Моделирование и анализ данных
2020. Том 10. № 4. С. 79–87
DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2020100407
ISSN: 2219-3758 (печатный)
ISSN: 2311-9454 (online)

Modelling and Data Analysis
2020. Vol 10, no. 4, pp. 79–87
DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2020100407
ISSN: 2219-3758 (print)
ISSN: 2311-9454 (online)

УДК 51.7

Проблема адекватности метода анализа иерархий

Романчак В.М.*
Белорусский национальный технический университет,
г. Минск, Республика Беларусь
ORCID: https://orcid.org/ 0000-0001-9687-2919
e-mail: romanchak@bntu.by

Метод анализа иерархий (МАИ) является популярным методом решения многокритериальных задач. Многие исследователи подчеркивают простоту и естественность процедуры субъективного измерения. Но некоторые считают, что МАИ в целом является ошибочным и его нельзя применять на практике. Такой разброс мнений можно объяснить тем, что для МАИ не решена проблема адекватности. В данной работе предлагается модификация метода МАИ. Сформулирована математическая модель количественного измерения, которая содержит встроенный механизм проверки адекватности. Причем сохраняется способ измерения, а алгоритм расчета становится даже проще. Дело в том, что метод анализа иерархий основывается на предположении, что шкала отношений может быть получена посредством парного сравнения с использованием числовых суждений на основе абсолютной шкалы чисел. В качестве обоснования существования шкалы отношений рассматривается психофизический закон Фехнера. Но существует не один, а два психофизических закона. Существование двух психофизических законов является проблемой психофизики. Эта проблема может быть решена методом рейтинга. Чтобы преодолеть недостатки метода анализа иерархий также предлагается использовать метод рейтинга. В этом случае можно использовать фундаментальную шкалу метода МАИ. В качестве примера решается задача с использованием традиционной шкалы МАИ.

Ключевые слова: закон Фехнера, закон Стивенса, метод МАИ, метод анализа иерархий, рейтинг.

Для цитаты:
Романчак В.М. Проблема адекватности метода анализа иерархий // Моделирование и анализ данных. 2020. Том 10. № 4. С. 79–87. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2020100407

****Романчак Василий Михайлович,*** кандидат физико-математических наук, доцент кафедры инженерной математики, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Республика Беларусь, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9687-2919, e-mail: romanchak@bntu.by

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод МАИ [8], [9] привлекает внимание исследователей возможностью построить математическую модель принятия решений [2]. С другой стороны метод не имеет строгого математического обоснования. Поэтому существуют работы, в которых предлагаются различные модификации метода. Альтернативой методу МАИ могут выступать методы теории многофакторной полезности [10], специально созданные методики [3]. Даже сторонники метода согласны с тем, что метод МАИ не свободен от недостатков [11]. Существуют примеры некорректной работы метода МАИ [4]. Но метод МАИ по-прежнему остается популярным. Это связано с тем, что способ измерения в методе МАИ учитывает психологические особенности человека. Цель данной работы предложить модификацию метода МАИ. В этом случае сохраняется способ измерения, а алгоритм расчета становится даже проще. Возможность такой модификации объясняется тем, что фундаментальная числовая шкала метода МАИ соответствует уравнению психофизического закона Фехнера.

В настоящее время в психофизике существуют не один, а два психофизических закона, закон Фехнера и Стивенса. Наличие двух психофизических законов многими рассматривается как проблема. Решение проблемы возможно на основании метода рейтинга [5], [6]. В данной работе метод рейтинга предлагается использовать для получения результатов измерения совместно с методом МАИ. Сформулирована модель количественного измерения. Появляется возможность проверить адекватность результатов измерений и уменьшить объем экспериментальной работы. Причем для специалиста, знакомого с методом МАИ, все сводится к небольшим изменениям в схеме расчета. Для иллюстрации рассматривается пример оценки альтернатив, который ранее решался методом МАИ.

2. МОДЕЛЬ КОЛИЧЕСТВЕННОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Для измеряемых объектов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ сформулируем определение количественного измерения. Считаем, что результат измерения имеет двойственную природу. С одной стороны, результат измерения получают экспериментальным сравнением пары объектов (ω_i, ω_j) по величины. С другой стороны, р*езультат измерения* равен разности значений: $u_i - u_j$, или отношению значений: v_i / v_j. Поэтому можно говорить о двух *способах* количественного измерения.

Пример 1. Пусть значения массы объектов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$ изменяются так, что отношение значений массы двух последовательных объектов равно двум: $v_{i+1} / v_i = 2$, v_i – значение массы объекта, $i = 1, 2, \ldots, 5$. Результат измерения первым способом находим по формуле $u_i - u_j = i - j$. Для измерения вторым способом используем заданные в условии отношения. Тогда получаем выражения $v_i / v_j = 2^i / 2^j$, где $i, j = 1, 2, \ldots, 6$. На основании результатов измерения значения u_i можно определить с точностью до произвольной аддитивной постоянной, а значения v_i – с точностью до произвольной мультипликативной постоянной.

Для частных значений величины в табл. 1 существует отображение $u_i = \ln(v_i) / \lambda$, где $\lambda = \ln(2)$, которое устанавливает взаимно однозначное соответствие между значениями. Кроме того, отображение преобразует отношение значений v_i / v_j в разность значений $u_i - u_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, 6$:

$$\lambda\ (u_i - u_j) = \ln(v_i / v_j). \tag{1}$$

Таблица 1

Значения, полученные двумя способами

u_i	1	2	3	4	5	6
v_i	2	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6

Отображение $u = \ln(v) / 1$ является изоморфизмом множества положительных действительных чисел с операцией деление на множество действительных чисел с операцией вычитание. С точки зрения алгебры изоморфные структуры можно не различать, они эквивалентны [1]. Равенство (3) означает, что изоморфизм преобразует одни результаты измерения в другие. Такие результаты измерения будем называть эквивалентными.

Результаты измерения рассматриваемые в Примере 1 эквивалентны, так как выполняется равенство (1). Из примера следует, что измерения можно производить как субъективными, так и объективными методам. Зная отношение значений: v_i / v_j, можно рассчитать разность значений: $u_i - u_j$, и наоборот.

Отношению значений: u_i / u_j, и разности значений: $v_i - v_j$, можно придать физический смысл. Но отношения значений: u_i / u_j, и разности значений $v_i - v_j$, лишены физического смысла и в математической модели рейтинга не определены. Закону Фехнера соответствует разности значений [7]. Поэтому возникают сомнения в целесообразности использовать в методе МАИ отношения значений.

Определение. Равенство (1) заменим двумя выражениями

$$R_{ij} = \lambda(u_i - u_j), \tag{2}$$

$$R_{ij} = \ln(v_i / v_j), \tag{3}$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, n$, λ – постоянная масштаба. Отображения (4) и (5) будем называть *рейтингом*.

В зависимости от способа измерения рейтинг можно определить по формулам (2) или (3). Значения рейтинга не зависят от способа измерения. Это означает, что рейтинг есть величина, которая инвариантна к способу измерения. Подчеркнем, что определение рейтинга не сводится к замене переменных, а опирается на такое фундаментальное понятие алгебры как изоморфизм. Экспериментальным подтверждением существования двух способов измерения (4) и (5) являются психофизические законы Фехнера и Стивенса [7]. Рейтинг можно использовать для определения функции $u(x)$ на множестве X.

Пусть для отображения $R(x, x_0)$ существует функция $u(x)$ для которой выполняется равенство

$$u(x) - u(x_0) = \lambda R(x, x_0), \tag{4}$$

для всех $x \in X$, $x_0 \in X$, λ – постоянная, $\lambda > 0$. Тогда отображение $R(x, x_0)$ также будем называть рейтингом. Определение (4) обобщается на случай произвольного количества аргументов. Пусть существует функция $u(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$, для которой выполняется обобщенное равенство (4). Зафиксируем произвольную точку (x_0, y_0).

Определение. Множества X и Y взаимно независимы относительно результатов измерения, если выполняются равенства

$$u(x, y) - u(x_0, y) = \lambda R_1(x), \tag{5}$$

$$u(x, y) - u(x, y_0) = \lambda R_2(y), \tag{6}$$

здесь $R_1(x)$, $R_2(x)$ – частные значения рейтинга. Тогда из равенств (5) и (6) следует аддитивное представление функции

$$u(x, y) = \lambda(R_1(x) + R_2(y)) + u(x_0, y_0) \tag{7}$$

λ – постоянная масштаба. Аналогичным образом можно получить мультипликативное представление функции, если использовать определение рейтинга (3) и сформулировать определение независимости для отношения значений функции, используя формулы, аналогичные (5), (6).

3. ПРИМЕР КОЛИЧЕСТВЕННОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Проведем анализа данных модифицированным методом МАИ, используя пример из монографии [8]. Измерения, полученные методом МАИ, соответствуют закону Фехнера. Поэтому значения, полученные в методе МАИ будем вычитать, а не делить.

Пример. Существует три альтернативных способа распределение электроэнергии между тремя потребителями C_1, C_2, C_2. Кроме того выявлено три основных фактора (критерия), влияющих на благоприятное социальное и политическое положение: x – экономика, y – экология, y – безопасность. Матрица парных сравнений метода МАИ [8] представлена в таблице 2.

Таблица 2

Матрица парных сравнений

x / y	***x***	***y***	***z***
x	1	5	3
y	1/5	1	3/5
z	1/3	5/3	1

Заменим в этой матрице отношения на разности. Например, если в матрице парных сравнений табл. 1 стоит число 3, заменим его разностью 3–1. Аналогично, если стоит отношение 1/5 – заменим его на разность 1–5. В итоге получим результаты измерения (таблица 3).

Таблица 3

Результаты измерения (разности значений)

U	***x***	***y***	***z***
x	0	4	2
y	-4	0	-2
z	-2	2	0

Пусть значения функции $U(x, y, z)$ являются численной характеристикой состояния государства. Считаем, что факторы x, y, z взаимно независимы. По аналогии с представление (7) выберем аддитивную модель значений величины в виде

$$U(x, y, z) - U(0, 0, 0) = k_1x + k_2y + k_3z \tag{8}$$

где k_1, k_2, k_3 – постоянные коэффициенты, x, y, z – переменные (факторы), $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$. Вектор (x, y, z) численно характеризует экономику (x), экологию (y) и безопасность (z) . Вектор (0, 0, 0) соответствует наименее благоприятному, а вектор (1, 1, 1) – наиболее благоприятному состоянию экономики.

Теперь можно преобразовать некоторые вербальные оценки в математические формулы. Например, естественно определить влияние первого фактора как разность значений $U(1, 0, 0) - U(0, 0, 0)$. Совместное влияния первого и второго фактора находим по формуле $U(1, 1, 0) - U(0, 0, 0)$. Выражение $U(1, 0, 0) - U(0, 1, 0)$ характеризует на сколько первый фактор превосходит второй. Далее с помощью таблицы 3 находим коэффициенты модели (8).

Из таблицы 3 следует, что влияние первого фактора превосходит влияние второго на 4 единицы. Следовательно, выполняется уравнение $k_1 - k_2 = 4$. Аналогично получаем равенство $k_3 - k_2 = 2$. Все остальные уравнения, которые можно получить из таблицы 3, являются следствие этих двух уравнений. Столбцы таблицы 3 соответствуют различным планам эксперимента. Следовательно результаты расчетов, выполненные по разным планам эксперимента, совпадают. Такое совпадение вряд ли является случайным. Поэтому считаем, что результаты измерения адекватны. Для нахождения неизвестных коэффициентов k_1, k_2, k_3 данных таблицы 3 недостаточно. Необходима дополнительная информация. Например, эксперт может считать, что совместное влияния первого и второго фактора является сильным. Тогда с помощью фундаментальной шкалы МАИ [8] получим недостающее третье уравнение $k_2 + k_1 = 6$. В этом случае значения коэффициентов $k_1 = 5$, $k_2 =1$, $k_3 = 3$. Так как вектор коэффициентов определен с точностью до постоянной масштаба, то удобно перейти к нормализованному вектору (0,56; 0,11; 0,33). У нормализованного вектора сумма коэффициентов равняется единица. Для сравнения вектор приоритетов МАИ в данной задаче имеет вид (0,65; 0,13; 0,22).

Определяем зависимость фактора x от способа распределения C_i. Это означает, что необходимо найти численные значения $x_i = x(C_i)$. Тогда разность значений $x_\mathrm{i} - x_j$ характеризует в какой мере экономика с распределением C_i, превосходит экономику с распределением C_j. Если преобразовать матрицу парных сравнений из рассматриваемого примера [8], получим таблицу 4.

Таблица 4

Результаты измерений

$x_i – x_j$	C_1	C_2	C_3
C_1	0	2	4
C_2	-2	0	1
C_3	-4	-1	0

Чтобы исключить грубые ошибки удобно использовать стандартные статистические методы. Коэффициенты корреляции $\rho(C_1, C_2) = 0{,}982$, $\rho(C_1, C_3) = 0{,}961$, $\rho(C_2, C_3) = 0{,}996$ незначимы. Найдем вектор средних значений C, используя только второй и третий столбец таблицы 4. Коэффициент корреляции для этих двух столбцов наибольший. Столбцы C_2, C_3 таблицы 5 получены из столбцов таблицы 4 путем вычитания наименьшего элемента каждого столбца.

Таблица 5

Оценка влияния на экономику

C_2	C_3	C	x
3	4	3,5	1
1	1	1	0,286
0	0	0	0

Коэффициенты корреляции $\rho(C, C_2) = 0{,}999$, $\rho(C, C_1) = 0{,}999$ близки к единицы и значимы. Поэтому считаем, что вектор средних значений C соответствует результатам измерения. Нормализованные значения вектора x находятся в последнем столбце таблицы. Если теперь найти средние значения C, используя три столбца таблицы 5, то значимым будет только коэффициент $\rho(C, C_2)$. Поэтому делаем вывод, что первый столбец содержит грубые ошибки, а второй и третий столбец адекватны количественной модели измерений. Аналогично определяем значения $y_i = y(C_i)$ и $z_i = z(C_i)$, $y = (1; 0{,}818; 0)$ и z = (1; 0,5; 0). Теперь, используя линейную модель (8), оцениваем влияние альтернатив C_1, C_2, C_3. Если выбрать значение $U(0, 0, 0) = 0$, то выполняются равенства $U(1, 1, 1) = 1$, $U(x_2, y_2, z_2) = 0{,}42$. Оценки альтернатив определены с точностью до линейного преобразования. Чтобы сопоставить с методом МАИ в таблице 6 оценки приведены к общему интервалу [0,12; 0,62].

Таблица 6

Оценка альтернатив

	C_1	C_2	C_3
Теория рейтингов	0,62	0,33	0,12
Метод МАИ	0,62	0,26	0,12

Из анализа таблицы 6 следует, что разница между оценками альтернатив C_2 и C_3 меньше, чем между оценками альтернатив C_1 и $C_{2.}$ Причем, в отличии от метода МАИ, у нас есть основания так считать.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В тех случаях, когда необходим простой способ оценки альтернатив, можно комбинировать метод МАИ и метод рейтинга. Метод рейтинга, в отличие от метода МАИ, является аксиоматическим. Для проверки соответствия результатов измерения модели рейтинга можно применять различные критерия. Из разобранного примера следует, что для количественной оценки альтернатив, достаточно частично определить матрицу парных сравнений. Предлагаемый алгоритм не сложнее метода МАИ.

Литература

1. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. М.: Физматлит, 1973. 400 с.
2. *Осипова В.А., Дубинина К.С.* Применение алгоритмов теории графов к упрощенному методу анализа иерархий // Моделирование и анализ данных. 2019. Том 9. № 3. С. 24–31.
3. *Подиновский В.В.* Количественная важность критериев // Автоматика и телемеханика. 2000. № 5. С. 110–123.
4. *Подиновский В.В., Подиновская О.В*. О некорректности метода иерархий // Проблемы управления. 2011. № 1. С. 8–13.
5. *Романчак В.М.* Измерение нефизической величины // Системный анализ и прикладная информатика. 2017. № 4. С. 39–44.
6. *Романчак В.М. С*убъективное оценивание вероятности // Информатика. 2018. Том.15. № 2. С. 74–82.
7. *Романчак В.М.* Субъективные измерения (теория рейтингов). // Журнал Белорусского государственного университета. Философия. Психология. 2020. № 3. С. 87–98.
8. *Саати Т.Л.* Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т.Л. Саати. Москва: Радио и связь, 1989. 316 с.
9. *Саати Т.Л.* Относительное измерение и его обобщение в принятии решений. Почему парные сравнения являются ключевыми в математике для измерения неосязаемых факторов // Журнал «Cloud Of Science». 2016. Т. 3. № 2. [Электронный ресурс] URL: https://cloudofscience.ru/sites/ default/ files/ pdf/CoS_3_171.pdf. (дата обращения: 17.12.2019).
10. *Dyer J.S.* Remarks on the analytic hierarchy process // Management science. 1990. V. 36. № 6. Pp. 249–258.
11. *Whitaker R.* Criticisms of the analytic hierarchy process: why they often make no sense // Mathematical and Computer Modelling. 2007. Vol. 46. P. 948–961.

The Problem of Adequacy of the Analytic Hierarchy Process

Vasily M. Romanchuk*
Belarusian national technical University, Minsk, Belarus
ORCID: https://orcid.org/ 0000-0001-9687-2919
e-mail: romanchak@bntu.by

The Analytic hierarchy process (AHP) is a popular method for solving multi-criteria problems. However, the problem of the adequacy of the AHP method is not solved. Opponents of the Analytic hierarchy process believe that the AHP as a whole is erroneous and cannot be applied in practice. Proponents of the method believe that the disadvantages of the method are compensated by a simple measurement procedure. In this paper, a modification of the AHP method is proposed. A mathematical model of measurement is formulated, which contains a built-in mechanism for checking adequacy. moreover, the measurement method is preserved, and the calculation algorithm becomes even simpler. The fact is that the Analytic hierarchy process is based on the assumption that the scale of relations can be obtained by pairwise comparison using numerical judgments based on the absolute scale of numbers. Fechner's psychophysical law is considered as a justification for the existence of the scale of relations. But there are not one, but two psychophysical laws. The existence of two psychophysical laws is a problem of psychophysics. This problem can be solved by the rating method. To overcome the disadvantages of the Analytic hierarchy process, it is also proposed to use the rating method. The use of the rating method makes it possible to use the fundamental scale of the AHP method. As an example, the problem is solved using the traditional AHP scale.

Keywords: Fechner's law, Stevens' law, MAI method, hierarchy analysis method, rating.

For citation:
Romanchuk V.M. The Problem of Adequacy of the Analytic Hierarchy Process. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2020. Vol. 10, no.4, pp. 79–87. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2020100407 (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Kurosh, A.G. Lekcii po obshhej algebre. [Lectures on General algebra], Moscow: Fizmatlit, 1973. 400 p.
2. Osipova, V.A., Dubinina K.S. Application of graph theory algorithms to the simplified method of hierarchy analysis// Modeling and data analysis. 2019. Vol. 9, no 3. P. 24–31.
3. Podinovskii, V.V. Quantitative Importance of Criteria // Automation and Remote Control. 2000. Vol. 61, no. 5. Part 2. – P. 817–828.

***Vasily M. Romanchuk,** PhD in Phys. – Matt., Associate professor, Chair of "Engineering mathematics", Belarusian national technical University, Minsk, Belarus, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9687-2919, e-mail: romanchak@bntu.by

4. Podinovski V.V., Podinovskaya O.V. O nekorrektnosti metoda analiza ierarkhiy. *Problemy upravleniya,* 2011, No.1, pp. 8–13.
5. Romancak, V.M. (2017). Measurement of non-physical quantity. System analysis and applied Informatics, 4, 39–44. (In Russ., abstr. in Engl.).
6. Romancak V.M. (2018). Subjective estimation of probability. Informatics, 15(2), 74–82. (In Russ., abstr. in Engl.).
7. Romanchak, V.M. (2020). Subjective measurements (rating theory). Journal of the Belarusian State University. Philosophy and Psychology, 3, 87–98.
8. Saaty, Th. L. Prinyatie resheniy. Metod analiza ierarkhiy [Decision making. Analytic hierarchy process]. Moscow, Radio and communication, 1989. 316 p
9. Saaty, Th. L. Relative Measurement and Its Generalization in Decision Making: Why Pairwise Comparisons are Central in Mathematics for the Measurement of Intangible Factors – The Analytic Hierarchy/Network Process. URL: http://www.rac.es/ficheros/doc/00576.PDF (accessed: 17.12.2020).
10. Dyer, J.S. Remarks on the analytic hierarchy process // Management science. 1990. V. 36. № 6. Pp. 249–258.
11. Whitaker, R. Criticisms of the analytic hierarchy process: why they often make no sense // Mathematical and Computer Modelling. 2007. Vol. 46. P. 948–961.