Моделирование и анализ данных
2020. Том 10. № 2. С. 5–24
DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2020100201
ISSN: 2219-3758 (печатный)
ISSN: 2311-9454 (online)

Modelling and Data Analysis
2020. Vol 10. no. 2. pp. 5–24
DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2020100201
ISSN: 2219-3758 (print)
ISSN: 2311-9454 (online)

УДК 001.891.573

Оптимальное управление в математической модели военного подчинительного взаимодействия двух государств

Захаров В.К.*
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова (МГУ им. Ломоносова),
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: https://orcid.org/0000–0002–5492–7317
e-mail: zakharov_valeriy@list.ru

Давыдов А.В.**
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова (МГУ им. Ломоносова),
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: https://orcid.org/0000–0003–4949–4171
e-mail: esse101@yandex.ru

На основе созданной ранее первым автором оптимизационной математической модели военного подчинительного взаимодействия двух государств решается задача нахождения оптимального управления в простейшем классе постоянных управлений.

Ключевые слова: оптимизационная математическая модель государства, оптимизационная математическая модель военного нападательного взаимодействия двух государств, целевой функционал, оптимальное решение.

Для цитаты:
Захаров В.К., Давыдов А.В. Оптимальное управление в математической модели военного подчинительного взаимодействия двух государств // Моделирование и анализ данных. 2020. Том 10. № 2. С. 5–24. DOI:10.17759/ mda.2020100201

****Захаров Валерий Константинович,*** д.ф.-м.н., профессор кафедры математического анализа Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация. Автор научных публикаций по концептуальным и математическим моделям государства и его учреждений. Лауреат Ломоносовской премии. ORCID: https://orcid.org/0000–0002–5492–7317, e-mail: zakharov_valeriy@list.ru

*****Давыдов Александр Вадимович,*** аспирант кафедры математического анализа Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация, ORCID: https://orcid.org/0000–0003–4949–4171, e-mail: esse101@yandex.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к созданию математической модели войны возник у первого автора после выхода в свет известной книги [1] под редакцией академика Н.Н. Моисеева, посвящённой **имитационному** моделированию Пелопонесской войны.

Однако для создания **общей оптимизационной** модели войны между государствами потребовалось сначала создать *общую математическую оптимизационную модель государства в широком смысле* (*т.е. как государства-страны*). Такая модель была построена и развита автором в статьях [2, 4, 5] и книгах [3, С. 153–168], [6, С. 330–353], [7, С. 393–399]. Математическое исследование этой модели на существование оптимального управления было проведено Кузенковым О.А. в статьях [2, 4, 5].

Продвижение же к построению на этой основе *общей математической оптимизационной модели взаимодействия нескольких государств* наступило только в 2019 году, когда удалось математически формализовать ***мирное и военное подчинительные взаимодействия двух государств*** [8–13]. Именно эти виды взаимодействия оказались наиболее заметными в истории 20 и 21 веков.

Цель и мирного, и военного подчинительного взаимодействия одна и та же. Это − **достижение наибольшего расхождения** совокупных достояний взаимодействующих государств к концу некоторого промежутка времени **в пользу одного из них**. Однако способы управления при этих взаимодействиях могут качественно отличаться друг от друга.

В первой части статьи излагаются все подготовительные сведения, необходимые для математической формализации деятельности государства. На основе этого во второй части статьи описывается математическая модель **военного нападательного** взаимодействия двух государств при одностороннем управлении со стороны **нападающего государства,** оптимально-подчинительного **в его пользу**. Для этой модели решается задача нахождения оптимального управления в простейшем классе постоянных управлений. Приводятся графики полученных решений для двух разных числовых сценариев.

2. ОПТИМИЗАЦИОННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОДНОГО ГОСУДАРСТВА

Для того, чтобы сделать статью замкнутой в себе, приведём основные сведения из статей [2, 4, 5].

УСТРОЙСТВО И ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ГОСУДАРСТВА

Каждое государство ***является сложным трёхуровневым системным обществом***, устроенным в виде совокупности ***основных*** **(*под*)*систем***, связанных друг с другом в единую систему и зависящих друг от друга так, что без каждой из этих систем государство существовать не может. **Основными системами государства** являются: *содержательная, учётная, обеспечительная, совокупная распорядительная* и *верховная системы*.

Содержательная система C осуществляет *метааграрный* (*добывающий*), *индустриальный* (*производящий*) и *сервисный* (*обслуживающий*) *способы жизнедеятельности*. ***Обеспечительная система D*** обеспечивает порядок, охрану, законность, нравственность и пр. ***Учётная система E*** осуществляет производство, сбор, хранение и раздачу денег, статистических сведений и т.п. ***Распорядительные системы F***, ***G*** и ***H*** ведают (управляют) деятельностью содержательной, учётной и обеспечительной систем, соответственно. Поэтому их можно именовать ***содержательно-распорядительной***, ***обеспечительно-распорядительной*** и ***учётно-распорядительной системами***, соответственно. Они образуют ***совокупную распорядительную систему***. ***Верховная*** (***управляющая***) ***система P*** управляет деятельностью совокупной распорядительной системы.

Государство является открытой системой с тремя частями бытийной среды, называемыми *природной средой* A_1, *зарубежной надприродной средой* A_2 и *своей теневой средой* A_3. Они обобщённо именуются *средами государства*.

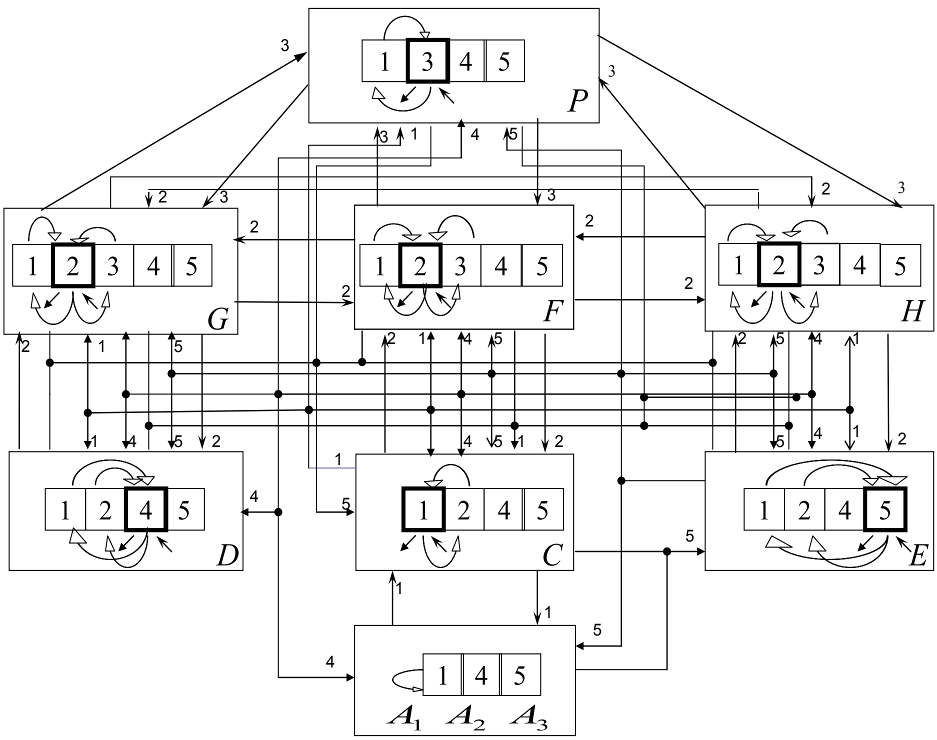

Рис. 1. Схема систем, достояний и потоков государства

Любая мысленно отмеченная часть государства и его внутренней природной среды называется ***достоянием государства***. Используемые государством и производимые им достояния (и в частности, состояния) располагаются в **учреждениях** государства и в его средах. Все эти достояния подразделяются на следующие **виды**:

содержательное (код 1), *распорядительное* (код 2), *верховное* (код 3), *обеспечительное* (код 4), *учётное* (код 5). Объединения этих достояний по всем учреждениям основной системы дают *достояния основной системы*, а объединения по всем учреждениям государства дают *достояния государства*. Объединение всех достояний государства по всем видам достояний даёт *совокупное достояние государства*.

Каждая основная система производит достояние **своего вида**. При производстве соответствующего достояния каждая система использует некоторые из имеющихся в ней достояний. Все основные системы связаны между собой потоками производимых достояний. Содержательная, учётная и обеспечительная системы получают из сред государства и отдают в эти среды соответствующие достояния.

Изображение основных систем государства и имеющихся в нём достояний и потоков дано ниже на рисунке 1.

Понятие реальной стоимости надприродных достояний

Далее рассматриваются достояния единиц и систем государства на основном закреплённом промежутке времени $[t_0, T]$.

Достояние в государстве будем называть *надприродным на промежутке времени* $[t_0, T]$, если оно является либо произведённым в государстве, либо изведённым в государстве, либо пришедшим в государство из его сред A_1, A_2 и A_3, либо ушедшим из государстве в эти среды, либо переданным в государстве, либо преобразованным в государстве на этом временном промежутке.

Определение реальной стоимости надприродных достояний даётся в алгоритмической форме, т.е. разбивается на ряд шагов, последовательное применение которых приводит к определению реальной стоимости всё более широкого круга надприродных достояний.

В качестве исходных пунктов принимаются следующие положения.

Реальная стоимость (внутри) государственных денег полностью задаётся их номиналом.

Будем также считать, что *реальная стоимость содержательного достояния до его прихода в содержательную систему из сред A_1 и A_2 на указанном промежутке времени*, задаётся напрямую верховной и распорядительной системами как количество денег, сопоставленных этими системами этому достоянию на этом временном промежутке посредством налогов, тарифов, валютных обменных курсов и пр.

Наконец, будем считать, что *реальная стоимость изнашивающегося или устаревающего достояния на указанном промежутке времени* определяется, исходя из его первоначальной реальной стоимости по правилам, установленным верховной и распорядительной системами.

Далее алгоритм определения реальной стоимости остальных надприродных достояний выстраивается следующим образом.

Совокупность всех единиц государства назовём *внутренней государственной средой*. Более широкую совокупность, полученную присоединением к внутренней государственной среде внешних единиц A_1, A_2 и A_3, назовём *полной государственной средой*. Ещё более широкую совокупность, полученную присоединением к полной государственной среде *мнимой единицы* ∞, назовём *расширенной государственной средой*. Использование этих дополнительных единиц позволяет ввести понятие реальной стоимости единым образом, охватывающим все необходимые случаи.

Из рассмотрения всех перечисленных выше случаев «движения» надприродных достояний на промежутке времени T следует, что при этом происходит либо перемещение достояния из одной единицы расширенной государственной среды в другую единицу расширенной государственной среды (где в качестве единиц могут выступать единицы государства, внешние единицы A_1, A_2 и A_3, а также мнимая единица ∞), либо преобразование достояния из одного вида в другой вид внутри одной государственной единицы. Эти виды «движения» достояний существенно отличаются друг от друга тем, что перемещение неразрывно связано с денежным сопровождением, а преобразование не связано с ним□, поскольку лишь сопутствует перемещению. Поэтому правомерно принять следующие определения.

Реальная стоимость в момент t достояния X, перемещённого из одной единицы расширенной государственной среды u в другую единицу расширенной государственной среды v до момента t, равняется сумме из четырёх слагаемых (некоторые из которых могут в частных случаях отсутствовать):

1) реальная стоимость достояния X в некоторый момент времени до момента перемещения достояния X в единицу v (если эта стоимость могла быть установлена независимо от возможного будущего перемещения),
2) **плюс** количество не заёмных государственных денег, пришедших в единицу u из всех (отличных от u и v) единиц w полной государственной среды за время до момента t для того, чтобы достояние X до момента t оказалось в единице v (слагаемое отсутствует при $v=\infty$),
3) **минус** количество государственных денег, ушедших из единицы u во все (отличные от u) единицы w расширенной государственной среды за время до момента t для того, чтобы достояние X до момента t оказалось в единице v (слагаемое отсутствует при $v=\infty$),
4) **плюс** количество государственных денег, ушедших из единицы v во все (отличные от v) единицы w расширенной государственной среды за время до момента t для того, чтобы достояние X до момента t оказалось в единице v.

Отметим, что если u или v являются мнимыми единицами, то перемещение достояния тоже является *мнимым*.

Реальная стоимость в момент t достояния X, преобразованного (переведённого) до момента t из одного вида в другой вид внутри единицы u после перемещения достояния X в единицу u, равняется реальной стоимости в момент t достояния X, перемещённого в единицу u.

Реальная стоимость в момент t достояния X, преобразованного (переведённого) из одного вида в другой вид внутри единицы u для последующего перемещения достояния X из единицы u до момента t, равняется реальной стоимости в момент t достояния X, перемещённого из единицы u.

Подводя итог, можно сказать, что реальная стоимость есть денежная мера значимости надприродных достояний для всех единиц государства.

Общее определение оценённых достояний и потоков достояний на основе реальной стоимости

Совокупность (**вмещение**) всех конкретных (надприродных) достояний X вида m в системе M в момент времени t обозначим через $V_M^m(t)$, а совокупность всех конкретных достояний всех видов m=1,2,3,4,5 во всех системах $M=C,D,E,F,G,H,P$ обозначим через $V(t)$. Рассмотрим *полную совокупность* $V(T)$ всех конкретных достояний X, принадлежащих всем совокупностям $V(t)$ для всех t из основного промежутка $[t_0,T]$.

Вмещение $V_M^m(t)$ системы M является ***булевским*** в том смысле, что с достояниями системы M вида m можно совершать действия, относительно которых совокупность $V_M^m(t)$ является булевой решёткой с операциями объединения, пересечения и относительного дополнения для членов вмещения.

Пусть $c_M^m(t)X$ обозначает реальную стоимость конкретного достояния X из вмещения $V_M^m(t)$ в момент времени t. Общее ***реально-стоимостное оценивание*** $c_M^m(t)$ на булевском вмещении $V_M^m(t)$ является ***булевским*** в том смысле, что оно представляет собой вещественно-числовую ограниченную и конечно аддитивную функцию относительно указанных операций. Коллекцию $c_M^m = (c_M^m(t): V_M^m(t) \to R \mid t \in [t_0, T])$ таких оцениваний для всех моментов времени t из промежутка $[t_0,T]$ будем называть *булевским оцениванием вмещений вида m системы M на промежутке времени* $[t_0,T]$.

Число $W_M^m(t)$, равное супремуму чисел $c_M^m(t)X$ по всем конкретным достояниям X из совокупности $V_M^m(t)$, назовём *оценённым совокупным достоянием вида m системы M в момент времени t*.

Совокупность $R_{MN}^{mn}(t-\Delta t, t+\Delta t)$, состоящую из всех конкретных достояний X из полной совокупности $V(T)$, таких, что X входит в совокупность $V_M^m(t-\Delta t)$, и X не входит в совокупность $V_N^n(t-\Delta t)$, и X не входит в совокупность $V_M^m(t+\Delta t)$, и X входит в совокупность $V_N^n(t+\Delta t)$, назовём *потоком на промежутке времени от* $t-\Delta t$ *до* $t+\Delta t$ *из совокупности конкретных достояний вида m системы M в совокупность конкретных достояний вида n системы N*.

Выделим особенный мысленный предмет ∞, называемый *мнимой средой*. Будем предполагать, что мнимая среда ∞ содержит любые достояния в любой момент времени. Для того чтобы избежать использования петлеобразных потоков, мы будем использовать мнимую среду ∞. Это даёт возможность вместо одного петлеобразного потока, который одновременно является и **выходящим** из данной системы, и **входящим** в эту систему (что составляет непреодолимое препятствие при составлении эволюционных уравнений для данной системы (см. далее)), рассмотреть два (*мнимо*) *передаточных потока*: *изводный поток* $R_{M\infty}^{mm}(t-\Delta t, t+\Delta t)$ и *производный поток* $R_{\infty M}^{mm}(t-\Delta t, t+\Delta t)$. Это позволяет изведение и произведение достояний в системе рассматривать как частные виды передачи достояний между разными системами.

Оценивания c_M^m и c_N^n являются ***согласованными для любого передаточного потока*** $R_{MN}^{mn}(t-\Delta t, t+\Delta t)$ в том смысле, что для любого достояний X такого, что X входит в совокупность $V_M^m(t-\Delta t)$ и входит в совокупность $V_N^n(t+\Delta t)$, выполнено равенство $c_M^m(t-\Delta t)X = c_N^n(t+\Delta t)X$. Будем считать, что мнимые оценивания для мнимо передаточных (изводных и производных) потоков всегда являются согласованными.

Поэтому мы можем рассмотреть число $S_{MN}^{mn}(t-\Delta t, t+\Delta t)$, равное супремуму чисел $c_M^m(t-\Delta t)X = c_N^n(t+\Delta t)X$ по всем конкретным достояниям X из потока $R_{MN}^{mn}(t-\Delta t, t+\Delta t)$. Назовём его *оценённым потоком на промежутке времени от* $t-\Delta t$ *до* $t+\Delta t$ *из вмещения вида m системы M во вмещение вида n системы N*. Подобным образом определяются *оценённые потоки* $S_{M\infty}^{mm}(t-\Delta t, t+\Delta t)$ и $S_{\infty M}^{mm}(t-\Delta t, t+\Delta t)$.

Число $S_{MN}^{mn}(t) = \lim(S_{MN}^{mn}(t-\Delta t, t+\Delta t)/2\Delta t \mid \Delta t \to 0)$, равное пределу при Δt, стремящемся к нулю, от оценённого промежуткового потока $S_{MN}^{mn}(t-\Delta t, t+\Delta t)$, делённого на число $2\Delta t$, назовём *оценённым потоком в момент времени t из совокупности конкретных достояний вида m системы M в совокупность конкретных достояний вида n системы N*. Подобным образом определяются *оценённый изводный поток* $S_{M\infty}^{mm}(t)$ и *оценённый производный поток* $S_{\infty M}^{mm}(t)$.

Далее слова «совокупный» и «оценённый» и указание на момент времени *t* будем в основном опускать.

Напомним, что число $\dot{W}_M^m(t) = \lim((W_M^m(t+\Delta t) - W_M^m(t-\Delta t)\ /2\Delta t \mid \Delta t \to 0)$, равное пределу при Δt, стремящемся к нулю, от разности $W_M^m(t+\Delta t) - W_M^m(t-\Delta t)$ (оценённых) совокупных достояний в моменты времени $t-\Delta t$ и $t+\Delta t$, делённой на число $2\Delta t$, называется *скоростью изменения* (*оценённого*) *совокупного достояния вида m системы M в момент времени t*.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГОСУДАРСТВА

Поток $S_{LM}^{lm}(t)$ назовём *входящим в систему M*, поток $S_{MN}^{mn}(t)$ назовём *выходящим из системы M*, а потоки $S_{MM}^{lm}(t)$ и $S_{MM}^{mn}(t)$ назовём *преобразовательными* (они являются и входящими, и выходящими одновременно).

Система эволюционных уравнений государства составляется по следующему ***принципу сохранения***: скорость изменения оценённого совокупного вмещения какого-либо вида в какой-либо основной системе в момент времени *t* равна сумме всех входящих оценённых потоков этого вмещения в эту систему в момент времени *t* минус сумма всех выходящих оценённых потоков этого вмещения из этой системы в момент времени *t*.

В указанных выше публикациях автора математическая модель государства *S* была описана посредством следующей ***упрощённой системы уравнений государства при базисном использовании ссудного дохода***:

1) $$\dot{W}_C^1 = L_{EC}^{55} - (p_1 B_{ED}^{55} + p_2 B_{EE}^{55} + p_3 B_{EF}^{55} + p_4 B_{EG}^{55} + p_5 B_{EH}^{55} + p_6 B_{EP}^{55}) - e_0 W_C^1,$$

где
$$L_{EC}^{55} = aW_C^1(K - W_C^1)/(c + dr + (B_{EC_b}^{55} + B_{ED}^{55} + B_{EE}^{55} + B_{EF}^{55} + B_{EG}^{55} + B_{EH}^{55} + B_{EP}^{55})).$$

2) $$\dot{W}_D^4 = B_{ED}^{55} - e_1 W_D^4$$

3) $$\dot{W}_E^5 = B_{EE}^{55} - e_2 W_E^5$$

4) $\dot{W}_F^2 = B_{EF}^{55} - e_3 W_F^2$

5) $\dot{W}_G^2 = B_{EG}^{55} - e_4 W_G^2$

6) $\dot{W}_H^2 = B_{EH}^{55} - e_5 W_H^2$

7) $\dot{W}_P^3 = B_{EP}^{55} - e_6 W_P^3$.

Здесь K>0, a, c, d>0, $0 < e_i < 1$, $0 < p_i < 1$, r − ключевая ставка эмиссионного центра государства, C_b − бюджетная подсистема содержательной системы, а $B_{EC_b}^{55}, B_{ED}^{55}, B_{EE}^{55}, B_{EF}^{55}, B_{EG}^{55}, B_{EH}^{55}, B_{EP}^{55}$ − бюджетные потоки из учётной системы во все указанные системы государства S.

Рассмотрим совокупность σ всех *S-внутренних управлений* $r, B_{EC_b}^{55}, B_{ED}^{55}, B_{EE}^{55}, B_{EF}^{55}, B_{EG}^{55}, B_{EH}^{55}, B_{EP}^{55}$, заданных как функции от момента времени t на промежутке времени $[t_0, T]$.

Верховная система государства должна решать **оптимизационную задачу** на выбор оптимизирующих S-внутренних управлений в системе исходных уравнений для государства S в соответствии с поставленными целями на временном промежутке $[t_0, T]$. При этом оптимизирующие управления должны быть ограничены как снизу, так и сверху следующими числовыми неравенствами:

$$r_0 \le r \le r_1,\ (B_{DM}^{55})_0 \le B_{DM}^{55} \le (B_{DM}^{55})_1 \text{ для } M=C_b,D,E,F,G,H,P.$$

Одной из возможных оптимизационных задач может быть следующая задача.

Рассмотрим *совокупное достояние* $W_S(T,\sigma) = (W_C^1 + W_D^4 + W_E^5 + W_F^2 + W_G^2 + W_H^2 + W_P^3)(T)$ *государства S в момент времени T при управлении* σ *на промежутке времени* $[t_0, T]$. Рассмотрим *начальное совокупное достояние* $W_S(t_0) = (W_C^1 + W_D^4 + W_E^5 + W_F^2 + W_G^2 + W_H^2 + W_P^3)(t_0)$ *государства S в момент времени* t_0.

Рассмотрим возможный *целевой функционал* $\Phi(T,\sigma) = W_S(T,\sigma) - W_S(t_0)$ ***прироста*** *совокупного достояния государства S к моменту времени T при управлении* σ *относительно его начального совокупного достояния в момент времени* t_0.

Деятельность государства S при управлении σ в системе исходных уравнений для государства S обозначим через $A(S,\sigma)$.

Деятельность $A(S,\sigma^*)$ государства S называется ***оптимальной*** *на промежутке времени* $[t_0, T]$ *относительно выбранного целевого функционала* $\Phi(T,\sigma)$, если для любой другой деятельности $A(S,\sigma)$ государства S выполнено неравенство $\Phi(T,\sigma^*) \ge \Phi(T,\sigma)$. Задачу на нахождение оптимальной деятельности $A(S,\sigma^*)$ государства S записать в виде $\Phi(T,\sigma) \to \max$.

В статьях [4, 5] было найдено оптимальное решение последней системы при следующих числовых данных: T=100, K=300, d=20, a=0,0005, c=1, p_1=0,3, p_2=0,6, p_3=p_4=p_5=0,2, p_6=0,7, e_0=0,015, e_1=0,02, e_2=0,005, e_3=e_4=e_5=0,005, e_6=0,01, r_0=0,001, r_1=1, $(B_{EC_b}^{55})_0 = 0$, $(B_{EC_b}^{55})_1 = 0{,}5$, $(B_{EM}^{55})_0 = 0{,}1$, $(B_{EM}^{55})_1 = 0{,}2$ для M=D,E,F,G,H,P.

Оптимальным оказалось постоянное управление $u^*(t)$=r_0=0,001, $v^*(t) = (B_{EC_b}^{55})_0 = 0$, $w_1^*(t) = (B_{ED}^{55})_1 = 0{,}2$, $w_2^*(t) = (B_{EE}^{55})_1 = 0{,}2$, $w_3^*(t) = (B_{EF}^{55})_1 = 0{,}2$, $w_4^*(t) = (B_{EG}^{55})_1 = 0{,}2$, $w_5^*(t) = (B_{EH}^{55})_1 = 0{,}2$, $w_6^*(t) = (B_{EP}^{55})_1 = 0{,}2$ при 0≤t≤100. При этом управлении значение целевого функционала $\Phi(T,\sigma^*)$ совокупного конечного достояния государства к моменту времени T=100 оказалось равным 353,127.

Отметим, что найденное решение $\Phi(T,\sigma^*)$ непрерывно зависит от начальных условий. Численный эксперимент показал, что малые возмущения начальных условий задачи не вызывают сильного возмущения решения, что свидетельствует о его устойчивости.

Наибольшее совокупное достояние государства в конце временного промежутка достигается при следующих управлениях: 1) при самой низкой и **постоянной** установочной ставке учётной системы $r(t)$=0.001; 2) при самом низком и **постоянном** бюджетном потоке $B^{55}_{EC_b}(t)=0$ в базисную казённую часть содержательной системы C_b; 3) при самых высоких и **постоянных** бюджетных потоках $B^{55}_{EM}(t)=0,2$ в системы M=D,E,F,G,H,P.

3. ОПТИМИЗАЦИОННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОЕННОГО ПОДЧИНИТЕЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ГОСУДАРСТВ

Будем теперь рассматривать два государства: государство *S*, изображённое выше, и государство *S*(*I*), все соответствующие признаки которого снабжены указательной римской цифрой *I* в круглых скобках.

Составим математическую модель оптимального итогового военного подчинения государства *S* государству *S*(*I*) при условии **нападения** государства *S*(*I*) на государство *S*.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ДОСТОЯНИЯ И ПОТОКИ ПРИ ВОЕННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ ГОСУДАРСТВ

Для этого в содержательную систему *C* государства *S* введём дополнительное содержательное достояние 1(*I*) системы *C*(*I*) государства *S*(*I*) и дополнительное обеспечительное достояние 4(*I*) системы *D*(*I*) государства *S*(*I*).

Введём также дополнительные потоки $Y^{4(I)4(I)}_{D(I)C}$, $Z^{11(I)}_{CC}$, $Z^{1(I)1(I)}_{CC(I)}$, $Z^{11}_{C\mapsto}$ и $Z^{4(I)4(I)}_{C\mapsto}$ для системы *C*, название и смысл которых разъясняются далее.

Кроме того в обеспечительную систему *D* государства *S* введём дополнительное обеспечительное достояние 4(*I*) системы *D*(*I*) государства *S*(*I*).

Введём также дополнительные потоки $Y^{4(I)4(I)}_{D(I)D}$, $Z^{44(I)}_{DD}$, $Z^{4(I)4(I)}_{DD(I)}$, $Z^{44}_{D\mapsto}$ и $Z^{4(I)4(I)}_{D\mapsto}$ для системы *D*, название и смысл которых разъясняются далее.

Название и смысл дополнительных потоков

Поток $Y^{4(I)4(I)}_{D(I)C}$ называется *нападательным на систему C из системы D*(*I*) для разрушения и отнятия, указанных ниже.

Поток $Z^{11(I)}_{CC}$ называется *содержательно предотъёмным*. Смысл его состоит в том, что содержательное достояние 1 системы *C* государства *S* отнимается государством *S*(*I*) посредством военной «силы» 4(*I*), приходящей в систему *C* в виде нападательного потока $Y^{4(I)4(I)}_{D(I)C}$, и становится содержательным достоянием 1(*I*) системы *C*(*I*).

Поток $Z^{1(I)1(I)}_{CC(I)}$ называется *содержательно отъёмным*. Смысл его состоит в том, что **отнятое** у системы *C* содержательное достояние 1(*I*) доставляется в систему *C*(*I*).

Поток $Z^{11}_{C\mapsto}$ называется *содержательно разрушительным*. Смысл его состоит в том, что содержательное достояние 1 системы *C* **разрушается** посредством военной «силы» 4(*I*), приходящей в систему *C* в виде нападательного потока $Y^{4(I)4(I)}_{D(I)C}$.

Поток $Z_{C\mapsto}^{4(I)4(I)}$ называется *издержным относительно системы C*. Смысл его состоит в том, что для разрушения некоторой части содержательного достояния 1 системы C и для отнятия некоторой другой части этого достояния 1 у системы C приходится «жертвовать» военной «силой» 4(I), приходящей из системы D(I) в виде нападательного потока $Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)}$.

Поток $Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)}$ называется *нападательным на систему D из системы D*(I) для разрушения и отнятия, указанных ниже.

Поток $Z_{DD}^{44(I)}$ называется *обеспечительно предотъёмным*. Смысл его состоит в том, что обеспечительное достояние 4 системы D государства S отнимается государством S(I) посредством военной «силы» 4(I), приходящей в систему D в виде нападательного потока $Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)}$, и становится обеспечительным достоянием 4(I) системы D(I).

Поток $Z_{DD(I)}^{4(I)4(I)}$ называется *обеспечительно отъёмным*. Смысл его состоит в том, что **отнятое** у системы D обеспечительное достояние 4(I) доставляется в систему D(I).

Поток $Z_{D\mapsto}^{44}$ называется *обеспечительно разрушительным*. Смысл его состоит в том, что обеспечительное достояние 4 системы D **разрушается** посредством военной «силы» 4(I), приходящей в систему D в виде нападательного потока $Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)}$.

Поток $Z_{D\mapsto}^{4(I)4(I)}$ называется *издержным относительно системы D*. Смысл его состоит в том, что для разрушения некоторой части обеспечительного достояния 4 системы D и для отнятия некоторой другой части этого достояния 4 у системы D приходится «жертвовать» военной «силой» 4(I), приходящей из системы D(I) в виде нападательного потока $Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)}$.

Связи между дополнительными потоками

Введём четыре безразмерностные числовые положительные функции от текущего времени t, изменяющегося в промежутке $[t_0,T]$ от t_0 до T.

Функцию $g^{(1)}$ назовём *показателем действенности* (*эффективности*) *разрушения содержательного достояния 1 системы C посредством военной «силы» 4(I), приходящей из системы D(I) в виде нападательного потока* $Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)}$. Соотношение $(1/s)Z_{C\mapsto}^{11} = g^{(1)}(1/s(I))Z_{C\mapsto}^{4(I)4(I)}$ показывает связь между разрушительным потоком $Z_{C\mapsto}^{11}$ в системе C и издержным потоком $Z_{C\mapsto}^{4(I)4(I)}$ в этой системе, выраженную через фиксированную мировую валюту w.

Функцию $h^{(1)}$ назовём *показателем действенности отнимания содержательного достояния 1 системы C посредством военной «силы» 4(I), приходящей из системы D(I) в виде нападательного потока* $Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)}$. Соотношение $(1/s)Z_{CC}^{11(I)} = h^{(1)}(1/s(I))Z_{C\mapsto}^{4(I)4(I)}$ показывает связь между предотъёмным потоком $Z_{CC}^{11(I)}$ в системе C и издержным потоком $Z_{C\mapsto}^{4(I)4(I)}$ в этой системе, выраженную через фиксированную мировую валюту w.

Функцию $g^{(4)}$ назовём *показателем действенности разрушения обеспечительного достояния 4 системы D посредством военной «силы» 4(I), приходящей из системы D(I) в виде нападательного потока* $Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)}$. Соотношение $(1/s)Z_{D\mapsto}^{44} = g^{(4)}(1/s(I))Z_{D\mapsto}^{4(I)4(I)}$ показывает связь между разрушительным потоком $Z_{D\mapsto}^{44}$ в системе D и издержным потоком $Z_{D\mapsto}^{4(I)4(I)}$ в этой системе, выраженную через фиксированную мировую валюту w.

Функцию $h^{(4)}$ назовём *показателем действенности отнимания обеспечительного достояния 4 системы D посредством военной «силы» 4(I), приходящей из системы D(I)* *в виде нападательного потока* $Y^{4(I)4(I)}_{D(I)D}$. Соотношение $(1/s)Z^{44(I)}_{DD} = h^{(4)}(1/s(I))Z^{4(I)4(I)}_{D\mapsto}$ показывает связь между предотъёмным потоком $Z^{44(I)}_{DD}$ в системе D и издержным потоком $Z^{4(I)4(I)}_{D\mapsto}$ в этой системе, выраженную через фиксированную мировую валюту w.

Соглашения о непрерывности общих потоков

Будем считать, что переводные и отправленные потоки «равны» в мировой валюте, т.е. связаны соотношениями

$(1/s)Z^{11(I)}_{CC} = (1/s(I))Z^{1(I)1(I)}_{CC(I)}$ и $(1/s)Z^{44(I)}_{DD} = (1/s(I))Z^{4(I)4(I)}_{DD(I)}$.

Согласно сказанному ранее считаем, что издержный поток $Z^{4(I)4(I)}_{C\mapsto}$ равен нападательному потоку $Y^{4(I)4(I)}_{D(I)C}$ (оба из них выражены в деньгах 5(I)), т.е. $Z^{4(I)4(I)}_{C\mapsto} = Y^{4(I)4(I)}_{D(I)C}$. Также согласно сказанному ранее считаем, что издержный поток $Z^{4(I)4(I)}_{D\mapsto}$ равен нападательному потоку $Y^{4(I)4(I)}_{D(I)D}$ (оба из них выражены в деньгах 5(I)), т.е. $Z^{4(I)4(I)}_{D\mapsto} = Y^{4(I)4(I)}_{D(I)D}$. Используя указанные соглашения, получаем следующие соотношения:

$$Z^{1(I)1(I)}_{CC(I)} = (s(I)/s)Z^{11(I)}_{CC} = (s(I)/s)h^{(1)}(s/s(I))Z^{4(I)4(I)}_{C\mapsto} = h^{(1)}Y^{4(I)4(I)}_{D(I)C}$$

и

$$Z^{4(I)4(I)}_{DD(I)} = (s(I)/s)Z^{44(I)}_{DD} = (s(I)/s)h^{(4)}(s/s(I))Z^{4(I)4(I)}_{D\mapsto} = h^{(4)}Y^{4(I)4(I)}_{D(I)D}.$$

Изменённые и дополнительные уравнения для государства *S*

С учётом дополнительных потоков уравнения для государства S, написанные выше, изменятся следующим образом:

1) $$\dot W^1_C = L^{55}_{EC} - (p_1B^{55}_{ED} + p_2B^{55}_{EE} + p_3B^{55}_{EF} + p_4B^{55}_{EG} + p_5B^{55}_{EH} + p_6B^{55}_{EP}) - e_0W^1_C - Z^{11}_{C\mapsto} - Z^{11(I)}_{CC},$$

где

$$L^{55}_{EC} = aW^1_C(K - W^1_C)/(c + dr + (B^{55}_{EC_b} + B^{55}_{ED} + B^{55}_{EE} + B^{55}_{EF} + B^{55}_{EG} + B^{55}_{EH} + B^{55}_{EP})).$$

2) $\dot W^4_D = B^{55}_{ED} - e_1W^4_D - Z^{44}_{D\mapsto} - Z^{44(I)}_{DD}$

3) $\dot W^5_E = B^{55}_{EE} - e_2W^5_E$

4) $\dot W^2_F = B^{55}_{EF} - e_3W^2_F$

5) $\dot W^2_G = B^{55}_{EG} - e_4W^2_G$

6) $\dot W^2_H = B^{55}_{EH} - e_5W^2_H$

7) $\dot W^3_P = B^{55}_{EP} - e_6W^3_P$.

8) $\dot W^{1(I)}_C = (s(I)/s)Z^{11(I)}_{CC} - Z^{1(I)1(I)}_{CC(I)} = 0$

9) $\dot W^{4(I)}_C = Y^{4(I)4(I)}_{D(I)C} - Z^{4(I)4(I)}_{C\mapsto} = 0$

10) $\dot W^{4(I)}_D = (s(I)/s)Z^{44(I)}_{DD} - Z^{4(I)4(I)}_{D\mapsto} - Z^{4(I)4(I)}_{DD(I)} + Y^{4(I)4(I)}_{D(I)D} = 0$.

Используя указанные выше связи через числовые функции, соглашения о непрерывности и полученные выше соотношения, окончательно получаем:

1) $$\dot W^1_C = L^{55}_{EC} - (p_1B^{55}_{ED} + p_2B^{55}_{EE} + p_3B^{55}_{EF} + p_4B^{55}_{EG} + p_5B^{55}_{EH} + p_6B^{55}_{EP}) - e_0W^1_C - (g^{(1)} + h^{(1)})(s/s(I))Y^{4(I)4(I)}_{D(I)C},$$

где

$$L^{55}_{EC} = aW^1_C(K - W^1_C)/(c + dr +$$
$$(B^{55}_{EC_b} + B^{55}_{ED} + B^{55}_{EE} + B^{55}_{EF} + B^{55}_{EG} + B^{55}_{EH} + B^{55}_{EP})).$$

2) $\dot W^4_D = B^{55}_{ED} - e_1 W^4_D - (g^{(4)} + h^{(4)})(s/s(I))Y^{4(I)4(I)}_{D(I)D}$

3) $\dot W^5_E = B^{55}_{EE} - e_2 W^5_E$

4) $\dot W^2_F = B^{55}_{EF} - e_3 W^2_F$

5) $\dot W^2_G = B^{55}_{EG} - e_4 W^2_G$

6) $\dot W^2_H = B^{55}_{EH} - e_5 W^2_H$

7) $\dot W^3_P = B^{55}_{EP} - e_6 W^3_P$.

Отметим, что последние отрицательные слагаемые в уравнениях 1) и 2) получились из-за нападательного разрушения и отнимания.

Для этой системы рассматривается первичная совокупность σ всех *S-внутренних управлений* $r, B^{55}_{EC_b}, B^{55}_{ED}, B^{55}_{EE}, B^{55}_{EF}, B^{55}_{EG}, B^{55}_{EH}, B^{55}_{EP}, s$, заданных как функции от момента времени *t* на промежутке времени $[t_0, T]$.

<u>ИЗМЕНЁННЫЕ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ГОСУДАРСТВА *S*(*I*)</u>

Подобным образом для государства *S*(*I*) получается следующая система уравнений:

$$\dot W^{1(I)}_{C(I)} = L^{5(I)5(I)}_{E(I)C(I)} - (p_1(I)B^{5(I)5(I)}_{E(I)D(I)} + p_2(I)B^{5(I)5(I)}_{E(I)E(I)}$$

1(*I*)) $$+p_3(I)B^{5(I)5(I)}_{E(I)F(I)} + p_4(I)B^{5(I)5(I)}_{E(I)G(I)} + p_5(I)B^{5(I)5(I)}_{E(I)H(I)} +$$

$$p_6(I)B^{5(I)5(I)}_{E(I)P(I)}) - e_0(I)W^{1(I)}_{C(I)} + h^{(1)}Y^{4(I)4(I)}_{D(I)C},$$

где

$$L^{5(I)5(I)}_{E(I)C(I)} = a(I)W^{1(I)}_{C(I)}(K(I) - W^{1(I)}_{C(I)})/(c(I) + d(I)r(I) +$$
$$(B^{5(I)5(I)}_{E(I)C_b(I)} + B^{5(I)5(I)}_{E(I)D(I)} + B^{5(I)5(I)}_{E(I)E(I)} + B^{5(I)5(I)}_{E(I)F(I)}$$
$$+B^{5(I)5(I)}_{E(I)G(I)} + B^{5(I)5(I)}_{E(I)H(I)} + B^{5(I)5(I)}_{E(I)P(I)})).$$

2(*I*)) $\dot W^{4(I)}_{D(I)} = B^{5(I)5(I)}_{E(I)D(I)} - e_1(I)W^{4(I)}_{D(I)} - Y^{4(I)4(I)}_{D(I)C} - Y^{4(I)4(I)}_{D(I)D} + h^{(4)}Y^{4(I)4(I)}_{D(I)D}$

3(*I*)) $\dot W^{5(I)}_{E(I)} = B^{5(I)5(I)}_{E(I)E(I)} - e_2(I)W^{5(I)}_{E(I)}$

4(*I*)) $\dot W^{2(I)}_{F(I)} = B^{5(I)5(I)}_{E(I)F(I)} - e_3(I)W^{2(I)}_{F(I)}$

5(*I*)) $\dot W^{2(I)}_{G(I)} = B^{5(I)5(I)}_{E(I)G(I)} - e_4(I)W^{2(I)}_{G(I)}$

6(*I*)) $\dot W^{2(I)}_{H(I)} = B^{5(I)5(I)}_{E(I)H(I)} - e_5(I)W^{2(I)}_{H(I)}$

7(*I*)) $\dot W^{3(I)}_{P(I)} = B^{5(I)5(I)}_{E(I)P(I)} - e_6(I)W^{3(I)}_{P(I)}$.

Отметим, что последние положительные слагаемые в уравнениях 1) и 2) получились из-за прибавления отниманием.

Для этой системы рассмотрим первичную совокупность $\sigma(I)$ всех *S*(*I*)-*внутренних управлений* $r(I), B^{5(I)5(I)}_{E(I)C_b(I)}, B^{5(I)5(I)}_{E(I)D(I)}, B^{5(I)5(I)}_{E(I)E(I)}, B^{5(I)5(I)}_{E(I)F(I)}, B^{5(I)5(I)}_{E(I)G(I)}, B^{5(I)5(I)}_{E(I)H(I)}, B^{5(I)5(I)}_{E(I)P(I)}, s(I)$, заданных как функции от момента времени *t* на промежутке времени $[t_0, T]$.

Математическая модель военного подчинительного взаимодействия двух государств

Для систем уравнений для государств S и $S(I)$ рассмотрим вторичную совокупность $\tau(I)$ всех $S(I)$-*нападательных управлений* $Y^{4(I)4(I)}_{D(I)C}, Y^{4(I)4(I)}_{D(I)D}$, состоящую из нападательных потоков, заданных как функции от момента времени t на промежутке времени $[t_0,T]$. Совокупное одностороннее управление $(\sigma(I),\tau(I))$ назовём *нападательным управлением в системе уравнений для государства* $S(I)$ *на промежутке времени* $[t_0,T]$. Совокупное одностороннее управление $(\sigma,\tau(I))$ назовём *оборонительным управлением в системе уравнений для государства S на промежутке времени* $[t_0,T]$. Совокупное двустороннее управление $(\sigma,\sigma(I),\tau(I))$ назовём *военным управлением в системах уравнений для государств S и* $S(I)$ *на промежутке времени* $[t_0,T]$.

Взаимодействие государств S и $S(I)$ при нападательном управлении $(\sigma(I),\tau(I))$ в системах уравнений для государств S и $S(I)$ назовём *нападательным взаимодействием* и обозначим через $A(S,S(I),\sigma(I),\tau(I))$.

Рассмотрим *совокупное достояние* $W_{S(I)}(T,\sigma(I),\tau(I)) = (W^{1(I)}_{C(I)} + W^{4(I)}_{D(I)} + W^{5(I)}_{E(I)} + W^{2(I)}_{F(I)} + W^{2(I)}_{G(I)} + W^{2(I)}_{H(I)} + W^{3(I)}_{P(I)})(T)$ *государства* $S(I)$ *в момент времени T при нападательном управлении* $(\sigma(I),\tau(I))$ *на промежутке времени* $[t_0,T]$.

Рассмотрим *совокупное достояние* $W_S(T,\sigma,\sigma(I),\tau(I)) = (W^1_C + W^4_D + W^5_E + W^2_F + W^2_G + W^2_H + W^3_P)(T)$ *государства S в момент времени T при военном управлении* $(\sigma,\sigma(I),\tau(I))$ *на промежутке времени* $[t_0,T]$.

Рассмотрим *начальное совокупное достояние* $W_S(t_0) = (W^1_C + W^4_D + W^5_E + W^2_F + W^2_G + W^2_H + W^3_P)(t_0)$ *государства S в момент времени* t_0 и *начальное совокупное достояние* $W_{S(I)}(t_0) = (W^{1(I)}_{C(I)} + W^{4(I)}_{D(I)} + W^{5(I)}_{E(I)} + W^{2(I)}_{F(I)} + W^{2(I)}_{G(I)} + W^{2(I)}_{H(I)} + W^{3(I)}_{P(I)})(t_0)$ *государства* $S(I)$ *в момент времени* t_0. Рассмотрим начальное число $\Psi(t_0) = W_{S(I)}(t_0) - W_S(t_0)$.

Для двустороннего управления $(\sigma,\sigma(I),\tau(I))$ рассмотрим *целевой функционал* $\Psi(T,\sigma(I),\tau(I)) = W_{S(I)}(T,\sigma(I),\tau(I)) - \sup(W_S(T,\sigma,\sigma(I),\tau(I)) \mid \sigma \in \Sigma_S)$ ***абсолютного расхождения*** *совокупного достояния государства* $S(I)$ *к моменту времени T при нападательном управлении* $(\sigma(I),\tau(I))$ *относительно превосходственного* (*супремального*) *совокупного достояния государства S к моменту времени T по всем возможным внутренним управлениям* σ, *входящим в военные управления* $(\sigma,\sigma(I),\tau(I))$. Здесь через Σ_S обозначено множество всех возможных внутренних управлений для государства S.

Нападательное взаимодействие $A(S,S(I),\sigma(I),\tau(I))$ назовём ***абсолютно*** $(S(I),\alpha,\beta)$***-подчинительным*** (*для государства S с числовыми уровнями подчинения* $\alpha>0$ *и* $\beta>0$), если выполнены два неравенства:

1) $\Psi(T,\sigma(I),\tau(I)) \ge \alpha\Psi(t_0)$ (*итоговое расхождение*);
2) $W_{S(I)}(T,\sigma(I),\tau(I)) \ge \beta W_{S(I)}(t_0)$ (*итоговое обогащение*).

Функции $g^{(1)}, g^{(4)}, h^{(1)}, h^{(4)}$ от момента времени t и числа α и β считаются входными (наперёд задаваемыми) параметрами этого взаимодействия.

Военное абсолютно $(S(I),\alpha,\beta)$-подчинительное взаимодействие $A(S,S(I),\sigma(I),\tau(I))$ государств S и $S(I)$ обозначим через $A(S,S(I),\sigma(I),\tau(I),\alpha,\beta)$.

Нападательное абсолютно $(S(I),\alpha,\beta)$-подчинительное взаимодействие $A(S,S(I),\sigma^*(I),\tau^*(I),\alpha,\beta)$ называется ***оптимальным*** *на промежутке вре-*

мени $[t_0, T]$ *относительно выбранного целевого функционала* $\Psi(T, \sigma(I), \tau(I))$, если для любого другого нападательного абсолютно $(S(I), \alpha, \beta)$-подчинительного взаимодействия $A(S, S(I), \sigma(I), \tau(I), \alpha, \beta)$ выполнено неравенство $\Psi(T, \sigma^*(I), \tau^*(I)) \geq \Psi(T, \sigma(I), \tau(I))$. Задачу на нахождение оптимального нападательного абсолютно $(S(I), \alpha, \beta)$-подчинительного взаимодействия $A(S, S(I), \sigma^*(I), \tau^*(I), \alpha, \beta)$ государств S и $S(I)$ можно записать в виде $\Psi(T, \sigma(I), \tau(I)) \to \max$.

Исходные данные для приближённого решения упрощённой оптимизационной задачи

Если мы предполагаем все управления в сформулированной выше задаче постоянными функциями на временном промежутке $[t_0, T]$, то мы получаем *упрощённую оптимизационную задачу.* Авторы искали приближённое оптимальное решение этой задачи для двух различных **сценариев**, задаваемых различными исходными данными.

Исходные данные для ***сценария военного взаимодействия при значительном начальном превосходстве***:

1) T=10, K=300, d=20, a=0,0005, c=1, p_1=0,3, p_2=0,6, p_3=p_4=p_5=0,2, p_6=0,7, e_0=0,015, e_1=0,02, e_2=0,005, e_3=e_4=e_5=0,005, e_6=0,01, $W_C^1(0) = 100$, $W_D^4(0) = 20$, $W_E^5(0) = 20$, $W_F^2(0) = 10$, $W_G^2(0) = 10$, $W_H^2(0) = 10$, $W_P^3(0) = 30$, r_0=0,001, r_1=1, $(B_{EC_b}^{55})_0 = 0$, $(B_{EC_b}^{55})_1 = 0,5$, $(B_{EM}^{55})_0 = 0,1$, $(B_{EM}^{55})_1 = 0,2$ для M=D,E,F,G,H,P, s_0=5, s_1=7;
2) $K(I)$=3000, $d(I)$=200, $a(I)$=0,0005, $c(I)$=10, $p_1(I)$=0,3, $p_2(I)$=0,6, $p_3(I)$=$p_4(I)$=$p_5(I)$=0,2, $p_6(I)$=0,7, $e_0(I)$=0,015, $e_1(I)$=0,005, $e_2(I)$=0,02, $e_3(I)$=$e_4(I)$=$e_5(I)$=0,005, $e_6(I)$=0,01, $W_{C(I)}^{1(I)}(0) = 1000$, $W_{D(I)}^{4(I)}(0) = 200$, $W_{E(I)}^{5(I)}(0) = 200$, $W_{F(I)}^{2(I)}(0) = 100$, $W_{G(I)}^{2(I)}(0) = 100$, $W_{H(I)}^{2(I)}(0) = 100$, $W_{P(I}^{3(I)}(0) = 300$, $r(I)_0$=0,001, $r(I)_1$=1, $(B_{E(I)C_b(I)}^{5(I)5(I)})_0 = 0$, $(B_{E(I)C_b(I)}^{5(I)5(I)})_1 = 0,5$, $(B_{E(I)M(I)}^{5(I)5(I)})_0 = 0,1$, $(B_{E(I)M(I)}^{5(I)5(I)})_1 = 0,2$ для $M(I)$=$D(I)$,$E(I)$,$F(I)$,$G(I)$, $H(I)$,$P(I)$, $s(I)_0$=1, $s(I)_1$=1,4;
3) $(Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)})_0 = 0,1$, $(Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)})_1 = 0,5$, $(Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)})_0 = 0,1$, $(Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)})_1 = 0,5$;
4) входные функции $g^{(1)}, g^{(4)}, h^{(1)}, h^{(4)}$ постоянны и принимают значения $g^{(1)}(t) = 1,2$, $g^{(4)}(t) = 1,3$, $h^{(1)}(t) = 0,3$, $h^{(4)}(t) = 0,2$;
5) α=1,01 и β=1,01.

Полученные приближённые решения представлены на приводимых ниже графиках.

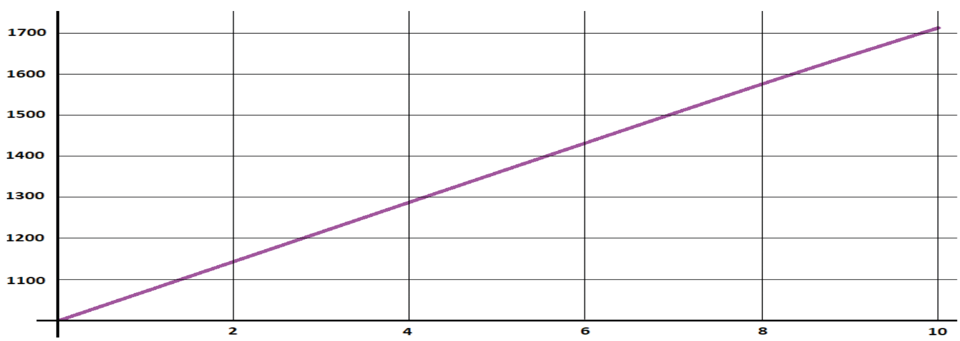

График 1. Зависимость оптимальной функции $W_{C(I)}^{1(I)}$ *от времени*

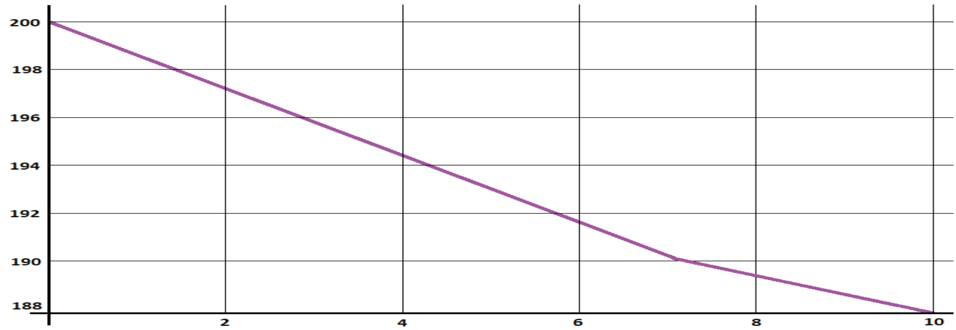

График 2. Зависимость оптимальной функции $W_{D(I)}^{4(I)}$ *от времени*

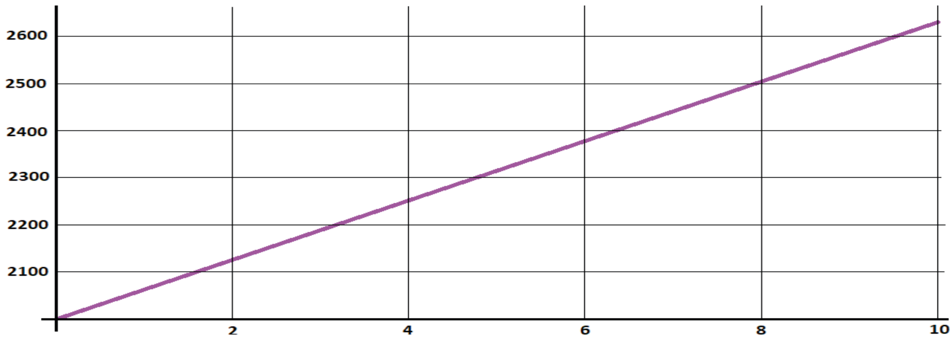

График 3. Зависимость оптимальной функции $W_{S(I)}$ *от времени*

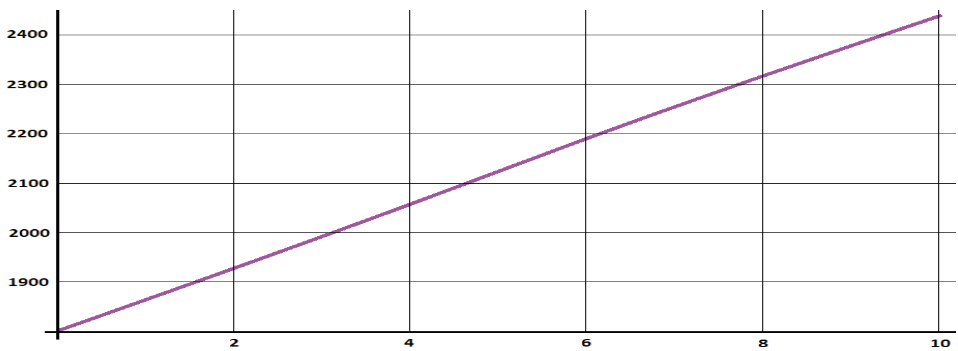

График 4. Зависимость целевой функции $\Psi(t,\sigma(I),\tau(I))$ *от времени*

Исходные данные для ***сценария военного взаимодействия при незначительном начальном превосходстве***:

1) T=20, K=300, d=20, a=0,0005, c=1, p_1=0,3, p_2=0,6, p_3=p_4=p_5=0,2, p_6=0,7, e_0=0,015, e_1=0,02, e_2=0,005, e_3=e_4=e_5=0,005, e_6=0,01, $W_C^1(0)=100$, $W_D^4(0)=20$, $W_E^5(0)=20$, $W_F^2(0)=10$, $W_G^2(0)=10$, $W_H^2(0)=10$, $W_P^3(0)=30$, r_0=0,001, r_1=1, $(B_{EC_b}^{55})_0=0$, $(B_{EC_b}^{55})_1=0,5$, $(B_{EM}^{55})_0=0,1$, $(B_{EM}^{55})_1=0,2$ для M=D,E,F,G,H,P, s_0=5, s_1=7;

2) $K(I)=600$, $d(I)=40$, $a(I)=0{,}0005$, $c(I)=2$, $p_1(I)=0{,}3$, $p_2(I)=0{,}6$, $p_3(I)=p_4(I)=p_5(I)=0{,}2$, $p_6(I)=0{,}7$, $e_0(I)=0{,}015$, $e_1(I)=0{,}005$, $e_2(I)=0{,}02$, $e_3(I)=e_4(I)=e_5(I)=0{,}005$, $e_6(I)=0{,}01$, $W_{C(I)}^{1(I)}(0)=200$, $W_{D(I)}^{4(I)}(0)=40$, $W_{E(I)}^{5(I)}(0)=40$, $W_{F(I)}^{2(I)}(0)=20$, $W_{G(I)}^{2(I)}(0)=20$, $W_{H(I)}^{2(I)}(0)=20$, $W_{P(I}^{3(I)}(0)=60$, $r(I)_0=0{,}001$, $r(I)_1=1$, $(B_{E(I)C_b(I)}^{5(I)5(I)})_0=0$, $(B_{E(I)C_b(I)}^{5(I)5(I)})_1=0{,}5$, $(B_{E(I)M(I)}^{5(I)5(I)})_0=0{,}1$, $(B_{E(I)M(I)}^{5(I)5(I)})_1=0{,}2$ для $M(I)=D(I),E(I),F(I),G(I),H(I),P(I)$, $s(I)_0=1$, $s(I)_1=1{,}4$;

3) $(Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)})_0=0{,}02$, $(Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)})_1=0{,}1$, $(Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)})_0=0{,}02$, $(Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)})_1=0{,}1$;

4) входные функции $g^{(1)}, g^{(4)}, h^{(1)}, h^{(4)}$ постоянны и принимают значения $g^{(1)}(t)=1{,}2$, $g^{(4)}(t)=1{,}3$, $h^{(1)}(t)=0{,}3$, $h^{(4)}(t)=0{,}2$;

5) $\alpha=1{,}01$ и $\beta=1{,}01$.

Полученные приближённые решения представлены на приводимых ниже графиках.

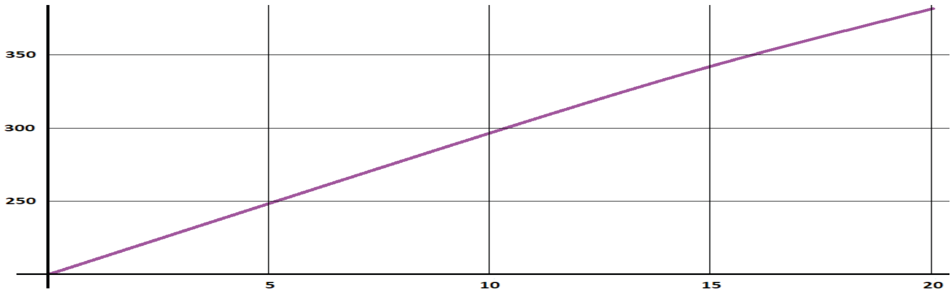

График 5. Зависимость оптимальной функции $W_{C(I)}^{1(I)}$ от времени

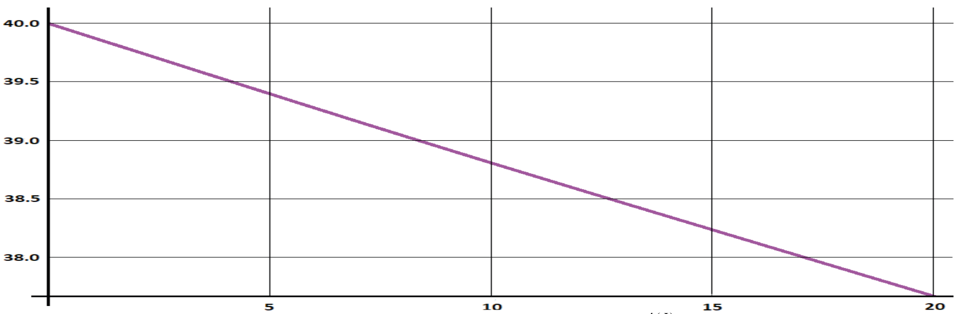

График 6. Зависимость оптимальной функции $W_{D(I)}^{4(I)}$ от времени

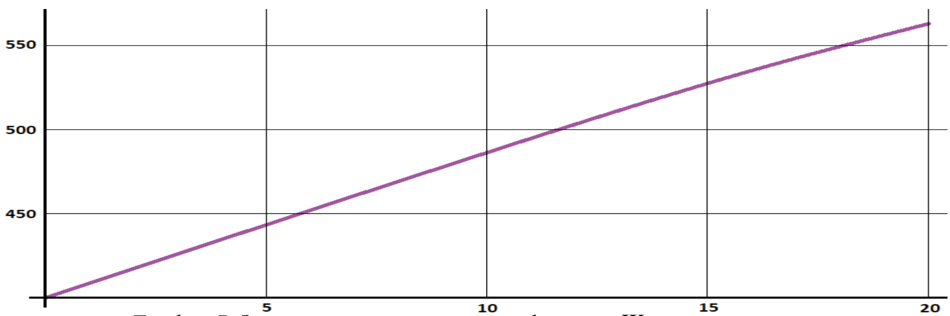

График 7. Зависимость оптимальной функции $W_{S(I)}$ от времени

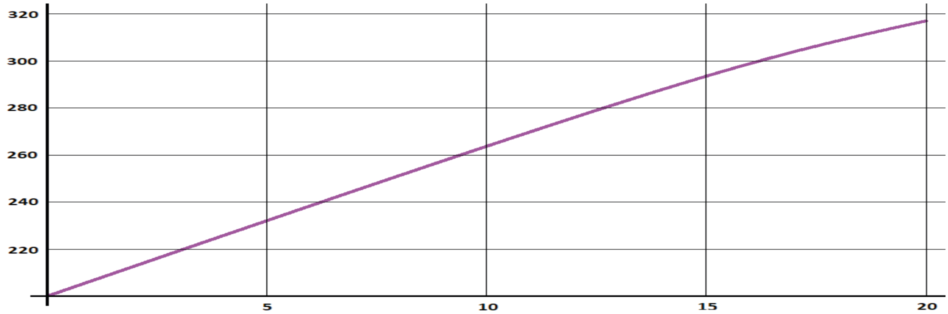

График 8. Зависимость целевой функции $\Psi(t,\sigma(I),\tau(I))$ *от времени*

В обоих сценариях совокупное оптимальное управление и супремум вычислялись приближённо методом случайных выборок (Монте-Карло) в многомерных числовых параллелепипедах, задаваемых указанными нижними и верхними границами всех частичных управлений.

Из сравнения приведённых решений для разных сценариев следует, что решение является относительно устойчивым.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная модель концептуально отражают следующие важные исторические примеры взаимодействий между государствами. Во время Второй Мировой войны США военным путём обеспечили подчинительное взаимодействие в свою пользу с такими государствами, как Япония, Германия, Италия и др.

В указанных во введении статьях автора на основе общей концептуальной модели государства решалась конкретно-числовая игровая задача на существование, нахождение и приближённое вычисление оптимизирующего управления в системе исходных уравнений для государства *S*, приведённой в первой части. Во второй части данной статье то же самое сделано для изложенной выше общей концептуальной динамической оптимизационной математической модели военного подчинительного взаимодействия двух государств.

После этого можно переходить к численному моделированию перечисленных выше наличных исторических взаимодействий между государствами и сверке модельных вычислений с историческими данными.

Литература

1. *Гуссейнова А.С., Павловский Ю.Н., Устинов В.А.* Опыт имитационного моделирования исторического процесса. − М.: Наука, 1984. − 157 с.
2. *Захаров В.К., Кузенков О.А.* Оптимальное управление в модели государства. Моделирование и анализ данных. 2011. № 1. С. 55–75.
3. *Захаров В.К.* Номология. Устроение и направление человеческой деятельности. − М.: МГППУ, 2011. − 216 с.
4. *Захаров В.К., Капитанов Д.В., Кузенков О.А.* Оптимальное управление в модели государства II. Моделирование и анализ данных. 2014. № 1. С. 4–31.

5. *Захаров В.К., Кузенков О.А.* Оптимальное управление в математической модели государства. Журнал Средневолжского математического общества. 2015. Т. 17, № 2. С. 34–38.
6. *Захаров В.К. Номология.* Воспроизведение и обновление человеческого бытия. − М.: «Onebook.ru», 2016. − 396 с.
7. *Захаров В.К.* Этот Новый Старый Мир. Будущее из прошлого. − М.: Издательский дом «Кислород», 2017. − 448 с.
8. *Захаров В.К.* Динамическая оптимизационная математическая модель военного подчинительного взаимодействия двух государств. Анализ, моделирование, управление, развитие социально-экономических систем: сборник научных трудов XIII Всероссийской школы-симпозиума АМУР-2019 (14–27 сентября 2019). – Симферополь: ИП Корниенко, 2019. С. 172–179.
9. *Захаров В.К.* Оптимизационная математическая модель мирного подчинительного взаимодействия двух государств. Современные проблемы анализа динамических систем. Теория и практика: материалы международной открытой конференции (21–23 мая 2019г.). − Воронеж: ВГЛТУ, 2019. С. 189–191.
10. *Захаров В.К.* Оптимизационные математические модели конкуренции двух государств. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019 (17–29 сентября 2019г.). − Симферополь: ПОЛИПРИНТ, 2019. С. 260–263.
11. *Zakharov V.K.* Mathematical model of the trade-currency subordinating interaction of two states. Сборник тезисов четвёртой международной конференции «Моделирование нелинейных процессов и систем» (15–17 октября 2019г.). М.: Янус − К, 2019. С. 40–41.
12. *Zakharov V.K.* Optimization mathematical models of the peaceful subordinating interactions of two States. Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1391. Conference 1. 012040. P 1–7.
13. *Захаров В.К.* Оптимизационные математические модели мирного и военного подчинительных взаимодействий двух государств. Моделирование и анализ данных. 2019. № 2. С. 4–20.

Optimal Control in Mathematical Model of Military Subordinating Interaction of Two States

Valery K. Zakharov*
Lomonosov Moscow state University, Moscow, Russia
ORCID: https://orcid.org/0000–0002–5492–7317
e-mail: zakharov_valeriy@list.ru

Alekxander V. Davidov*
Lomonosov Moscow state University, Moscow, Russia
ORCID: https://orcid.org/0000–0003–4949–4171
e-mail: esse101@yandex.ru

On the base of constructed earlier by the first author the optimization mathematical model of a military aggressive subordinating interaction of two States the corresponding problem of finding the optimal control in the simplest class of constant controls is solved.

Keywords: optimization mathematical model of State, optimization mathematical model of military aggressive interaction of two States, target functional, optimal solution.

For citation:
Zakharov V.K., Davidov A.V. Optimal Control in Mathematical Model of Military Subordinating Interaction of Two States. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2020. Vol. 10, no. 2, pp. 5–24. DOI:10.17759/ mda.2020100201 (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Gusseinova A.S., Pavlovskii Yu.N., Ustinov V.A. Opyt imitatsionnogo modelirovaniya istoricheskogo protsessa. − M.: Nauka, 1984. − 157 p.
2. Zakharov V.K., Kuzenkov O.A. Optimal’noe upravlenie v modeli gosudarstva. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*. 2011. № 1. P. 55–75.
3. Zakharov V.K. Nomologiya. Ustroenie i napravlenie chelovecheskoi deyatel’nosti. − M.: MGPPU, 2011. − 216 p.
4. Zakharov V.K., Kapitanov D.V., Kuzenkov O.A. Optimal’noe upravlenie v modeli gosudarstva II. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*. 2014. № 1. P. 4–31.
5. Zakharov V.K., Kuzenkov O.A. Optimal’noe upravlenie v matematicheskoi modeli gosudarstva. Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 2015. T. 17, № 2. P. 34–38.

***Valery K. Zakharov,** PhD, Professor of the Department of mathematical analysis, Lomonosov Moscow state University, Moscow, Russia. Author of scientific publications on conceptual and mathematical models of the state and its institutions. Winner of the Lomonosov prize. ORCID: https://orcid.org/0000–0002–5492–7317, e-mail: zakharov_valeriy@list.ru

****Alexander V.** Davidov, post-graduate student of the Department of mathematical analysis, Lomonosov Moscow state University, Moscow, Russia, ORCID: https://orcid.org/0000–0003–4949–4171, e-mail: esse101@yandex.ru

6. Zakharov V.K. Nomologiya. Vosproizvedenie i obnovlenie chelovecheskogo bytiya. − M.: «One-book.ru», 2016. − 396 p.
7. Zakharov V.K. Ehtot Novyi Staryi Mir. Budushchee iz proshlogo. − M.: Izdatel’skii dom “Kislorod” 2017. − 448 p.
8. Zakharov V.K. Dinamicheskaya optimizatsionnaya matematicheskaya model’ voennogo podchinitel’nogo vzaimodeistviya dvukh gosudarstv. Analiz, modelirovanie, upravlenie, razvitie sotsial’no-ehkonomicheskikh sistem: sbornik nauchnykh trudov XIII Vserossiiskoi shkoly-simpoziuma AMUR-2019 (14–27 sentyabrya 2019). – Simferopol’: IP Kornienko, 2019. P. 172–179.
9. Zakharov V.K. Optimizatsionnaya matematicheskaya model’ mirnogo podchinitel’nogo vzaimodeistviya dvukh gosudarstv. Sovremennye problemy analiza dinamicheskikh sistem. Teoriya i praktika: materialy mezhdunarodnoi otkrytoi konferentsii (21–23 maya 2019g.). − Voronezh: VGLTU, 2019. P. 189–191.
10. Zakharov V.K. Optimizatsionnye matematicheskie modeli konkurentsii dvukh gosudarstv. Sbornik materialov mezhdunarodnoi konferentsii KROMSh-2019 (17–29 sentyabrya 2019g.). − Simferopol’: POLIPRINT, 2019. P. 260–263.
11. Zakharov V.K. Mathematical model of the trade-currency subordinating interaction of two states. Sbornik tezisov chetvertoi mezhdunarodnoi konferentsii «Modelirovanie nelineinykh protsessov i sistem» (15–17 oktyabrya 2019g.). M.: Yanus − K, 2019. P. 40–41.
12. Zakharov V.K. Optimization mathematical models of the peaceful subordinating interactions of two States. Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1391. Conference 1. 012040. P 1–7.
13. Zakharov V.K. Optimizatsionnye matematicheskie modeli mirnogo i voennogo podchinitel’nykh vzaimodeistvii dvukh gosudarstv. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*. 2019. № 2. P. 4–20.