложения степенной функции $y=(1+x)^{\mu}$ при любом значении μ.

Применим формулу ряда Тейлора

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

к функции $y=(1+x)^{\mu}$. Если μ – натуральное число, то ряд оборвётся, поскольку функция является многочленом. По этой причине нас будут интересовать отрицательные и дробные значения показателя μ.

Разложение функции $y=(1+x)^{\mu}$ будет иметь вид

$$(1+x)^{\mu}=1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

Задание 14. Получить формулу бинома Ньютона для случая, когда μ является натуральным числом.

Задание 15. Получить разложение арксинуса в ряд Тейлора.

Указание. Порядок выполнения задания таков. Получить формулу для дифференцирования арксинуса. Получить формулу для разложения в ряд функции Тейлора $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, используя бином Ньютона для $\mu=\frac{1}{2}$. Кроме того, нужно заменить x на $-x^2$. Наконец, интегрированием получить формулу для разложения арксинуса в ряд Тейлора.

Несмотря на то, что разложение экспоненты в ряд Тейлора имеет, пожалуй, наиболее простой вид, желательно предложить студентам задачи, которые заставляют установить связь между свойствами экспонент и рядов, в которые они разлагаются. Эти задания были достаточно хорошо известны, но, возможно, о них следует напомнить.

Задание 16. Перемножив два ряда Тейлора, в которые разлагаются экспоненты e^x и e^y, доказать, что e^{x+y}.

Решение. Перемножим два бесконечных ряда

$$(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots)(1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\ldots).$$

В ряде, который будет получен, соберём в отдельные скобки все члены степени n:

$$\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n-1}y}{(n-1)!1!}+\frac{x^{n-2}y^2}{(n-2)!2!}+\ldots+\frac{xy^{n-1}}{1!(n-1)!}+\frac{y^n}{n!}=$$

$$=\frac{1}{n!}(\frac{n!x^n}{n!}+\frac{n!x^{n-1}y}{(n-1)!1!}+\frac{n!x^{n-2}y^2}{(n-2)!2!}+\ldots+\frac{n!xy^{n-1}}{1!(n-1)!}+\frac{n!y^n}{n!})=$$

$$=\frac{1}{n!}(\frac{n!x^n}{n!}+\frac{n!x^{n-1}y}{(n-1)!1!}+\frac{n!x^{n-2}y^2}{(n-2)!2!}+\ldots+\frac{n!xy^{n-1}}{1!(n-1)!}+\frac{n!y^n}{n!})=$$

$$=\frac{1}{n!}\left(C_n^0x^ny^0+C_n^1x^{n-1}y^1+\ldots+C_n^nx^0y^n\right)=\frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Что и требовалось доказать.

Задание 17. Перемножив два ряда Тейлора, в которые разлагаются экспоненты e^x и e^{-x}, доказать, что $e^x\cdot e^{-x}=1$.

Указание. Перемножить ряды и сгруппировать члены одинаковой степени по аналогии с предыдущим заданием.

Задачи, связанные с комбинаторикой возникают и в таком разделе математики, как математическая логика. Приведём несколько примеров таких заданий без решения.

Задание 18. Сколько строк имеет таблица истинности булевой функции с n аргументами?

Задание 19. Сколько существует булевых функций с n аргументами?

Задание 20. Сколько существует булевых функций с n аргументами, которые имеют истинные значения ровно для m комбинаций аргумента?

В настоящее время преподавание комбинаторики выносится в курс дискретной математики. Сюда же часто помещают знакомство с азами теории множеств. При этом порой возникает проблема, связанная с тем, что в некоторых курсах математики, преподаваемых раньше курса дискретной математики, используются понятия и теоремы теории множеств и формулы комбинаторики. В любом случае данный вопрос следует продумывать и обсуждать в коллективе преподавателей.

Заодно отметим и теорию графов, которая также носит межпредметный характер. Графы являются наглядными объектами. При этом с их помощью можно изобразить эволюционирующие сложные системы, например, марковские цепи и связанные с ними системы массового обслуживания. Но, конечно, не следует забывать, что исходным пунктом возникновения теории графов стала зарождающаяся топология. Создателем топологии и теории графов стал Леонард Эйлер, решивший задачу о кенигсбергских мостах. В дальнейшем в теории графов возникли задачи, направленные на решение топологических задач, связанных с планарностью, симметрией и раскраской графов.

Скажем также, что такие геометрические объекты как симплексы могут рассматриваться как графы. Что же касается большинства разделов исследования операций и математики, относящейся к математическим аспектам информатики, то теория графов здесь повсеместно используется. Достаточно упомянуть теорию сетей и теорию алгоритмов.

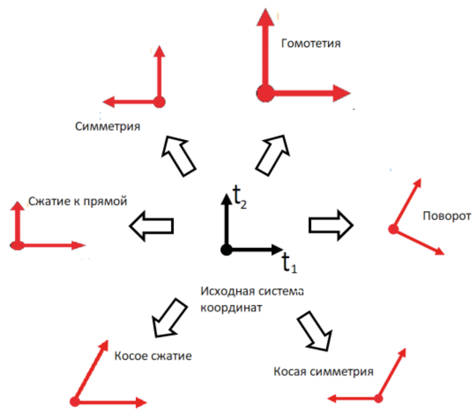
Отметим, что общеизвестные факты широкого использования комбинаторики или теории графов в данной статье упоминаются, чтобы повысить у преподавателей математики интерес к рассмотрению межпредметных связей.

6. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ОБЩЕМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Понятие преобразований в общем курсе математики, несомненно, являются важнейшей точкой сборки. Во всех курсах от аналитической геометрии до уравнений математической физики умение пользоваться преобразованиями является насущно необходимым. При этом вся связанная с преобразованиями тематика усваивается студентами недостаточно хорошо. Эта ситуация имеет объективные основания и связана, в частности, со сложностью соответствующих понятий и формальной трудностью аналитических операций, на которых основываются различные виды преобразований.

Улучшить знания студентов, относящиеся к различным аспектам теории преобразований, можно с помощью достаточно простой системы заданий на эту тему. Эти задания студент должен проделать самостоятельно. В результате он начинает понимать смысл вопроса, пусть и в простой постановке. Это позволяет облегчить переход к общим формулировкам. Например, изучение преобразований в курсе аналитической геометрии является пропедевтикой значительно более общих понятий линейной алгебры.

Итак, в рамках аналитической геометрии изучение преобразований проводится на достаточно простом уровне. Но именно здесь можно и нужно добиться высокой степени понимания целого ряда вопросов. Прежде всего, речь идёт о понимании смысла линейных и аффинных преобразований. Далее мы будем говорить об аффинных преобразованиях, поскольку линейные преобразования можно трактовать как аффинные преобразования без сдвига.



В статье [7] автор предлагает кинематическую интерпретацию аффинных преобразований. В статье [1] говорится о классификации аффинных преобразований, основанной на этих соображениях. На наш взгляд эта интерпретация облегчает понимание и запоминание соответствующих формул. Рассмотрим аффинное пространство размерности *n*. Пусть в нём задан ортонормированный базис, координаты в котором обозначим через $(t_1;t_2;\dots t_n)$. Зададим также точку *P* и *n* линейно независимых векторов $\{e_i\}$, образующих второй базис пространства с координатами $(x_1;x_2;\dots x_n)$.

Пусть в первом базисе задана точка $T\ (t_1;t_2;\dots t_n)$. В точку $P(p_1;p_2;\dots p_n)$ осуществим сдвиг начала второй системы координат. Пусть вектора базиса $\{e_i\}$ имеют координаты $(a_{1i};a_{2i};\dots a_{ni})$. Наконец, рассмотрим точку Q, имеющую во втором базисе координаты $(t_1;t_2;\dots t_n)$. Вычислим её координаты в первой системе координат. Будем отождествлять координаты $(t_1;t_2;\dots t_n)$ со временем, засечённым *n* секундомерами. При этом начнём перемещение из точки *T* в точку *Q*.

Сначала из точки *T* мгновенно сдвинемся в точку *P*. Далее время t_1 будем двигаться в направлении, заданным вектором e_1. Затем время t_2 будем двигаться в направлении, заданным вектором e_1 и т.д. В итоге перемещение можно записать векторным уравнением

$$Q = P + t_1 e_1 + \dots + t_n e_n .$$

Теперь можно расписать это уравнение в координатах

$$q_i = p_i + t_1 a_{i1} + t_2 a_{i2} + \dots + t_n a_{in} .$$

Ясно, что речь идёт об обычной форме аффинных преобразований, которую можно записать и в матричной форме. Отличие в том, что координаты базисных векторов трактуются как скорости, а уравнения как описание движения вдоль одной из осей исходной системы координат.

Поскольку преобразование задаётся выбором векторов второго базиса можно предлагать студентам задачи, в которых они должны получить формулы конкретных преобразований. При этом студенты должны учитывать, что вид преобразования определяется длиной и углами наклона новых векторов, а также их расположением относительно исходного базиса. Естественно, наиболее доступные задания связаны с декартовой плоскостью, то есть с вопросами аналитической геометрии.

Задание 21. Вывести формулы поворота декартовой плоскости на заданный угол против часовой стрелки.

Решение. Чтобы решить задачу, нужно построить ортонормированный базис, вектора которого повёрнуты на заданный угол α против часовой стрелки. По определению тригонометрических функций вектор e_1, наклонённый относительно оси абсцисс на угол α, имеет координаты $(\cos\alpha;\sin\alpha)$. Ортогональный ему вектор e_2 имеет координаты $(\cos(\alpha+\frac{\pi}{2});\sin(\alpha+\frac{\pi}{2}))$ или $(-\sin\alpha;\cos\alpha)$. Сдвига системы координат при повороте нет, таким образом, для поворота мы получаем формулы

$$x_1 = x\cdot\cos\alpha - y\cdot\sin\alpha\ ,$$

$$y_1 = x\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha\ .$$

где $\left(x;y\right)$ – координаты исходной точки, а $\left(x_1;y_1\right)$ – координаты этой точки после поворота. Это преобразование можно записать в матричной форме

$$\binom{x_1}{y_1} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\binom{x}{y}\ .$$

Задание 22. Вывести формулы обратного преобразования, то есть поворота декартовой плоскости на заданный угол по часовой стрелке. Проверить, что матрицы соответствующих преобразований являются обратными друг к другу.

Решение. Чтобы получить нужные формулы достаточно в ранее выведенных формулах поворота заменить угол α на угол $-\alpha$.

Соответствующие преобразования поворота в высшей степени наглядны. Кроме того, очевидно, что поворот на угол α и поворот на угол $-\alpha$ являются обратными преобразованиями. Формулы при этом обретают плоть.

В рамках этого же простого примера преобразований следует акцентировать внимание на групповых свойствах геометрических преобразований. В частности на занятиях по аналитической геометрии можно дать определение группы, предваряя знакомство с этим понятием на занятиях по общей алгебре. При этом акцент можно сделать на том обстоятельстве, что группа преобразований обладает определённой целостностью, универсальностью и замкнутостью. И именно аксиомы группы обеспечивают эти её свойства.

Задание 23. Доказать, что повороты плоскости вокруг начала координат образуют группу

а) используя геометрические свойства поворота.

б) используя матричную формулу поворота.

Ещё раз подчеркнём, что в данном случае мы наполняем абстрактную алгебраическую структуру геометрическим содержанием. Это облегчает усвоение важнейшего понятия группы. Здесь же можно ввести понятие подгруппы.

Задание 24. Пусть задан ненулевой угол α_0. Рассмотреть множество поворотов на углы $n \cdot \alpha_0$, где n – целое число. Доказать, что соответствующие этим углам повороты плоскости вокруг начала координат образуют группу.

Задание 25. Доказать, что повороты плоскости на углы $n \cdot \alpha_0$, где $\alpha_0 = \frac{2\pi}{m}$, где m некоторое натуральное число, образуют конечную циклическую группу.

В свою очередь в курсе общей алгебры при изучении групп и подгрупп перестановок, то есть отображений конечных множеств на себя тоже по возможности следует использовать геометрическое содержание. При этом можно рассматривать группы преобразований (симметрий) правильных многоугольников, многогранников и других геометрических фигур и тел.

Задание 26. Рассмотреть группу отображений квадрата на себя и сравнить её с группой перестановок множества из четырёх элементов. Выделить все подгруппы этих двух групп.

Вернувшись к повороту плоскости, отметим, что с помощью этого преобразования в аналитической геометрии осуществляется приведение общего уравнения кривых второго порядка к каноническому виду. Общая стратегия этого действия такова: сначала производится поворот, обнуляющий коэффициент при произведении координат «икс» и «игрек»; затем осуществляется выделение полного квадрата. При приведении квадратичных форм к сумме квадратов в пространствах любого числа измерений в курсе линейной алгебры используется та же стратегия. Что же касается линейной алгебры, то её можно рассматривать как развёрнутое учение о линейных преобразованиях в конечномерных пространствах. Оно естественным образом переходит в совокупность идей функционального анализа, который часто называют не разделом математики, а другой точкой зрения на математический анализ. Основой же этой точки зрения являются понятия линейной алгебры.

Если рассматривать весь комплекс подобных вопросов, то автору в очередной раз хочет сослаться на книгу [8]. Один из авторов этой книги не дожил до её выхода в свет. Вот что пишет о нём его соавтор, неявно обосновывая необходимость изучения курса «архаичной» аналитической геометрии.

«30 мая 1968 года, когда эта книга была в наборе, не стало Израиля Марковича Глазмана, которому всецело принадлежит основной замысел книги – конечномерное «моделирование» функционального анализа. Когда кто-нибудь рассказывал ему о сложных бесконечномерных построениях, он обычно спрашивал: «А как это выглядит в двумерном случае?» – и нередко этот шокирующий вопрос помогал лучше понять суть дела. Вся математическая деятельность этого яркого таланта была направлена на то, чтобы увидеть простую основу сложных вещей».

Теперь обратимся к преобразованиям в курсе обычного математического анализа. Эти преобразование принято обозначать термином «замена переменных». Здесь, естественно, возрастает сложность вычислений, поскольку кроме переменных здесь необходимо вычислять производные. Замена переменных является ключевым методом в интегральном исчислении, в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, в теории дифференциальных уравнений в частных производных. По этой причине замене переменных уделяется значительное внимание. Однако, на наш взгляд, нужно подчёркивать суть и единство идей, связанных с заменой переменных в любом из упомянутых предметов. Рассмотрим несколько примеров различного характера.

Замена переменных в аналитической геометрии связана не только с аффинными преобразованиями, но и с получением уравнений некоторых линий в полярных координатах. Отметим, что уравнения кривых второго порядка в полярных координатах могут использоваться в задаче движения планет, то есть в курсе теории обыкновенных дифференциальных уравнений или в широко понимаемом курсе математической физики, выходящем за пределы теории уравнений в частных производных.

Задание 27. Вывести полярное уравнение эллипса, использовав фокус эллипса как начало координат.

Указание. Пусть F_1 – фокус эллипса, а M – точка на эллипсе. Обозначим угол наклона вектора F_1M к оси абсцисс через φ, а длину этого вектора через r. Используя геометрическое определение эллипса, следует выразить расстояние F_2M через F_1M и длину горизонтальной полуоси a. Затем нужно упростить уравнение

Задание 28. Доказать, что параметрические уравнения сжатой окружности $x = a\cdot\cos\alpha$ и $y = b\cdot\sin\alpha$ являются также и уравнениями эллипса с полуосями a и b.

Указание. Подставить соответствующие выражения в каноническое уравнение эллипса.

Задание 29. Доказать, что параметрические уравнения $x = a\cdot\mathrm{ch}t$ и $y = b\cdot\mathrm{sh}t$ являются уравнениями гиперболы с полуосями a и b.

Указание. Подставить соответствующие выражения в каноническое уравнение гиперболы.

Результаты последних двух заданий позволяют без проблем писать программы на языках программирования с графическим расширением, которые строят эллипсы и гиперболы с заданными полуосями. Написание подобных программ студентами позволяют им увидеть объекты, стоящие за формулами.

Как известно, при интегрировании рациональных выражений вида $R(\sin x, \cos x)$ используется универсальная подстановка $t = tg\dfrac{x}{2}$ $(-\pi < x < \pi)$. Чтобы студент мог взглянуть на неё несколько иными глазами, можно предложить следующее задание.

Задание 30. Доказать что sin x и cos x рациональны тогда и только тогда, когда рационален.

Решение. Доказательство основывается на формулах

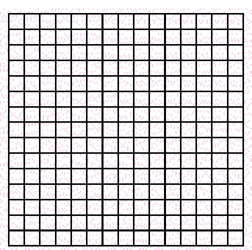
$$tg\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x},\ \sin x = \frac{2tg\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}} \text{ и } cosx = \frac{1-tg^2\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}}.$$

Задание 31. Решить в целых числах диофантово уравнение $x^2 + y^2 = z^2$.

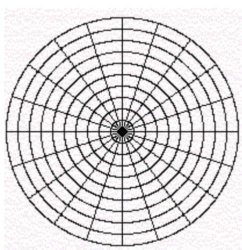
Решение. Исходное уравнение можно записать в виде $(\frac{x}{z})^2 + (\frac{y}{z})^2 = 1$. Нужно найти рациональные дроби $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$. Положим, что $\frac{x}{z} = \sin\alpha$, тогда $\frac{y}{z} = \cos\alpha$. Рассмотрим углы α, для которых $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{m}{n}$. Тогда $\frac{x}{z} = \sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2mn}{n^2+m^2}$. Отсюда следует, что $\frac{y}{z} = \frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}$. Как итог получаем решение исходного уравнения: $x = 2mn$, $y = n^2 - m^2$, $z = n^2 + m^2$.

Отметим, что диофантовы уравнения в вузовском курсе математики практически не упоминаются. И это при том, что в современной математике они играют важную роль. Так или иначе, следует упомянуть об этих уравнениях и продемонстрировать суть соответствующей проблематики хотя бы на примере пифагоровых треугольников (что и сделано в последнем задании).

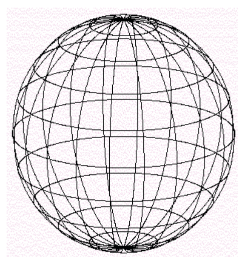
Особое значение имеют образы геометрического характера, связанные с преобразованиями. Прежде всего, речь идёт об образном представлении различных видов систем координат. Так декартова система координат связана с сеткой двух семейств прямых. Прямые каждого семейства параллельны друг другу, а прямые из разных семейств перпендикулярны. Если говорить о полярной системе координат, то рассматриваются семейства концентрических окружностей и лучей, исходящих из общего центра окружностей. Это относится и к другим системам координат, например, сферическим.



Сетка декартовой системы координат



Сетка полярной системы координат

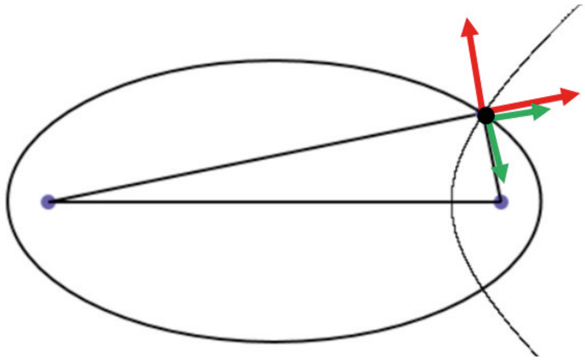


Сетка меридианов и параллелей на сфере

Аффинные преобразования преобразуют сетку из квадратов в сетку из параллелограммов. Другие отображения дают намного более сложные картины, которые очерчиваются разнообразными сетками, часто довольно сложными.

По этой причине изучение различных сеток, возникающих при удачном комбинировании семейств кривых, является одним из способов изучения всевозможных преобразований.

Задание 32. Пусть на плоскости заданы две точки F_1 и F_2. Доказать, что семейства софокусных эллипсов и гипербол образуют два взаимно ортогональных семейства.



Указание. Длина фокальных радиусов гиперболы возрастает с одинаковой скоростью. Направление касательной к гиперболе определяется направлением суммы этих скоростей, то есть скоростью точки, движущейся по гиперболе. Длина одного фокального радиуса эллипса возрастает, а другого с такой же скоростью убывает. Направление касательной к эллипсу определяется направлением суммы этих скоростей, то есть скоростью точки, движущейся по эллипсу. Из этого следует, что касательные к этим кривым ортогональны.

Функции комплексного переменного дают яркие примеры интереснейших преобразований со сложной геометрией.

Задание 33. Рассмотреть характер преобразования сетки полярной системы координат в новую сетку с помощью функции Жуковского.

Решение. Функция Жуковского задаётся уравнением $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$. Зададим независимую переменную в тригонометрической форме, что соответствует полярной системе координат: $z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$. Тогда действительная часть функции Жуковского равна $u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi$, а мнимая часть равна $v = -\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) sin\varphi$. Исключив тригонометрические функции от угла φ, получим уравнение эллипса $\frac{u^2}{\frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{r}+r)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{r}-r)^2} = 1$. Таким образом, окружности полярной системы координат переходят в эллипсы, фокусы которых отстоят от начала координат на единичное расстояние. Исключив радиус r, получим уравнение гиперболы $\frac{u^2}{cos^2\varphi} - \frac{v^2}{sin^2\varphi} = 1$. Таким образом, лучи полярной системы координат переходят в гиперболы, фокусы которых отстоят от начала координат на то же самое единичное расстояние. Значит, полярная система координат перешла в семейство софокусных эллипсов и гипербол, образующих два взаимно ортогональных семейства.

Ортогональность полностью соответствует свойствам конформных отображений. Переход в новую систему координат меняет форму окружности и превращает её в профиль крыла, сохраняя аэродинамические свойства. Этот факт хорошо известен, но мы подчёркиваем его связь с заменой переменных и аналитической геометрией.

Перейдём к вопросам замены переменных, связанных с дифференцированием и интегрированием. Замена переменных в обыкновенных дифференциальных уравнениях используется повсеместно. Но мы рассмотрим пример из теории уравнений в частных производных. Рассмотрим линейное уравнение второго порядка

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + +cu + f = 0.$$

Чтобы использовать формулы преобразования переменных $\xi = \varphi(x, y)$ и $\eta = \psi(x, y)$, нужно найти с помощью дифференцирования сложных функций. Например, частные производные до второго порядка имеют вид

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx},$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}.$$

Задание 34. Показать, что уравнение колебаний струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ с помощью замены переменных по формулам $\xi = x + at$ и $\eta = x - at$ (обратные преобразования $x = \frac{\xi + \eta}{2}$ и $t = \frac{\xi - \eta}{2a}$) можно привести к виду $\boldsymbol{\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0}$.

Задание 35. Показать, что положив $\frac{\partial u}{\partial \eta} = v$ и перейдя к уравнению $\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$, можно проинтегрировать уравнение и получить общее решение

$$u(x, t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at).$$

Коснёмся, наконец, приёмов интегрирования, связанных с заменой переменных. Речь идёт об одном знаменитом интеграле, связанном с интегральной предельной теоремой Муавра-Лапласа, которая изучается в курсе теории вероятностей. Как известно, несобственный интеграл $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ равен $\sqrt{\pi}$. Знаменит же он, кроме всего прочего, тем, что лорд Кельвин сказал про это равенство: «Математик – это тот, для кого справедливость этого равенства так же очевидна как дважды два четыре». Надо признать, что это утверждение ставило в тупик многих студентов-математиков, а, пожалуй, даже вгоняло их уныние. Однако есть достаточно наглядный путь к вычислению данного интеграла.

Следуя книге [9], наметим соответствующую линию вычисления интеграла I, которая даёт возможность понять, не вдаваясь в детали, как получается итоговый результат. Прежде всего, двойной интеграл, записанный как повторный, $\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - y^2} dy$ по двум независимым переменным равен I^2. Проведём замену переменных декартовых координат на полярные, вспомнив, что якобиан в этом случае равен r. Далее получаем $I^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} re^{-r^2} dr$. Этот интеграл берётся с помощью ещё одной замены переменных $r^2 = t$. Он равен π. Следовательно, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

7. ФУНКЦИИ ДВУХ И БОЛЕЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Говоря о различных видах преобразований, мы особое внимание обращали на образное восприятие соответствующих понятий. Это наша принципиальная позиция. В то же время сейчас существует точка зрения, состоящая в том, что современная математика настолько абстрактна, что исчезла возможность опираться на геометрическую интуицию и образное мышление. Математическое мышление, с этих позиций, базируется на логической основе, в том числе на конструировании неких абстрактных структур, которое часто характеризуют как некую языковую игру.

Естественно, в рамках математики происходит постоянная борьба между математиками, исходящими из представлений о глубинной связи математики с реальным миром, и, условно говоря, «игровиками». Примером такого противостояния являлся спор между И.В. Арнольдом и Ю.И. Маниным. Не углубляясь в суть этого эмоционального диспута, автор хочет поделиться одним воспоминанием. Оно, на его взгляд как раз и затрагивает вопрос о роли образов в математическом мышлении.

На защите докторской диссертации Виктором Ивановичем Буслаевым слово взял академик Борис Сергеевич Кашин, выдающийся специалист в области функций действительного переменного. В частности он несколько пренебрежительно отозвался о теореме Пуанкаре [10]. Как результат, ему возразил академик Андрей Александрович Гончар, также выдающийся специалист, но в области функций комплексного переменного. Он сказал, что в рамках функций действительного переменного теорема может представляться достаточно тривиальной. Но всё в корне меняется при переходе в комплексную область. После этого он привёл ряд довольно простых вопросов, которые для функций действительного переменного вообще не стоят, но для функций комплексного переменного ответы неизвестны.

Причина, по нашему мнению, состоит в том, что образ функции комплексного переменного четырёхмерен. Значит, здесь опора на образное мышление слабеет. А как итог, проблемы решаются с неизмеримо большим напряжением. Наш вывод таков. Образное мышление необходимо, в том числе и такая его составляющая как пространственное воображение. К сожалению, опыт показывает, что у современных студентов в этом отношении часто возникают проблемы. Например, понятие функции двух переменных слабо или вообще не связано с естественным образом поверхности.

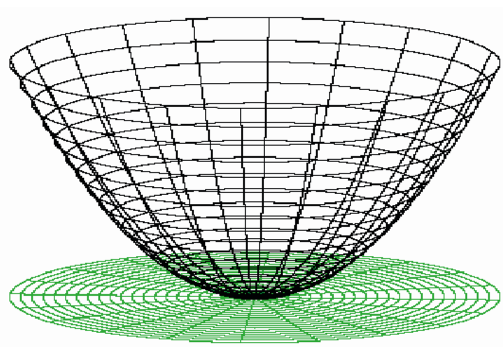
Формирование соответствующих образов и установление их связи с математическими понятиями должно происходить в рамках математического анализа и аналитической геометрии. Здесь, также как и в случае понятия функции, полезно использовать пластические образы поверхностей. При этом «график» функции двух переменных трактуется как гибкая эластичная ткань, первоначально расположенная на координатной плоскости Oxy. Далее координата z, возникающая при аналитическом описании функции $z = F(x, y)$, трактуется как вертикальное смещение каждой точки эластичной ткани. При этом эластичная ткань деформируется и превращается в соответствующую поверхность. Образ, конечно, весьма простой, но он объясняет, по какой причине уравнение $z = F(x, y)$ описывает поверхность.

Аналитическая геометрия должна являться естественным полигоном по изучению поверхностей, но, надо признать, что на практике этого не происходит. Дело в том, что курс аналитической геометрии довольно обширен и таит в себе целый ряд сложных для первокурсников вопросов. Речь идёт об активном освоении векторной алгебры, об упомянутых ранее аффинных преобразованиях, об общей теории кривых второго порядка. По этой причине студент к моменту выхода в трёхмерное пространство уже перегружен тем, что обнаружил на декартовой плоскости. Тут, конечно, мы выходим на сложную проблематику содержания общего курса математики в вузе. Устарела аналитическая геометрия или жизненно нужна? Впрочем, решение подобных вопросов выходит не только за рамки данной статьи, но за рамки нашей компетенции.

Что же касается изучения поверхностей в курсе аналитической геометрии, то до студентов в любом случае необходимо познакомить с изучением поверхностей методом сечений. В плане межпредметных связей важно отметить то обстоятельство, что этот метод имеет тесную связь с понятием частной производной. Не останавливаясь на соответствующих задачах аналитической геометрии, обратимся к задачам связанным с решением экстремальных задач и оптимизацией. Важность этих задач широко известна [11]. Некоторые из них могут решаться методом сечений, либо заменой переменных.

Задание 36. Изучить функцию $z = x^2 + y^2$. Изобразить соответствующую ей поверхность и описать основные её свойства. Найти максимум и минимум этой функции в области $(x - a)^2 + (y - b)^2 \le r^2$.

Решение. Перейдём цилиндрической системе координат. При этом переменная z сохраняется, а переменные x и y заменяются на переменные r и φ. Уравнение $z = x^2 + y^2$ примет вид $z = r^2$. При постоянном z постоянно и r, следовательно, поверхность ограничивает тело вращения. Легко понять, что любое сечение поверхности плоскостью, проходящей через ось OZ, является параболой $z = r^2$, таким образом, чем дальше от начала координат находится точка $(x; y)$, тем больше значение z.

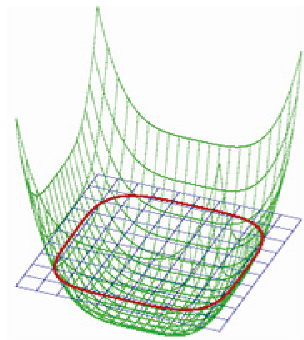


Очевидно, что область $(x - a)^2 + (y - b)^2 \le r^2$ является кругом. Характер функции показывает, что максимум находится на границе этого круга. Если начало координат не попадает в круг, то это же можно сказать и о минимуме. Если же начало координат попадает в круг, то минимум функции находится как раз в начале координат. По этой причине далее будем рассматривать только случай, когда начало координат лежит вне круга.

Направлениями наибыстрейшего возрастания функции являются лучи, исходящие из начала координат. Таким образом, максимум на границе области достигается в самой далёкой от начала координат точке, а минимум – в самой близкой. Обе эти точки лежат на луче, соединяющем центр окружности и начало координат, то есть они являются концами диаметра, лежащего на луче, исходящем из начала координат.

Образное представление о функциях двух переменных как о поверхностях связано с двумя важными вопросами. Речь идёт о понятии неявной функции и о геометрическом смысле неравенств. Эти темы тесно связаны между собой, хотя вопрос о неявных функциях относится к математическому анализу, а вопрос о неравенствах относится в первую очередь к математической теории принятия решений.

Задание 37. Каков геометрический смысл неравенства $F(x_1, x_2) \le b$.



Решение. Пусть нам задано неравенство $F(x_1, x_2) \le b$. Рассмотрим функцию от двух переменных $z = F(x_1, x_2)$. Она задаёт поверхность в трёхмерном пространстве. Пересечение этой поверхности с плоскостью $z = b$ является некоторой кривой. Уравнение этой кривой имеет вид $F(x_1, x_2) = b$. Её проекция на координатную плоскость Ox_1x_2 разбивает плоскость на две области. В одной области выполняется неравенство $F(x_1, x_2) \le b$, а в другой $F(x_1, x_2) \ge b$.

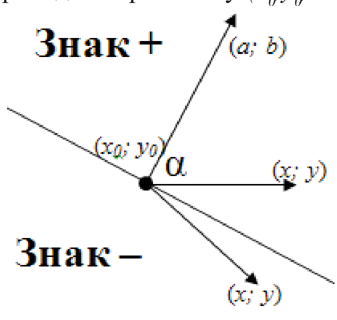
Итак, неравенство $F(x_1, x_2) \le b$ задаёт на плоскости область, ограниченную кривой $F(x_1, x_2) = b$. Система же из нескольких неравенств задаёт область, представляющую собой пересечение нескольких таких областей.

Задание 38. Обязательно ли область, заданная уравнением $F(x_1, x_2) \le b$. Является связной? Привести пример.

Вопрос о геометрическом смысле неравенств является центральным при решении задач линейного программирования, хотя в этом случае рассматриваются только линейные уравнения. Здесь кроме геометрической картины возникает возможность простого получения результата с помощью скалярного произведения. При этом в случае линейного неравенства с двумя переменными результат и его вывод являются весьма наглядными. Кроме того, переход от двух переменных к любому их количеству не представляет никаких затруднений. В основу вычислений кладутся методы линейной алгебры.

Задание 39. Каков смысл линейного неравенства с двумя переменными?

Решение. Выведем уравнение прямой. Пусть она проходит через точку (x_0,y_0) и задан вектор (a,b), перпендикулярный этой прямой. Пусть точка (x,y) лежит на прямой, тогда вектор $(x - x_0, y - y_0)$ направлен вдоль данной прямой. Следовательно, скалярное произведение ортогональных векторов с координатами (a,b) и $(x - x_0, y - y_0)$ равно нулю, то есть $a\cdot(x - x_0)+b\cdot(y - y_0) = 0$ или $ax + by + c = 0$, где $c = (-x_0\cdot a - y_0\cdot b)$.



При выводе уравнения прямой точка $(x; y)$ лежала на прямой. Теперь будем выбирать точку на плоскости произвольным образом. В этом случае скалярное произведение векторов с координатами *(a,b)* и $(x - x_0, y - y_0)$ уже не будет равно нулю. Его знак зависит от угла α между этими векторами. Если угол острый, то произведение положительно.

Действительно, скалярное произведение векторов равно произведению их модулей на косинус угла между ними. Косинус острого угла положителен, значит, и скалярное произведение положительно. Если же угол тупой, оно отрицательно. Вектор *(a,b)* направлен в одну из полуплоскостей, на которые прямая вида $ax + by + c = 0$ делит плоскость. Очевидно, что все вектора, исходящие из точки (x_0, y_0) в эту полуплоскость образуют с вектором *(a,b)* острые углы. Это означает, что для всех точек этой полуплоскости верно неравенство вида $ax + by + c > 0$. Наоборот, все вектора, исходящие из точки (x_0, y_0) во вторую полуплоскость образуют с вектором *(a,b)* тупые углы. Это означает, что для всех точек второй полуплоскости верно неравенство вида $ax + by + c < 0$. Итак, решением как неравенства $ax + by + c > 0$, так и неравенства $ax + by + c < 0$ являются координаты всех точек одной из двух полуплоскостей, на которые прямая делит плоскость. Мы будем допускать вольность речи и говорить: «Решением неравенства является полуплоскость».

Задание 40. Прояснить смысл линейного неравенства с двумя переменными с помощью соображений, связанных с функцией $z = ax + by + c$.

При изучении линейного программирования используются геометрический метод для задачи с двумя переменными и симплекс-метод. Симплекс-метод связан с обсуждаемой нами ранее темой о замене переменных. При этом используются жордановы исключения.

Что же касается геометрического метода, то целесообразно решить хотя бы одну задачу для трёх переменных. Здесь студенту в большей мере приходится опираться не на плоскую картинку многоугольника, а на понимание метода решения задачи.

Задание 41. Для системы линейных неравенств с тремя переменными найти область, задающую решение системы неравенств:

$$\begin{aligned} &5x + y - 7z >= -21; \\ &7x - 4y + z <= 3; \\ &14x + 19y - 25z >= -48; \\ &2x + y - z >= -6. \end{aligned}$$

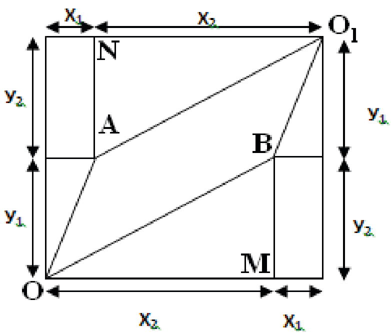
Указание. Каждое из неравенств описывает полупространство. Пересечение четырёх полупространств, предположительно, может оказаться тетраэдром. Этот факт нужно проверить. Кроме того, необходимо найти координаты вершин этого тетраэдра.

Вершина тетраэдра является пересечением трёх плоскостей, каждая из которых возникает в результате замены неравенства равенством. Итак, вершина определяется системой трёх линейных неравенств с тремя неизвестными. Таких систем в нашем случае возникает четыре (одно из неравенств отбрасывается).

При этом координаты найденной из соответствующей системы уравнений вершины тетраэдра нужно подставить в отброшенное неравенство и проверить его выполнение. Если все предполагаемые вершины благополучно пройдут проверку, то область является тетраэдром.

Возможно и рассмотрение задач с четырьмя переменными, но для ускоренного их решения следует использовать, например, электронные таблицы.

8. ОПРЕДИЛИТЕЛЬ КАК ОБЪЁМ



Очень важным для математики вообще является то обстоятельство, что определитель квадратной матрицы n на n с точностью до знака равен объёму параллелепипеда, натянутого на вектора, соответствующие столбцам (строкам) этой матрицы. Для матрицы 3 на 3 этот факт доказывается в рамках аналитической геометрии при рассмотрении смешанного произведения. Однако для матриц всех остальных размерностей, включая и матрицу 2 на 2 об этом факте обычно не упоминают. По этой причине желательно уделить данному вопросу особое внимание. Дело в том, само это обстоятельство используется во многих разделах математики, например, при замене переменных в многократных интегралах.

По нашему мнению преподавателю нужно акцентировать внимание студентов на этом вопросе, чтобы хотя бы для матрицы 2 на 2 получить указанный результат, тем более, что это не представляет труда:

$$S_{параллелограмма} = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - 2x_1y_2 - x_2y_2 - x_1y_1 =$$
$$x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y - 2x_1y_2 - x_2y_2 - x_1y_1 = x_2y_1 - x_1y_2.$$

Вычисления весьма простые, но проведём их ещё раз в несколько ином виде. Это понадобится в дальнейшем. Положим, что $y_1 + y_2 = h$. Чтобы получить площадь параллелограмма, из площади большого прямоугольника нужно вычесть сумму площадей двух составных прямоугольников. Один составлен из треугольников OBM и ANO_1 и имеет площадь $x_2 \cdot (h - y_1)$, а второй составлен из двух прямоугольных трапеций и имеет площадь $x_1 \cdot (h + y_2)$. Вычисления принимают более простую форму:

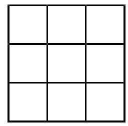
$$S_{параллелограмма} = (x_1 + x_2) \cdot h - x_2 \cdot (h - y_1) - x_1 \cdot (h + y_2) = x_2y_1 - x_1y_2.$$

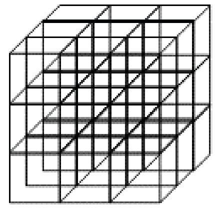
Отметим, что мы рассматриваем только тот частный случай, когда вектора, соответствующие столбцам или строкам матрицы, направлены в первый квадрант. Аналогичное ограничение будет использоваться и далее.

Сравним только что проведённое доказательство для матриц два на два с доказательством с помощью смешанного произведения для матриц три на три. Предельно прозрачное доказательство, упомянутое вторым, в отличие от первого не соотносит координаты векторов и объём. Рассуждение основано на других соображениях. Желательно получить аналог доказательства три на три, которое показывало бы, как вектора с заданными координатами обеспечивают параллелепипеду соответствующий объём.

Что же касается матриц большего размера, то, конечно, здесь всё обстоит куда сложней. Разбираться в деталях многомерных конструкций трудно, хотя и полезно.

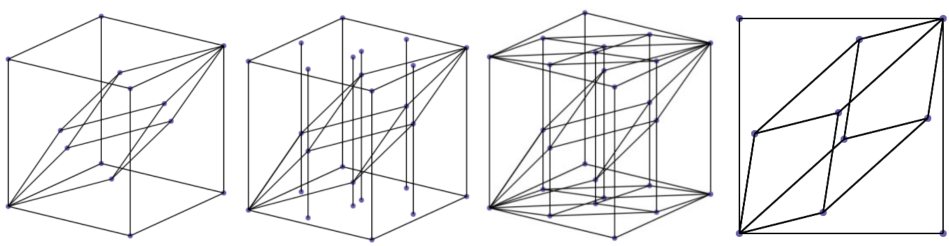
Нарастание сложности ситуации можно оценить по двум картинкам – плоской и объёмной. Тем не менее, перейдём к рассмотрению случая, когда n больше или равно трём.





Возникает мысль, что и в общем случае тоже можно вычислить определитель вида $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ . & . & . & . \\ w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{vmatrix}$ подобно тому, как это делалось в двумерном случае. До начала вычислений можно предположить, что из произведения вида $\prod_{i=1}^{n}(x_i + y_i + \dots + w_i)$ будут вычитаться «лишние объёмы». При этом те слагаемые, в которых есть одинаковые индексы, уничтожаются, а некоторые (в зависимости от чётности подстановки) меняют знак. На самом деле мы вскоре скорректируем это предположение.

Конечно, для детального изучения ситуации требуется небольшое исследование. И начать нужно со случая n = 3, несмотря на то, что, как уже упоминалось, именно этот случай рассматривается при изучении векторной алгебры в трёхмерном пространстве. Тем не менее, именно трёхмерная картинка позволит лучше понять общую линию, которой следует придерживаться далее. На рисунках показано, как параллелепипед, натянутый на три исходных вектора, вписывается в первый октант, как он проектируется на горизонтальную плоскость, в какую призму он заключён, и как выглядит основание этой призмы.

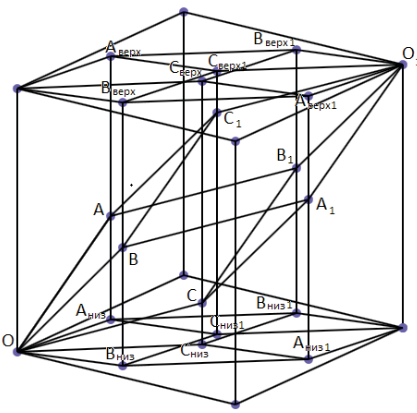


Предварительно очертим наши дальнейшие рассуждения без детализации. Исходный параллелепипед проектируется на горизонтальную плоскость в виде выпуклой оболочки проекции своих вершин. Эта оболочка представляет собой шестиугольник, противоположные стороны, которого параллельны. Исходный параллелепипед заключён в прямую призму, основанием которой как раз и является соответствующий шестиугольник. По этой причине лишние объёмы будут вычитаться не из произведения $(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)(z_1 + z_2 + z_3)$, а из объёма призмы.

Шестиугольное основание призмы является проекцией параллелепипеда на плоскость Oxy. Этот шестиугольник накрыт в два слоя тремя парами параллелограммов, площади которых являются определителями второго порядка, как было доказано выше. Поскольку любая точка на границе и внутри шестиугольника принадлежит в точности двум параллелограммам, площадь шестиугольника равна сумме трёх параллелограммов, натянутых на всевозможные пары векторов $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ и $(x_3; y_3)$. Таким образом, площадь основания призмы равна $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$.

Высота этой призмы равна $(z_1 + z_2 + z_3)$. Теперь можно указать, чему равен объём V, из которого будут вычитаться некоторые лишние объёмы, чтобы вычислить объём параллелепипеда:

$$V = (z_1 + z_2 + z_3)\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right).$$



Далее проводятся рассуждения подобные двумерному случаю, хотя и несколько более сложные. Отметим также, что факт использования результата, полученного для двумерного случая, указывает на необходимость использования индукции.

Рассмотрим детальный чертёж. Свяжем с точками, определяющими параллелепипед следующие координаты: A $(x_1; y_1; z_1)$, B $(x_2; y_2; z_2)$, C $(x_3; y_3; z_3)$.

Трёхгранный угол OABC расположен так, что грань OCA_1B отгораживает от горизонтальной координатной плоскости грани OBC_1A и OCB_1A. Вычесть из объёма исходной призмы нужно три объёма составных прямых призм. Они получаются совмещением равных граней параллелепипеда.

Призма, полученная совмещением граней OCA_1B и OC_1AB_1, имеет объём $V_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}(z_2 + z_3)$. Призма, полученная совмещением граней OBC_1A и OB_1CA_1, имеет объём $V_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}(z_1 + z_2 + 2z_3)$. Призма, полученная совмещением граней OCB_1A и OC_1BA_1, имеет объём $V_2 = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}(z_1 + 2z_2 + z_3)$. Остаётся найти объём параллелепипеда, построенного на исходных векторах. Он равен $V - V_1 - V_2 - V_3$. В результате будет получена формула разложения определителя три на три по одной из строк. Таким образом, получен нужный результат.

Он может послужить для обоснования такого же утверждения в общем случае. Делается индуктивное предположение, что для определителя n–1-го порядка утверждение верно. Для определителя n-го порядка рассматриваем параллелепипед, вписанный в прямую призму с основанием n–1-го порядка. Грани многогранного угла поочерёдно перекрывают друг друга – одна грань ближе, следующая грань дальше от гиперпространства, в котором лежит основание призмы. Далее рассматриваются составные призмы. Призмы, связанные с прилежащими гранями, после вычитания дают положительные слагаемые разложения определителя по строке. Призмы, связанные с удалёнными гранями, после вычитания дают отрицательные слагаемые разложения определителя по строке. Но, конечно, речь идёт об образном объяснении, а не о доказательстве.

9. ИЗУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКИ КАК АКТИВНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

Одним из важнейших показателей качества учебного процесса является уровень активности студентов при выполнении заданий по различным предметам. Поскольку согласно нашим исходным установкам целью учебного процесса является воспитание математика-прикладника, мы должны ориентироваться на задачи прикладного характера. По этой причине нужно хотя бы в общих чертах описать круг подобных задач. При этом мы будем говорить о вещах хорошо известных, но не становящихся от этого менее актуальными.

Перечислим некоторые особенности задач прикладного характера. Прежде всего, такая задача должна быть направлена на освоение каких-либо математических методов, понятий и идей. Постановка же подобной задачи должна иметь характер, который очевидным образом подразумевает практическую значимость получаемого результата. Главной целью использования прикладных задач является демонстрация эффективности математических теорий, применяемых на практике.

Рассмотрим содержательную сторону прикладных задач. В первую очередь речь идёт о задачах, относящихся к области геометрии, физики, вычислительной математики и особенно к задачам, которые направлены на различные формы компьютерной реализации математических методов.

Что касается геометрии и физики, то задачи на соответствующие темы традиционно используются в курсах математического анализа, обыкновенных дифференциальных уравнений и математической физики. Если рассматривать вопросы, связанные с межпредметными связями, то желательно продумать, какой должна быть совокупность соответствующих задач, проходящих через все эти предметы, как единое целое.

Задачи вычислительной математики вынесены в отдельный предмет, но они возникают в курсах общей и линейной алгебры, а также в курсе математического анализа. Здесь имеет место та же ситуация, что и в случае задач, связанных с геометрией и физикой. Речь идёт о рассмотрении целостной совокупности заданий, используемых в различных предметах.

Что же касается связи математических предметов с информационными технологиями, то здесь мы сталкиваемся с необозримым кругом проблем. В частности всю проблематику, связанную с аналитической геометрией, математическим анализом, дифференциальной геометрией и дифференциальными уравнениями можно объединить в комплекс задач компьютерной геометрии. Сюда же можно отнести ряд вопросов геометрического характера из теории функций комплексного переменного.

Значительно более обширным и важным комплексом задач являются вопросы математического моделирования, состыкованные с вопросами компьютерного моделирования. Сюда можно включить практически все математические теории и все способы использования компьютерных технологий. Фактически речь идёт о творческом освоении и взаимном увязывании содержания двух наук – математики и информатики. Сюда же можно отнести вопросы о выборе содержания общих курсов математики и информатики. Однако возникающая при этом проблематика фактически необозрима.

10. ЗАДАЧИ, ЗАТРАГИВАЮЩИЕ МЕЖПРЕДМЕТНЫЕ СВЯЗИ

Наконец, рассмотрим некоторые типы задач, затрагивающих межпредметные связи и их конкретные примеры. Начнём с нашего призыва по возможности доводить до студентов замечательные исторические результаты, полученные в прошлом. Здесь можно усмотреть важный воспитательный момент, который можно трактовать как связь с мировой культурой. Кроме того, отметим следующий момент. Некоторые вопросы, традиционно входившие в прошлые математические курсы, в наше время не могут рассматриваться в силу большого удельного веса и меньшей актуальности, чем у более современных результатов. По этой причине исторические математические задачи можно предлагать студентам для самостоятельного решения. Приведём два примера подобных задач в курсах общей алгебры при изучении алгебры многочленов и математического анализа при изучении дифференциала.

Задание 42. Доказать, что $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

Указание. Обозначить левую часть через x, возвести в куб, получить кубическое уравнение и найти его целые корни.

Задание 43. Найти приближённое значение синуса одного градуса.

Отметим, что эти и другие задачи этого типа должны дополняться интересным и содержательным историко-математическим комментарием.

Следующим типом задач, о которых мы упомянем, являются задачи, направленные на получение известных результатов новыми методами. Это важный способ демонстрации внутренних математических связей. Ограничимся простым примером.

Задание 44. С помощью скалярного произведения векторов вывести формулу косинуса разности.

Указание. Использовать тот факт, что угол между векторами $(\cos\alpha;\sin\alpha)$ и $(\cos\beta;\sin\beta)$ равен $\alpha-\beta$.

Ещё одним типом задач являются задачи, направленные на получение новых результатов известными методами. Также ограничимся одним примером. Эту задачу можно рассмотреть в курсе математического анализа при изучении бесконечных произведений.

Задание 45. С помощью формулы синуса половинного угла получить формулу Виета

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\ldots$$

Указание. Разложить синус в произведение вида $\sin x = 2^n \sin\frac{x}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}$. В пределе перейти к формуле $\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^k}$ и подставить $x = \frac{\pi}{2}$.

Далее рассмотрим задания, которые предлагаются студенту в рамках одного предмета, а формулируются в терминах другого предмета. Например, в курсе общей алгебры можно предложить следующее задание.

Задание 46. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 5x + 6}$.

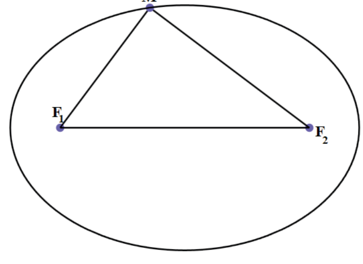
Отметим, что в общем курсе высшей математики есть темы, которые в равной степени принадлежат к двум и более предметам. Ярким примером являются гармонические функции, которые изучаются и в курсе теории функций комплексного переменного и в курсе уравнений в частных производных. Автор статьи вспоминает, как в его студенческие годы один из его однокурсников недоумённо спрашивал у лектора, по какой причине гармонические функции изучаются в рамках двух различных предметов. На это он получил ответ, что наиболее глубокие знания о каком-либо объекте удаётся получить, изучая его с различных точек зрения. Видимо, эту точку зрения желательно донести до студентов даже в том случае, когда сами студенты никаких вопросов по этому поводу не зададут.

Упомянем ещё об одной теме, которая может встречаться в разных предметах, хотя основным местом для её изучения является курс вычислительной математики. Речь идёт о схеме Горнера. О ней часто сообщают в курсе общей алгебры. Можно предположить, что такое раннее упоминание об этом вычислительном алгоритме в целом полезно, поскольку, как известно, повторение – мать учения. К тому же это даёт возможность использовать схему Горнера при изучении рядов Тейлора в курсе математического анализа.

Задание 47. Разработать модифицированную схему Горнера для приближённого вычисления экспоненты с помощью ряда Тейлора. Требование к вычислительной схеме состоит в том, чтобы одновременно с постепенными вычислениями степеней вычислялись и факториалы.

Приведём ещё две задачи аналитической геометрии, связанных с теорией чисел и линейной алгеброй. Первый пример кроме всего прочего даёт возможность студенту понять, как формируются задания с удобными для вычислений данными. При этом используются сведения о диофантовых уравнениях.

Задание 48. Расстояние между фокусами F_1 и F_2 эллипса равно 2c. На эллипсе выбрана точка M, такая, что треугольник F_1MF_2 является прямоугольным (M – вершина прямого угла). Косинус угла MF_1F_2 равен $\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$, где m и n натуральные числа. Получить каноническое уравнение данного эллипса. Для параметров **a** и **b** дать точные значения, выражаемые обыкновенными дробями.



Следующее задание связано с понятием пучка геометрических линий, в простейшем случае речь идёт о прямых. Понятие пучка основывается на понятии линейной зависимости.

Задание 48. Пусть заданы две пересекающиеся в точке А прямые с уравнениями $A_i x + B_i + C_i = 0$, где $i = 1{,}2$. Совокупность прямых с уравнениями $p\left(A_1 x + B_1 y + C_1\right) + q\left(A_2 x + B_2 y + C_2\right) = 0$ образует пучок. Доказать, что все прямые, составляющие пучок, проходят через точку А.

Значительно более содержательные задачи возникают при рассмотрении пучков кривых второго порядка. Работа с пучками помогает взглянуть на понятие линейной зависимости под несколько другим углом.

В рамках математической логики естественным образом можно рассматривать теоремы из других областей математики с точки зрения их логической структуры. Рассмотрим теорему, логическая структура которой имеет вид $A \Rightarrow B$. Тогда обратной теоремой называется теорема с логической структурой вида $B \Rightarrow A$. Противоположной теоремой называется теорема с логической структурой вида $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$. Обратной к противоположной теореме называется теорема с логической структурой вида $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. В качестве исходной теоремы выберем следующую теорему математического анализа:

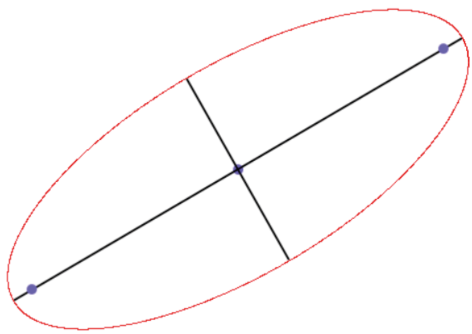
Если дифференцируемая на отрезке функция имеет во внутренней точке отрезка экстремум, то производная функции в точке экстремума равна нулю.

Задание 49. Для указанной теоремы выделить посылку (А) и следствие (В). Сформулировать обратную, противоположную и обратную к противоположной. Выяснить, какие из этих утверждений верны.

Наконец, приведём пример задания, связанного с применением математических знаний при написании программы, строящей изображение геометрического объекта. Отметим, что основные знания, которыми должен обладать студент, пишущий программу, являются именно математическими.

Задание 50. Написать программу, которая строит на экране изображение эллипса, у которого заданы длины полуосей эллипса, а его большая полуось наклонена к горизонтали под заданным углом. Кроме того, требуется выделить фокусы этого эллипса.

Решение. Кроме знания некоторых фактов об эллипсе студенту необходимо построить наклонную систему координат, в которой и будет построен эллипс с помощью параметрических уравнений эллипса и формул для аффинных преобразований плоскости.

‘Начало программы	**‘Продолжение программы**
‘Язык Small Basic *‘Параметры графического экрана в пикселах* GraphicsWindow.Width = 600 GraphicsWindow.Height = 600 pi = Math.Pi *‘Экранные координаты начала координат* x0 = 300 y0 = 300 ed = 250 GraphicsWindow.FillEllipse(x0–5,y0–5,10,10) *‘Угол наклона и длины полуосей в пикселах* ugol = pi/6 a = 250 b = 100 c = Math.SquareRoot(a*a – b*b) *‘Координаты векторов-полуосей эллипса* bp = a*Math.Cos(ugol) bq = -a*Math.Sin(ugol) mp = b*Math.Cos(ugol+pi/2) mq = -b*Math.Sin(ugol+pi/2)	*‘Диаметры эллипса и фокусы* GraphicsWindow.DrawLine(x0-bp,y0-bq,x0+b- p,y0+bq) GraphicsWindow.DrawLine(x0-mp,y0-mq,x- 0+mp,y0+mq) GraphicsWindow.FillEllipse(x0-bp*c/a-5,y0- bq*c/a-5,10,10) GraphicsWindow.FillEllipse(x0+b- p*c/a-5,y0+bq*c/a-5,10,10) *‘Построение эллипса* For u = 0 To 2*pi Step pi/1000 x = x0 + bp*Math.Cos(u) + mp*Math.Sin(u) y = y0 + bq*Math.Cos(u) + mq*Math.Sin(u) GraphicsWindow.SetPixel(x,y,”red”) EndFor 

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье сделана попытка дать обзор ряда вопросов, относящихся к межпредметным связям в общем курсе высшей математики. Автор рассматривает ряд вопросов, имеющих отношение к этой обширной теме.

В первую очередь автор рассматривал ряд тем, которые являются общими для различных разделов математики. Речь идёт о понятиях действительного числа, последовательности и функции. Обсуждается место линейной алгебры в общем курсе высшей математики. Рассмотрены вопросы, связанные с рядами Тейлора и комбинаторикой. Важное место занимает обсуждение тематики, которая относится к различным видам математических преобразований. Особый акцент при этом сделан на геометрические образы, возникающие в данной теме. Важность образного мышления обсуждается в связи с понятием функции от двух и более переменных. Проводится обсуждение вопроса о геометрическом смысле определителя квадратной матрицы как объёма параллелепипеда, построенного на векторах, координатами которых являются строки или столбцы матрицы. В статье приведено большое количество заданий, связанных межпредметными связями в общем курсе высшей математики.

Автор не претендует на сколь-нибудь важные выводы. Тема слишком обширна. Цель автора состояла в том, чтобы привлечь внимание преподавателей математики к обсуждаемой проблеме. Кроме того, автор надеется оказать хотя бы небольшую помощь молодым преподавателям.

Литература

1. *Степанов М.Е.* Некоторые вопросы методики преподавания высшей математики. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. – 2017г.
2. *Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М.* Роль образного мышления в научном мышлении. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. – 2020г., Том 10, № 2.
3. *Степанов М.Е.* Компьютерные технологии как средство приобщения учащегося к математической реальности. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. – 2018г., № 1.
4. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Наука, 1971.
5. *Дьедонне Ж.* Линейная алгебра и элементарная геометрия. М., Наука, 1972.
6. *Хинчин А.Я.* Три жемчужины теории чисел. М., Наука, 1979.
7. *Степанов М.Е.* Метод сложных движений в компьютерной геометрии. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. – Вып. 1, 2011г.
8. *Глазман И.М., Любич Ю.И.*. Конечномерный линейный анализ в задачах. М., Наука, 1969.
9. *Спивак М.* Математический анализ на многообразиях. М., Мир, 1968.
10. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. М., Наука, 1967.
11. *Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М.* Пропедевтика решения экстремальных задач в школьном курсе математики. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. – 2019 г., № 4.

Interdisciplinary Connections in the General Course of Higher Mathematics

Mikhail E. Stepanov*
Moscow state University of Psychology & Education, Moscow, Russia
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4803-8211
e-mail: mestepanov@yandex.ru

The article discusses the methods of teaching higher mathematics, arising at the modern level of education in our country. The author relies on his experience working at the Faculty of Information Technologies of the Moscow State Psychological and Pedagogical University.

Keywords: interdisciplinary relations, higher education, methods of teaching mathematics, elementary mathematics, analytical geometry, mathematical analysis, complex analysis, functional analysis, general algebra, linear algebra, differential equations, equations of mathematical physics, combinatorics, probability theory, number theory, mathematical decision theory, group theory, mathematical logic, discrete mathematics, computational mathematics.

For citation:
Stepanov M.E. Interdisciplinary Connections in the General Course of Higher Mathematics. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2021. Vol. 11, no. 2, pp. 89–123. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2021110206 (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Stepanov M.E. Nekotorye voprosy metodiki prepodavaniya vysshei ma-tematiki. Modelirovanie i analiz dannykh. Nauchnyi zhurnal. – 2017g.
2. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. Rol’ obraznogo myshleniya v nauchnom myshlenii. Modelirovanie i analiz dannykh. Nauchnyi zhurnal. – 2020g., Tom 10, № 2.
3. Stepanov M.E. Komp’yuternye tekhnologii kak sredstvo priobshcheniya uchashchegosya k matematicheskoi real’nosti. Modelirovanie i analiz dan-nykh. Nauchnyi zhurnal. – 2018g., № 1.
4. Arnol’d V.I. Obyknovennye differentsial’nye uravneniya. M., Nauka, 1971.
5. D’edonne Zh. Lineinaya algebra i elementarnaya geometriya. M., Nauka, 1972.
6. Khinchin A. Ya. Tri zhemchuzhiny teorii chisel. M., Nauka, 1979.
7. Stepanov M.E. Metod slozhnykh dvizhenii v komp’yuternoi geometrii. Modelirovanie i analiz dannykh. Nauchnyi zhurnal. – Vyp. 1, 2011g.
8. Glazman I.M., Lyubich Yu. I. Konechnomernyi lineinyi analiz v zadachakh. M., Nauka, 1969.
9. Spivak M. Matematicheskii analiz na mnogoobraziyakh. M., Mir, 1968.
10. Gel’fond A.O. Ischislenie konechnykh raznostei. M., Nauka, 1967.
11. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. Propedevtika resheniya ekstremal’nykh zadach v shkol’nom kurse matematiki. Modelirovanie i analiz dannykh. Nauchnyi zhurnal. –2019g., № 4.

****Mikhail E. Stepanov,*** candidate of pedagogical Sciences, associate Professor, Moscow state University of Psychology & Education, Moscow, Russia, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4803-8211, e-mail: mestepanov@yandex.ru