МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

УДК 681.51

ПЕРСПЕКТИВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕПРЕРЫВНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

И.М. Косачев, К.Н. Чугай, К.А. Рыбаков

В статье излагается методический подход к нелинейной фильтрации многомерных негауссовых случайных процессов, наблюдаемых в непрерывных стохастических динамических системах с фиксированной структурой. Высокая точность разработанных алгоритмов оптимальной нелинейной фильтрации обусловлена за счет итерационного учета в них высших апостериорных центральных моментов фильтруемого процесса в общем случае произвольного порядка. Адаптивность разработанных алгоритмов высокоточной нелинейной фильтрации обеспечивается путем расчета на ЭВМ в реальном времени апостериорных асимметрий и апостериорных эксцессов всех фазовых координат фильтруемого случайного процесса, последующего их сравнения с пороговыми значениями, соответствующими гауссовому процессу, и, при необходимости, путем итерационного учета в алгоритмах фильтрации высших апостериорных центральных моментов фильтруемого процесса. Кроме того, рассмотрено современное направление в теории оптимальной нелинейной фильтрации: применение последовательных методов Монте-Карло.

The article presents a methodical approach to nonlinear filtering of multidimensional non-Gaussian random processes observed in continuous-time stochastic dynamical systems with a fixed structure. The high accuracy of the developed algorithms for the optimal nonlinear filtering problem is due to the use of a posteriori higher order central moments of the filtered process. The adaptability of the developed high-precision nonlinear filtering algorithms is provided by calculating in real time a posteriori skewness and excess kurtosis for all phase coordinates of the filtered random process. They are compared with the threshold values corresponding to Gaussian process and a posteriori higher central moments of the filtered process are used in filtering algorithms if necessary. In addition, the modern direction in the optimal nonlinear filtering is considered (sequential Monte Carlo methods).

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА
Высокоточная фильтрация, динамическая система, непрерывная стохастическая система, случайный процесс, фильтр частиц.

ДЛЯ ЦИТАТЫ
И.М Косачев, К.Н. Чугай, К.А. Рыбаков. Перспективные направления нелинейной фильтрации случайных процессов в непрерывных стохастических системах // Моделирование и анализ данных. 2019. №3. С. 73-79.
I.M. Kosachev, K.N. Chugai, K.A. Rybakov. Perspective directions for nonlinear filtering of random processes in continuous-time stochastic systems. Modelirovaniye i analiz dannykh=Modelling and data analysis *(Russia)*. 2019, no.3, pp. 73-79.

ВВЕДЕНИЕ

Методы и алгоритмы оптимальной фильтрации случайных процессов (СП) применяются во многих прикладных задачах, например задачах приема радиосигналов на фоне помех, при управлении движущимися объектами: космическими аппаратами, воздушными и морскими судами, подводными аппаратами, наземными средствами передвижения в условиях неточных измерений параметров движения, при обработке телеметрической информации, информации с навигационных спутниковых систем или автономных систем позиционирования, задачах радиолокации, задачах параметрической идентификации и распознавания образов [6; 16; 18]. Разработка новых эффективных методов и алгоритмов, позволяющих решать задачи оптимальной фильтрации для нелинейных стохастических систем, не теряет своей актуальности.

Математическое описание в перечисленных выше и многих других задачах можно рассматривать в классе нестационарных нелинейных непрерывных стохастических динамических систем с фиксированной структурой (ДСФС).

В настоящее время для оценивания СП наиболее широко используется теория калмановской фильтрации (КФ), которая позволяет получить замкнутые алгоритмы оценивания [2; 8; 14–16; 18]. Однако теория КФ эффективно работает только при гауссовой или близкой к ней плотности распределения вероятностей (ПРВ) фильтруемого СП и линейном канале наблюдения, но достаточно часто ПРВ фильтруемого СП не является гауссовой. В современной теории оптимальной нелинейной фильтрации негауссовых СП используются приближенные методы, основанные на параметрической или функциональной аппроксимации апостериорной ПРВ, либо методы Монте-Карло.

К методам параметрической аппроксимации относятся: моментный, квазимоментный, кумулянтный (семиинвариантный), моментно-семиинвариантный методы [1–5; 8; 14; 15]. Суть методов параметрической аппроксимации заключается в получении системы стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) первого порядка для определения числовых характеристик апостериорной ПРВ: начальных или центральных моментов, кумулянтов (семиинвариантов) или квазимоментов.

К методам функциональной аппроксимации негауссовой ПРВ относятся [1–5; 8; 11; 14; 15]: метод аппроксимации ПРВ отрезком ряда Грама–Шарлье, Эджворта или Лагерра; метод полигауссовой аппроксимации ПРВ, заключающийся в ее более точной аппроксимации суммой гауссовых ПРВ; метод эллипсоидальной аппроксимации и спектральный метод. Каждый из указанных методов имеет свои достоинства и недостатки.

В качестве альтернативы методам параметрической и функциональной аппроксимации негауссовой апостериорной ПРВ можно рассматривать несколько подходов. Один из них – метод условно-оптимальной фильтрации В.С. Пугачева [14], в котором не используются процедуры нахождения апостериорной ПРВ фильтруемого СП, а формируется структура оптимального фильтра определенного порядка, выбор которого осуществляется на основе компромисса между точностью и возможностью реализации в реальном масштабе времени. Развитием метода условно-оптимальной фильтрации является непараметрический синтез непрерывного фильтра оптимальной структуры [9; 10]. Другой подход – использование последовательных методов Монте-Карло. Фильтры такого типа в настоящее время достаточно популярны. Они называются фильтрами частиц [17] и основаны на моделировании СП с последующей статистической обработкой результатов.

В этой статье излагается методика адаптивной нелинейной фильтрации многомерных негауссовых СП, наблюдаемых в стохастических ДСФС, базирующаяся на комплексном использовании методов параметрической и функциональной аппроксимации негауссовой апостериорной ПРВ, а также один из возможных вариантов фильтров частиц.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ФИКСИРОВАННОЙ СТРУКТУРОЙ

Будем полагать, что фильтрации подлежит СП $Y(t)$ размерности N_Y, описываемый системой нелинейных СДУ, понимаемых в смысле Стратоновича, с правой частью, которая содержит одно- и многоаргументные нелинейности $\Phi(y,t)$, $H(y,t)$ и мультипликативные белые шумы $V(t)$:

$$\dot{Y}(t) = C(t) + D(t)Y(t) + \Phi(Y(t),t)B(t) + H(Y(t),t)V(t), \quad Y(0) = Y_0. \qquad (1)$$

С помощью стохастического канала наблюдения проводятся измерения СП $Y(t)$. Математическая модель безынерционного нелинейного канала наблюдения с аддитивными белыми шумами $N(t)$ описывается системой нелинейных уравнений вида

$$Z(t) = \Psi(Y(t),t)S(t) + \Lambda(t)N(t). \qquad (2)$$

В уравнениях (1) и (2) $C(t)$, $D(t)$, $\Phi(y,t)$, $B(t)$, $H(y,t)$, $\Psi(y,t)$, $S(t)$ и $\Lambda(t)$ – заданные функции соответствующих размерностей, Y_0 – случайный вектор с известным начальным распределением.

Наблюдаемый процесс $Z(t)$ размерности N_Z поступает на вход оптимального фильтра, на выходе которого требуется получить оптимальную оценку фильтруемого СП $Y(t)$. В качестве оптимальных оценок СП $Y(t)$ при наличии измерений $Z(t)$ чаще всего служат [1–4; 8; 12; 14; 15]:

условное математическое ожидание

$$\widehat{Y}(t) = \int_{R^{N_Y}} y\, \widehat{\omega}(y,t/z)\, dy = \widehat{M}(t); \qquad (3)$$

мода

$$\widehat{Y}(t) = \arg\max_{y \in R^{N_Y}} \widehat{\omega}(y,t/z); \qquad (4)$$

медиана (0,5-квантиль)

$$\widehat{Y}(t) = MeY(t), \text{ где } m = MeY(t): \int_{-\infty}^{m} \widehat{\omega}(y,t/z)\, dy = \int_{m}^{\infty} \widehat{\omega}(y,t/z)\, dy = 0{,}5. \qquad (5)$$

Отметим, что мода и медиана в общем случае могут иметь более одного значения, медиана определена для одномерного случая $N_Y = 1$.

Апостериорная ПРВ $\widehat{\omega}(y,t/z)$ фильтруемого СП $Y(t)$, входящая в выражения (3)–(5), описывается известным уравнением Р.Л. Стратоновича [2; 8; 12; 14]. Однако его аналитическое решение может быть получено только в простейших случаях.

Проведенные исследования показали, что при решении задачи высокоточной нелинейной фильтрации негауссовых многомерных СП, наблюдаемых в непрерывных стохастических ДСФС, необходимо комплексно использовать как методы параметрической, так и функциональной аппроксимации апостериорной ПРВ [4; 5], в частности: «обычный» и модифицированный моментно-семиинвариантный методы, разработанные М.Л. Дашевским, А.Г. Кашкаровой и В.И. Шином [1; 3]; методы аппроксимации апостериорной ПРВ отрезком ряда Эджворта или Лагерра.

Данные методы позволяют интегрировать более простые дифференциальные уравнения для апостериорных центральных моментов фильтруемого СП, а выбор максимального порядка учитываемых апостериорных центральных моментов производится путем расчета по формулам связи апостериорных кумулянтов (семиинвариантов) фильтруемого СП с последующим приравниванием нулю нормированных к дисперсии кумулянтов высших порядков, значения которых равны или меньше заданных пороговых значений (например, 2–5% от значения апостериорных дисперсий, которые характеризуют точность фильтрации).

Для решения задачи нелинейной фильтрации СП в стохастических ДСФС можно применять последовательные методы Монте-Карло, а именно алгоритмы непрерывных фильтров частиц [12; 13]. В их основе лежит моделирование траекторий стохастической ДСФС согласно системе нелинейных СДУ (1). Каждой траектории ставится в соответствие весовая функция, значения которой вычисляются на основе измерений (2). Получение оценок фильтруемого СП осуществляется с помощью статистической обработки результатов моделирования: нахождение по траекториям среднего, моды либо медианы в зависимости от заданного критерия оптимальности согласно (3)–(5) с учетом весовой функции. С развитием вычислительной техники методы Монте-Карло для фильтрации СП можно применять в реальном масштабе времени для достаточно сложных стохастических ДСФС [13].

Далее опишем основные этапы в рассматриваемых подходах к решению задачи нелинейной фильтрации.

2. ФИЛЬТРАЦИЯ НЕГАУССОВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ФИКСИРОВАННОЙ СТРУКТУРОЙ

Данная методика включает семь основных этапов, каждый из которых состоит из нескольких подэтапов [4].

На первом этапе получено универсальное стохастическое интегро-дифференциальное уравнение (ИДУ) для апостериорного центрального момента произвольного R-го порядка $\widehat{\mu}_{r_1 r_2 \ldots r_R} \triangleq \langle \overset{\circ}{Y}_{r_1} \overset{\circ}{Y}_{r_2} \ldots \overset{\circ}{Y}_{r_R} \rangle$ фильтруемого негауссового СП $Y(t)$.

На втором этапе на основании данного универсального ИДУ записаны универсальные уравнения для апостериорных центральных моментов первых шести порядков для фильтруемого СП $Y(t)$. Универсальность этих уравнений состоит в том, что в них производные апостериорных центральных моментов $\widehat{M}_p$, $\widehat{D}_{pk}$, $\widehat{\mu}_{pki}$, $\widehat{\mu}_{pkij}$ и т.д. не зависят от конкретного вида математических моделей фильтруемого СП (например, вида (1)) и канала наблюдения (например, вида (2)), а выражены через их обобщенные характеристики, т.е. через коэффициенты вектора сноса, элементы матрицы диффузии и обновляющий процесс.

На третьем этапе получены развернутые системы стохастических ИДУ для апостериорных центральных моментов произвольного R-го и первых шести порядков фильтруемого СП, исходя из заданного вида математических моделей фильтруемого СП $Y(t)$ и канала наблюдения $Z(t)$.

На четвертом этапе с использованием метода статистической аппроксимации произвольных одно- и многоаргументных нелинейностей [4; 5] осуществлено сведение полученных на третьем этапе ИДУ к СДУ для апостериорных центральных моментов произвольного R-го и первых шести порядков фильтруемого СП $Y(t)$.

На пятом этапе получены формулы связи апостериорных центральных моментов произвольного R-го порядка с апостериорными кумулянтами СП $Y(t)$. Знание апостериорных кумулянтов необходимо для обоснованного усечения и замыкания полученных на четвертом этапе уравнений для апостериорных центральных моментов с использованием правил «обычного» или модифицированного моментно-семиинвариантного метода [1–4; 8; 14; 15].

На шестом этапе проведен синтез высокоточных оптимальных нелинейных фильтров в соответствии с выбранным критерием оптимальности фильтрации.

При использовании в качестве критерия оптимальности минимума среднего квадрата ошибки фильтрации (СКО-оценка) в качестве оптимальной оценки p-й фазовой координаты N_Y -мерного фильтруемого СП $Y(t)$ принимается ее апостериорное математическое ожидание, т.е. $\widehat{Y}_p = \widehat{M}_p$, $p = 1,\ldots,N_Y$.

При использовании в качестве критерия оптимальности максимума апостериорной ПРВ оптимальная оценка p-й фазовой координаты СП $Y(t)$ с точностью до учета апостериорных центральных моментов третьего $\widehat{\mu}_{ppp} = \widehat{\mu}_{3p}$ и четвертого $\widehat{\mu}_{pppp} = \widehat{\mu}_{4p}$ порядков (или, что одно и то же, с точностью до учета ее апостериорных асимметрии $\widehat{\gamma}_{1p}$ и эксцесса $\widehat{\gamma}_{2p}$) рассчитывается так [4]:

$$\widehat{Y}_p = \widehat{M}_p + \frac{3\widehat{\mu}_{3p}}{4\widehat{D}_p} - \frac{5\widehat{\mu}_{3p}\widehat{\mu}_{4p}}{12\widehat{D}_p^3}. \tag{6}$$

Выражение (6) получено путем аппроксимации апостериорной ПРВ $\widehat{\omega}(y,t/z)$ рядом Эджворта по полиномам Чебышева–Эрмита с точностью до седьмого члена ряда, рассчитываемых через апостериорные нормированные кумулянты k-го порядка $\widehat{\chi}_k$ и нахождения тех кумулянтов, при которых частная производная по ним от апостериорной ПРВ равна нулю, с последующей заменой апостериорных нормированных кумулянтов на апостериорные центральные моменты фильтруемого СП.

Если фильтруемый СП $Y(t)$ является существенно негауссовым, то для повышения точности фильтрации в ряде Эджворта следует учитывать большее число членов ряда. Если апостериорная ПРВ равна нулю при отрицательных значениях аргумента (например, показательная или релеевская), то вместо ряда Эджворта целесообразно использовать аппроксимацию апостериорной ПРВ с помощью ряда Лагерра.

На седьмом этапе осуществляется численное интегрирование на ЭВМ системы СДУ для апостериорных центральных моментов до четвертого порядка включительно, проверка фильтруемого СП $Y(t)$ на гауссовость (путем расчета модулей апостериорных коэффициентов асимметрии $\widehat{\gamma}_{1p}$ и эксцесса $\widehat{\gamma}_{2p}$ всех p-х фазовых координат), уточнение при необходимости итерационным образом порядка рассчитываемых апостериорных центральных моментов фильтруемого СП и нахождение его оптимальных оценок в соответствии с выбранным критерием оптимальности фильтрации согласно (3)–(5). Проверка на гауссовость проводится следующим образом: если модуль величины асимметрии не превышает 0,25 и модуль величины эксцесса не превышает 0,5, то с вероятностью 0,95 такой фильтруемый СП является гауссовым. Если все фазовые координаты имеют нормальную ПРВ, то такой фильтруемый СП является гауссовым и в этом случае ЭВМ автоматически не учитывает в алгоритмах фильтрации апостериорные центральные моменты выше второго порядка. В противном случае ЭВМ автоматически итерационным образом учитывает в алгоритмах фильтрации высшие центральные моменты для тех фазовых координат, которые не являются гауссовыми.

3. ПРИМЕНЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ МОНТЕ-КАРЛО (ФИЛЬТР ЧАСТИЦ)

Данная методика включает три основных этапа, каждый из которых состоит из нескольких подэтапов [12].

Первый этап состоит в получении аналога системы нелинейных СДУ (1) в дискретном времени, необходимого для численного моделирования стохастической ДСФС. Например, при использовании численного метода Эйлера

$$Y_{k+1} = Y_k + h\big(C(t_k) + D(t_k)Y_k + \Phi(Y_k,t_k)B(t_k) + Q(Y_k,t_k)\big) + \sqrt{h}H(Y_k,t_k)V_k, \tag{7}$$

где $Q(y,t)$ – в общем случае нелинейная функция, которая выражается через $H(y,t)$ при переходе от СДУ в смысле Стратоновича к соответствующему СДУ в смысле Ито; V_k – случайный вектор, координаты которого для всех k независимы и имеют стандартное гауссово распределение; h – шаг интегрирования: $h = t_{k+1} - t_k$; случайный вектор Y_0 моделируется согласно заданному распределению.

Второй этап предполагает нахождение интенсивности изменения весовой функции, определяющей вклад траектории стохастической ДСФС в искомую оптимальную оценку СП $Y(t)$:

$$\mu(y,z,t) = S^{\mathrm{T}}(t)\Psi^{\mathrm{T}}(y,t)\Xi^{-1}(t)\left(z - \frac{1}{2}\Psi(y,t)S(t)\right), \qquad \Xi(t) = \Lambda(t)\Lambda^{\mathrm{T}}(t).$$

Весовая функция и ее аналог в дискретном времени имеют вид

$$w(t) = \exp\left\{\int_{t_0}^{t}\mu(Y(\tau),Z(\tau),\tau)d\tau\right\}, \quad w_{k+1} = w_k \exp\{\mu(Y_k,Z_k,t_k)h\}, \quad w_0 = 1. \qquad (8)$$

Дополнительно функцию $\mu(y,z,t)$ можно рассматривать как интенсивность пуассоновского потока обрывов и ветвлений специального ветвящегося СП, построенного на основе системы нелинейных СДУ (1). Методы и алгоритмы нелинейной фильтрации СП, основанные на такой интерпретации, подробно изложены в [12].

На третьем этапе проводится синтез высокоточного оптимального нелинейного фильтра в соответствии с выбранным критерием оптимальности фильтрации и численное моделирование на ЭВМ.

При использовании в качестве критерия оптимальности минимума среднего квадрата ошибки фильтрации оптимальная оценка фильтруемого СП $Y(t)$ представляет собой взвешенное среднее по результатам численного моделирования пар «траектория + вес»:

$$\widehat{Y}(t_k) = \sum_i w_k^i Y_k^i \,/ \sum_i w_k^i,$$

где суммирование ведется по всем реализациям, которые получаются в результате численного моделирования решения уравнения (7) с учетом весовой функции (8).

При использовании в качестве критерия оптимальности максимума апостериорной ПРВ оптимальная оценка представляет собой вектор, на котором достигается максимум оценки апостериорной ПРВ, полученной на основе численного моделирования пар «траектория + вес». Для уменьшения вычислительных затрат можно находить эту оценку приближенно для p-й фазовой координаты СП $Y(t)$ на основе формулы (6) и взвешенных оценок центральных моментов третьего и четвертого порядков.

Финансирование
Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 17-08-00530.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дашевский М.Л. Семиинвариантный метод замыкания уравнений для моментов в задачах анализа нелинейных систем // Проблемы управления и теория информации. 1975. № 4. С. 317–328.
2. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Едиториал УРСС, 2004. 400 с.
3. Кашкарова А.Г., Шин В.И. Модифицированные семиинвариантные методы анализа стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 1986. № 2. С. 69–79.
4. Косачев И.М. Методология высокоточной нелинейной фильтрации случайных процессов в стохастических динамических системах с фиксированной структурой // Вестник Воен. акад. Респ. Беларусь. 2014. № 4 (45). С. 125–161.

5. Косачев И.М., Ерошенков М.Г. Аналитическое моделирование стохастических систем. Минск: Наука и техника, 1993. 264 с.
6. Марковская теория оценивания в радиотехнике / Под ред. Ярлыкова М.С. М.: Радиотехника, 2004. 504 с.
7. Методы классической и современной теории автоматического управления: в 5 т. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
8. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Теория стохастических систем. М.: Логос, 2004. 1000 с.
9. Руденко Е.А. Оптимальная структура нелинейных фильтров конечного порядка. М.: Изд-во МАИ, 1989. 64 с.
10. Руденко Е.А. Непрерывная конечномерная локально-оптимальная фильтрация диффузионно-скачкообразных сигналов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2018. № 4. С. 14–43.
11. Рыбаков К.А. Спектральный метод фильтрации и прогнозирования в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа // Научный вестник МГТУ ГА. 2016. № 224 (2). С. 14–23.
12. Рыбаков К.А. Статистические методы анализа и фильтрации в непрерывных стохастических системах. М.: Изд-во МАИ, 2017. 176 с.
13. Рыбаков К.А., Ющенко А.А. Непрерывные фильтры частиц и их реализация в реальном масштабе времени // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2018. № 3. С. 56–64.
14. Синицын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева. М.: Унив. кн., Логос, 2006. 640 с.
15. Современная и прикладная теория управления: Оптимизационный подход к теории управления: в 3 т. / Под ред. Колесникова А.А. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000.
16. Степанов О.А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации: в 2 т. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2017.
17. Bain A., Crisan D. Fundamentals of Stochastic Filtering. Springer, 2009. 394 p.
18. Bar-Shalom Y., Li X.R., Kirubarajan T. Estimation with Applications to Tracking and Navigation. John Wiley & Sons, 2001. 581 p.

Работа поступила 07.02.2019г.