

Применение методики агрегирования критериев для выбора инновационных изделий

Сивакова Т.В.*

ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, Москва, Россия,
РЭУ им. Г.В. Плеханова, Москва, Россия,
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8026-2198>,
e-mail: sivakova15@mail.ru

Судаков В.А.**

Московский авиационный институт, Москва, Россия,
ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, Москва, Россия,
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1658-1941>,
e-mail: sudakov@ws-dss.com

Особенность инновационных изделий требует учитывать большое количество критериев, которые следует агрегировать в обобщённые и строить дерево свертки с качественными, количественными и нечеткими правилами. В работе предложена методика оптимального разбиения шкал критериев на обобщенные градации для использования комбинированных методов многокритериального анализа альтернатив. Переход к меньшему количеству критериев приводит к значительному повышению размерности шкал обобщённых критериев. Шкалы приходится преобразовывать в новые шкалы с меньшим количеством градаций. Для решения задачи минимизации информационных потерь, возникающих при преобразовании шкал, определена функция Беллмана и применен метод динамического программирования. Вычислительные эксперименты показали эффективность предложенного подхода.

Для цитаты:

Сивакова Т.В., Судаков В.А. Применение методики агрегирования критериев для выбора инновационных изделий // Моделирование и анализ данных. 2020. Том 10. № 1. С. 86–95. DOI: 10.17759/mda.2020100105

**Сивакова Татьяна Владимировна*, научный сотрудник, Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук» (ИПМ им. М.В.Келдыша РАН), научный сотрудник, Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова (РЭУ им. Г.В. Плеханова), Москва, Россия, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8026-2198>, e-mail: sivakova15@mail.ru

***Судаков Владимир Анатольевич*, доктор технических наук, профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), ведущий научный сотрудник, Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук» (ИПМ им. М.В.Келдыша РАН), Москва, Россия, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1658-1941>, e-mail: sudakov@ws-dss.com



Ключевые слова: инновационные изделия, агрегирование, критерии, функция Беллмана, многокритериальный анализ альтернатив, шкала, ранжирование, интегральная оценка, минимизация информационных потерь.

1. ВВЕДЕНИЕ

Инновации представляют собой производственную функцию, которая на базе изменений во всей совокупности действующих на продукт факторов предопределяет его качественные изменения [1]. Поскольку существует множество альтернативных путей создания инновационной продукции, с различными прототипами, которые не могут быть все реализованы в силу ограниченности ресурсов, приходится осуществлять выбор пути используя методы многокритериального анализа альтернатив. Инновационная составляющая продукции приводит к тому, что векторный критерий имеет достаточно высокую размерность, зачастую десятки или сотни компонентов. Лицо, принимающее решение (ЛПР) не в состоянии оценить такую большую совокупность критериев, поэтому обычно прибегают к построению многоуровневого дерева критериев [2].

В этом подходе критерии объединяются в группы, и каждая из них характеризуется своим обобщенным критерием. Формирование групп должны проводить эксперты или ЛПР по смысловому признаку, т.е. интегральный критерий несет обобщенную информацию о каком-либо аспекте инновационной продукции, детально определяемом критериями, вошедшими в состав группы [3]. Для каждого обобщенного критерия следует указать решающее правило. Таким правилом может быть качественный, количественный или нечеткий метод многокритериального анализа альтернатив, в результате работы которого вычисляется интегральная оценка по обобщенному критерию. Процедуру перехода к векторному критерию меньшей размерности, построенному на обобщенных критериях, будем называть агрегированием [4]. Агрегирование будет повторяться до тех пор, пока мы не получим дерево критериев, в корне которого находится один обобщенный критерий.

2. АГРЕГИРОВАНИЕ

Альтернативой предложенного дерева агрегирования критериев является иерархия в методе анализа иерархий (МАИ) Томаса Саати [5]. Но в отличие от МАИ, критерии на промежуточных уровнях дерева могут быть как количественными, так и качественными, и в решающем правиле используется не только взвешенная сумма и мультипликативная свертка, но и другие методы, включая комбинированный метод на базе областей предпочтений [6].

Дерево агрегирования критериев можно представить следующим образом. На нижнем уровне дерева образуется N_1 групп, по q_{i1} элементов в каждой, где q_{i1} – число критериев в i -ой группе (желательно чтобы q_{i1} не превосходило 10, иначе применение качественных методов затруднительно). Если n – число первичных критериев, то число N_1 находится в пределах:



$$\left\lceil \frac{n}{\max_i q_{li}} \right\rceil \leq N_1 \leq \left\lfloor \frac{n}{\min_i q_{li}} \right\rfloor.$$

Так как n/q_{li} не всегда целое число, то применяется операция $\lceil \dots \rceil$ – округление до ближайшего целого большего или равного операнду. На следующем уровне дерева: q_2 – число критериев в группах, а роль входных критериев исполняют N_1 групп нижнего уровня и т.д. В результате применения данной процедуры в корне дерева останется один интегральный критерий.

При таком агрегировании критериев, получается высокая размерность шкал обобщенных критериев. Так если даны 4 критерия и у каждого из них 5 градаций, то для различимости всех комбинаций значений необходима шкала с 625 градациями. Работа качественных методов на высокоразмерных шкалах затруднительна, поэтому необходимо разработать методику снижения размерности таких шкал. Решение данной задачи разбивается на 2 этапа: первый этап – выбор числа градаций для новой шкалы, и второй – разбиение исходной шкалы на заданное количество градаций. Шкалу, полученную в результате применения данной методики, назовем обобщенной. На первом этапе ЛПР или эксперт, на основе содержательных соображений, сам назначает требуемую точность оценки. На втором этапе предлагаются три метода:

1. Разбиение шкалы на интервалы с одинаковым числом градаций. С точки зрения информационных потерь, как будет показано ниже, этот метод не всегда эффективен.
2. Предоставление ЛПР возможности самому определять разбиение на основе содержательного анализа задачи. Метод неудобен тем, что ЛПР приходится тратить много времени на разбиение и согласование шкал.
3. Разбиение шкалы на основе минимизации информационных потерь используя понятие энтропии агрегирующего критерия.

Понятно, что процедура дискретизации шкал приводит к информационным потерям. Информация о инновационном продукте наиболее полно отражена на уровне первичных критериев. Информационные потери растут от первичных критериев к интегральному критерию в корне дерева агрегирования. Оценить информационные потери, которые возникают в процессе агрегирования критериев, можно с информационной энтропии [7]. Количество информации измеряется разностью энтропий до и после вычисления значения критерия. В данном случае энтропия критерия после вычисления значения критерия равна нулю и количество информации определяется энтропией значения критерия до его вычисления. Проводить разбиение шкалы обобщенного критерия на градации следует так, чтобы энтропия критерия была максимальной. Поэтому шкалу критерия следует разбивать интервалы приближенные к таким, в которых значения критерия появлялись бы с одинаковыми вероятностями.

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ

В рассматриваемой задаче имеется исходная шкала обобщенного критерия с большим количеством градаций и из нее следует получить шкалу с меньшим количеством градаций с минимальными информационными потерями. Формализуем постановку соответствующей оптимизационной задачи, она решается для каждого обобщенного критерия на всех уровнях агрегирования.

Целевая функция примет следующий вид:

$$\max_{u_1, u_2, \dots, u_{m^*}} I^* = - \sum_{r=1}^{m^*} \left(\sum_{k=\sum_{l=1}^{r-1} u_l + 1}^{\sum_{l=1}^r u_l} p_k \right) \log_2 \left(\sum_{k=\sum_{l=1}^{r-1} u_l + 1}^{\sum_{l=1}^r u_l} p_k \right),$$

ограничения:

$$\sum_{r=1}^{m^*} u_r = m,$$

$$u_r > 0, \quad r = 1, \dots, m^*,$$

где

u_r – оптимизационные переменные, показывающие сколько градаций на исходной шкале включается в r -ю градацию на обобщенной шкале,

p_k – вероятность k -го состояния в исходной шкале,

m^* – число градаций в обобщенной шкале,

m – число градаций исходной шкалы,

$r = 1, \dots, m^*$ – номер градации в обобщенной шкале,

$k = 1, \dots, m^*$ – номер градации в исходной шкале,

$\sum_{l=1}^{r-1} u_{l+1}$ – индекс первой градации исходной шкалы, включенной в r -ю градацию обобщенной шкалы,

$\sum_{l=1}^r u_l$ – индекс последней градации исходной шкалы, включенной в r -ю градацию обобщенной шкалы.

Практическое использование такой постановки задачи затрудняет необходимость знания p_k . Не всегда существует простой способ нахождения вероятностного распределения значений векторного критерия. Однако, при продолжительной эксплуатации информационно-аналитических систем инновационно активных предприятий, оценки p_k могут быть вычислены на основе обработки статистически:

$$p_k = m / n,$$

где m – число альтернатив у которых значение критерия попадало в k -ю градацию, n – общее число оцениваемых альтернатив.

Если система только начинает функционировать, то можно использовать субъективные вероятности, основанные на опросе экспертов по методу эталонных лотерей.

Данная оптимизационная задача относится к классу задач дискретного динамического программирования [8]. Решение поставленной задачи основано на выводе



функции Беллмана $\Lambda_r(\xi)$. Она определяет максимум энтропии r первых градаций обобщенной шкалы, найденный при условии, что ξ градаций исходной шкалы объединяются в r первых градаций обобщенной шкалы:

$$\begin{aligned} \ddot{A}_r(\xi) = \max_{u_1, \dots, u_r} & \left(- \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=\sum_{l=1}^j u_l} p_k \right) \log_2 \left(\sum_{k=\sum_{l=1}^j u_l} p_k \right) \right), \\ & \sum_{j=1}^r u_j \leq \xi, \\ & r \leq \xi, \xi = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Для вычисления функции Беллмана выводится следующая рекуррентная формула:

$$\begin{aligned} \ddot{A}_1(\xi) &= \max_{1 \leq u_1 \leq \xi} \left\{ - \left(\sum_{k=1}^{u_1} p_k \right) \log_2 \left(\sum_{k=1}^{u_1} p_k \right) \right\}, \\ \ddot{A}_2(\xi) &= \max_{1 \leq u_2 \leq \xi} \left\{ - \left(\sum_{k=\xi-u_2+1}^{\xi} p_k \right) \log_2 \left(\sum_{k=\xi-u_2+1}^{\xi} p_k \right) + \ddot{A}_1(\xi - u_2) \right\}, \\ & \dots \\ \ddot{A}_r(\xi) &= \max_{1 \leq u_r \leq \xi} \left\{ - \left(\sum_{k=\xi-u_r+1}^{\xi} p_k \right) \log_2 \left(\sum_{k=\xi-u_r+1}^{\xi} p_k \right) + \ddot{A}_{r-1}(\xi - u_r) \right\}. \end{aligned}$$

При $\xi=m$ и $r=m^*$ функция Беллмана будет равна оптимальному значению целевой функции для всей шкалы:

$$\begin{aligned} \ddot{A}_{m^*}(m) &= \max_{1 \leq u_{m^*} \leq m} \left\{ - \left(\sum_{k=m-u_{m^*}+1}^m p_k \right) \log_2 \left(\sum_{k=m-u_{m^*}+1}^m p_k \right) + \ddot{A}_{m-1}(m - u_{m^*}) \right\} = \\ &= \max_{u_r} \left(- \sum_{r=1}^{m^*} \left(\sum_{k=\sum_{l=1}^r u_l} p_k \right) \log_2 \left(\sum_{k=\sum_{l=1}^r u_l} p_k \right) \right). \end{aligned}$$

4. АПРОБАЦИЯ МЕТОДА

Методика агрегирования критериев носит эвристический характер, и в зависимости от того, как критерии объединяются в группы, можно получить различный результат. Поэтому актуален вопрос о корректности использования агрегирования для многокритериального анализа альтернатив. Так как структура всех узлов дерева критериев идентична, можно допустить, что если для одного из обобщенных критериев использование процедуры агрегирования адекватно исходной (не агрегированной) оценке, то эта адекватность сохраняется для всего дерева критериев.

Способы вычисления интегральных оценок альтернатив будем считать адекватными, если, пользуясь ими, одно и то же лицо, принимающее решения, получит сходные ранжирования альтернатив.



Для определения меры близости на отношениях линейного порядка воспользуемся специальной мерой, предложенной Кемени.

Расстояние между ранжированием А и В определяется по формуле:

$$d(A, B) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N |a_{ij} - b_{ij}|,$$

где N – число альтернатив,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-я альтернатива предпочтительней } j\text{-й,} \\ 0, & \text{если } i\text{-я альтернатива эквивалентна } j\text{-й,} \\ -1, & \text{если } i\text{-я альтернатива предпочтительней } i\text{-й,} \end{cases}$$

b_{ij} определяется аналогично.

Максимально возможное расстояние между ранжированиями равно:

$$\max d(A, B) = N(N - 1) / 2.$$

В результате нормирования расстояния между ранжированиями получается коэффициент ранговой корреляции Кендалла:

$$\tau(A, B) = 1 - 2 \frac{d(A, B)}{N(N - 1)}.$$

Кроме того, можно воспользоваться коэффициентом ранговой корреляции Спирмена:

$$\rho(A, B) = 1 - \frac{6}{N^3 - N} \sum_{i=1}^N (r_i - s_i)^2,$$

где r_i – ранг i -й альтернативы в ранжировании A , s_i – ранг i -й альтернативы в ранжировании B .

Сложно предпочесть один из этих коэффициентов, результаты расчетов по ним разнятся, хоть и незначительно, поэтому вычислим оценку корреляции между ранжированиями обоими способами. Оценка проводилась на двух типовых задачах ранжирования образцов инновационной продукции в пространстве четырех критериев, для получения ранжирования A правило вычисления рангов альтернатив применялось непосредственно к первичным критериям, а для ранжирования B проводилось предварительное агрегирование первичных критериев в два агрегирующих критерия. Результаты статистической обработки данных эксперимента приведены в таблице 1.

Таблица 1

Коэффициенты корреляции

ЛПР	Эксперимент 1		Эксперимент 2	
	τ	ρ	τ	ρ
1	0,18	0,25	0,42	0,59
2	0,66	0,82	0,72	0,85
3	0,34	0,45	0,47	0,58
4	0,58	0,74	0,58	0,63
5	0,84	0,96	0,48	0,64
6	0,46	0,63	0,4	0,44
7	0,66	0,83	0,41	0,53



ЛПР	Эксперимент 1		Эксперимент 2	
	τ	ρ	τ	ρ
8	0,19	0,2	0,2	0,21
9	0,84	0,96	0,73	0,87
10	0,65	0,8	0,59	0,72
11	0,69	0,87	0,69	0,87
12	0,82	0,95	0,74	0,9
Диапазон	[0,18; 0,86]	[0,2; 0,97]	[0,2; 0,86]	[0,21; 0,97]
Среднее	0,61	0,75	0,59	0,71
Дисперсия	0,05	0,06	0,04	0,04

На основе анализа результатов экспериментов сделаны следующие выводы:

- ранжирования полученные без агрегирования и с агрегированием хорошо коррелированы во всех экспериментах как по Кендаллу (τ), так и по Спирмену (ρ);
- значение коэффициента корреляции Кендалла в среднем меньше, но даже такие значения все-равно говорят о значимой корреляции;
- большинство ЛПР высказали мнение, что в большей степени их точку зрения отражает ранжирование полученное в результате агрегирования, что объясняется тем, что непосредственное построение качественных решающих при высокой размерности критерия вызывает затруднения за счет необходимости запоминания уровней предпочтений для большого числа комбинаций значений критериев;
- низкая дисперсия коэффициентов корреляции позволяет считать экспериментальные данные заслуживающими доверие, несмотря на сравнительно небольшое число наблюдений.

Следовательно, методика агрегирования критериев не вносит значимых искажений в учет предпочтений ЛПР.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный подход позволяет снизить информационные потери, при ранжировании и выборе образцов инновационной продукции с учетом векторного критерия высокой размерности. Использование энтропийного подхода к разбиению шкал дает возможность использовать качественные методы многокритериального анализа альтернатив с высокоразмерными критериями. Он может быть применен при создании систем планирования, управления на инновационно-активных и наукоемких предприятиях.

Данная методика процедуры разбиения шкал критериев была апробирована для задачи выбора оборудования для проведения космических экспериментов на российском сегменте Международной Космической Станции (МКС). Был проведен расчет выигрыша от оптимального разбиения, в котором для определения оценок вероятностей попадания значений в градации шкал использовались данные по 93 космическим экспериментам [9]. Исследование зависимости энтропии от числа градаций в данном примере показало, что не целесообразно использовать больше 36 градаций, так как энтропия перестает существенно возрастать. Если число градаций велико, то строить решающие



правила в качественных шкалах трудоемко, так как необходимо задавать предпочтения на большом количестве областей. Разбиение на 16 градаций позволило сохранить 83 % информации из исходной шкалы, что является хорошим компромиссом между сокращением шкалы в 16 раз и вынужденными информационными потерями.

Литература

1. *Michaelides P.G.* Joseph Schumpeter and the German Historical School. *Cambridge Journal of Economics*. 33(3).2009, pp. 495–516.
2. *Corrente, S., Greco, S. and Slowinski R.* Multiple Criteria Hierarchy Process in Robust Ordinal Regression. *Decision Support Systems*. 53(3). 2012, pp. 660–674.
3. *Литвак Б.Г.* Экспертные оценки и принятие решений. М.: Патент, 1996, 271 с.
4. *Посадский А.И., Сивакова Т.В., Судаков В.А.* Агрегирование нечетких суждений экспертов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 101. 12 с. doi:10.20948/prepr-2019–101 URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019–101>.
5. *Saaty T.L. and Vargas L.G.* Models Methods, Concepts and Applications of the Analytic Hierarchy Process. Boston: Kluwer Academic Publishers. 2000.
6. *Batkovskiy, A. M., Nesterov, V. A., Semenova, E. G., Sudakov, V. A. and Fomina A.V.* Developing intelligent decision support systems in multi-criteria problems of administrative-territorial formations infrastructure projects assessment. *Journal of Applied Economic Sciences*. 5(51). 2017, pp. 1301– 1311.
7. *Arndt C.* Information Measures: Information and its Description in Science and Engineering. Berlin: Springer. 2004.
8. *Eddy S.R.* What is Dynamic Programming? *Nature Biotechnology*. 22(7). 2004, pp. 909–910.
9. *Sudakov V.A., Nesterov V.A. and Kurennykh A.E.* Integration of decision support systems ‘kosmos’ and WS-DSS with computer models. *Proceedings of 2017 10th International Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD)*. Moscow, Russia: IEEE.
10. *Сивакова Т.В., Судаков В.А.* Метод нечетких областей предпочтении для оценки эффективности инноваций // XXVIII Международная научно-техническая конференция «Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации». Алушта, 14–20 сентября 2019 г. Сборник трудов. М.: Изд.-во Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 2019. С. 81–82.



Application of Criteria Aggregation Techniques for the Selection of Innovative Products

Sivakova T.V.*

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia,
Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia,
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8026-2198>,
e-mail: sivakova15@mail.ru

Sudakov V.A.**

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia,
Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia,
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1658-1941>,
e-mail: sudakov@ws-dss.com

The peculiarity of innovative products requires taking into account a large number of criteria that should be aggregated into generalized ones and building a convolution tree with qualitative, quantitative and fuzzy rules. The paper proposes a methodology for the optimal partitioning of criteria scales into generalized gradations for using combined methods of multicriteria analysis of alternatives. The transition to fewer criteria leads to a significant increase in the dimension of the scales of generalized criteria. Scales have to be converted to new scales with fewer gradations. To solve the problem of minimizing the information loss occurring when converting the scales picked Bellman function and applied method of dynamic programming. Computational experiments have shown the effectiveness of the proposed approach.

Keywords: innovative products, the aggregation criteria, the Bellman function, multicriteria analysis of alternatives, scale, ranging, integrated assessment, minimization of information loss.

References

1. Michaelides P.G. Joseph Schumpeter and the German Historical School. Cambridge Journal of Economics. 33(3).2009, pp. 495–516.
2. Corrente, S., Greco, S. and Slowinski R. Multiple Criteria Hierarchy Process in Robust Ordinal Regression. Decision Support Systems. 53(3). 2012, pp. 660–674. (In Russ., abstr. In Engl.)

For citation:

Sivakova T.V., Sudakov V.A. Application of Criteria Aggregation Techniques for the Selection of Innovative Products. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2020. Vol. 10, no. 1, pp. 86–95. DOI: 10.17759/mda.2020100105

***Sivakova Tatyana Vladimirovna**, Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences), researcher, Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8026-2198>, e-mail: sivakova15@mail.ru

****Sudakov Vladimir Anatolievich**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), Leading Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1658-1941>, e-mail: sudakov@ws-dss.com



3. Litvak B.G. Jekspertnye ocenki i prinjatije reshenij [Expert evaluation and decision-making]. M.: Patent, 1996, 271 c.
4. Posadskij A.I., Sivakova T.V., Sudakov V.A. Agregirovanie nechetkih suzhdenij ekspertov [Aggregation of fuzzy expert judgments]. Preprinty IPM im. M.V. Keldysha. 2019. № 101. 12 s. doi:10.20948/prepr-2019-101 URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-101>.
5. Saaty T.L. and Vargas L.G. Models Methods, Concepts and Applications of the Analytic Hierarchy Process. Boston: Kluwer Academic Publishers. 2000.
6. Batkovskiy, A. M., Nesterov, V. A., Semenova, E. G., Sudakov, V. A. and Fomina A.V. Developing intelligent decision support systems in multi-criteria problems of administrative-territorial formations infrastructure projects assessment. Journal of Applied Economic Sciences. 5(51). 2017, pp. 1301– 1311.
7. Arndt C. Information Measures: Information and its Description in Science and Engineering. Berlin: Springer. 2004.
8. Eddy S.R. What is Dynamic Programming? Nature Biotechnology. 22(7). 2004, pp. 909–910.
9. Sudakov V.A., Nesterov, V. A. and Kurennykh A.E. Integration of decision support systems ‘kosmos’ and WS-DSS with computer models. Proceedings of 2017 10th International Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD). Moscow, Russia: IEEE.
10. Sivakova T.V., Sudakov V.A. Metod nechetkih oblastej predpochtenii dlja ocenkiy effektivnosti innovacij [Fuzzy areas preference method for evaluating innovation performance]. XXVIII Mezhdunarodnaja nauchno-tehnicheskaja konferencija “Sovremennye tehnologii v zadachah upravlenija, avtomatiki i obrabotki informacii”. Alushta, 14–20 sentjabrja 2019 g. Sbornik trudov. [Proceedings of the XXVIII International Scientific and Technical Conference “Modern Technologies in the Problems of Control, Automation and Information Processing”], Alushta. M.: Izd.-vo Nacional’nyj issledovatel’skij jadernyj universitet “MIFI”, 2019. S. 81–82.