

## МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 521.1

### О МОДЕЛИРОВАНИИ СВОБОДНЫХ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА ВОКРУГ ЗЕМЛИ

**Л.А. Кондратьева**

В рамках известной модели Дилиберто–Кайнера–Фройнда ставится задача аналитического определения эволюции свободных орбит спутников при движении вокруг Земли. На основе метода малого параметра предложен алгоритм для отыскания их приближенного представления. Полученные аналитические формулы определяют положение спутника как функции долготы. Приведены результаты аналитических расчетов, которые хорошо согласуются с численными решениями.

---

In the framework of the well-known Diliberto–Kiner–Freund model, the problem is posed of analytically determining the evolution of free orbits of satellites as they move around the Earth. Based on the small parameter method, an algorithm is proposed for finding their approximate representation. The resulting analytical formulas determine the position of the satellite as a function of longitude. The results of analytical calculations that are in good agreement with numerical solutions are given.

---

#### КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Движение спутника, метод малого параметра, аналитические приближения.

#### ДЛЯ ЦИТАТЫ

*Л.А. Кондратьева.* О моделировании свободных движений спутника вокруг земли // Моделирование и анализ данных. 2019. №3. С. 4-10.

*L.A. Kondratieva.* On modeling satellite free motions around the Earth. Modelirovaniye i analiz dannykh=Modelling and data analysis (*Russia*). 2019, no.3, pp.4-10.

#### ВВЕДЕНИЕ

Анализ движения спутников небесных тел остаётся одной из приоритетных задач нелинейной динамики. Наиболее существенное возмущение орбит спутников Земли связано с отклонением земного поля тяготения от центрального. Как известно, Земля представляет собой «сплюснутый у полюсов шар», у которого полярный радиус на 21 км короче экваториального.

Постоянная, ответственная за сжатие планеты, – один из основных параметров, связанных с запуском искусственных спутников Земли и отслеживании их движения на картах Земной поверхности. Сейчас разработаны новые методы наблюдения ИСЗ, которые позволяют определить положение спутника с точностью  $\pm 2$  см. Возникло новое направление небесной механики, позволяющее по движению спутника определять возмущающие силы – гравитационное поле планеты. Обратные задачи динамики успешно используются для решения задач – как геофизики, так и астрофизики.

Напомним, как влияет отклонение земного поля тяготения от сферического на орбиты спутников.

Наиболее сильно оно сказывается на положении плоскости орбиты. Эта плоскость не остается неизменной, а непрерывно поворачивается в пространстве. Если провести перпендикуляр к этой плоскости из центра Земли, то он будет описывать конус вокруг оси симметрии Земли, напоминая конус, который описывает при вращении ось волчка.

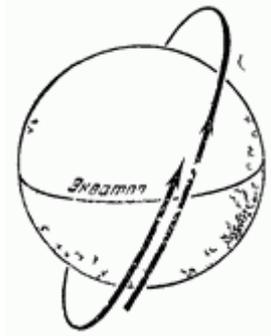


Рис. 1 Смещение орбиты за один виток

Поворачивание плоскости орбиты именуется её прецессией. В результате прецессии, спутник, совершив один оборот, пересекает экватор западнее, чем раньше, даже если предположить, что Земля не вращается (рис.1).

Плоскость полярной орбиты, из соображений симметрии, неподвижна; для круговых орбит, близких к экваториальной, это смещение происходит быстрее всего. Для низких орбит оно составляет  $0,6^\circ$  по экватору за один виток. При этом за один виток спутник смещается на 33,5 км в направлении, перпендикулярном к плоскости орбиты. Возмущение от не сферичности Земли падает по мере увеличения радиуса круговой орбиты.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Мы рассматриваем модель свободного движения спутника Земли, описанную в работе [2] и воспроизведённую в монографии [3]. Нашей целью является задача приближённого аналитического определения эволюции орбит спутника на основе метода малого параметра Пуанкаре и асимптотического метода Крылова–Боголюбова, а также сравнение аналитических расчетов с численными решениями.

Дифференциальные уравнения движения спутника вокруг планеты, как материальной точки, на которую действует только гравитационная сила, записываются в сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$ . Система координат выбрана традиционно: ось  $Oz$  совпадает с осью вращения планеты, две другие оси лежат в экваториальной плоскости. Введем переменные (орбиты, проходящие через полюсы или центр планеты, исключаются)

$$u = \operatorname{ctg} \theta, \quad v = (r \sin \theta)^{-1}$$

и запишем уравнения движения в виде [2, 3]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u &= -2\lambda u v (1 + u^2)^{-5/2} \\ \frac{d^2 v}{d\varphi^2} + v &= A(1 + u^2)^{-3/2} + \lambda v^2 [5(1 + u^2)^{-7/2} - 4(1 + u^2)^{-5/2}] \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь:  $A = \mu/p^2$ ;  $\lambda = I\mu R^2/p^2$ ;  $\mu$  – гравитационная постоянная планеты;  $R$  – ее экваториальный радиус;  $I$  – коэффициент определяющий сжатие Земли;  $p$  – постоянная интеграла площадей,  $r^2 \sin^2 \theta d\varphi/dt = p$ .

При введении переменных

$$x_1 = u, \quad x_2 = u'_\varphi, \quad y_1 = v, \quad y_2 = v'_\varphi$$

уравнения записываются в нормальной форме [2, 3]:

$$\frac{dx_1}{d\varphi} = x_2, \quad \frac{dx_2}{d\varphi} = -x_1 = -2\lambda_1 x_1 y_1 (1 + x_1^2)^{-5},$$

$$\frac{dy_1}{d\varphi} = y_2, \quad \frac{dy_2}{d\varphi} = -y_1 = -y_1 + A(1 + x_1^2)^{-3} + \lambda y_1^2 [5(1 + x_1^2)^{-7} - 4(1 + x_1^2)^{-5}]. \quad (2)$$

Все планеты солнечной системы обладают малым сжатием, поэтому величину  $\lambda$  можно считать малым параметром и в дальнейшем исследовании использовать метод Пуанкаре. Систему, полученную из (2) при  $\lambda = 0$  (в предположении, что планета имеет сферическую форму) называем невозмущённой:

$$\frac{dx_1}{d\varphi} = x_2, \quad \frac{dx_2}{d\varphi} = -x_1,$$

$$\frac{dy_1}{d\varphi} = y_2, \quad \frac{dy_2}{d\varphi} = -y_1 + A(1 + x_1^2)^{-3/2}. \quad (3)$$

Найдем аналитическое решение этой системы. Первые два уравнения имеют очевидное решение

$$x_1(\varphi) = \alpha \cos \varphi, \quad x_2(\varphi) = -\alpha \sin \varphi$$

(сдвиг фазы для простоты полагается равным нулю), а два других приводят к уравнению

$$\frac{d^2 y_1}{d\varphi^2} + y_1 = A(1 + \alpha^2 \cos^2 \varphi)^{-3/2}$$

Методом вариации постоянных ищем частное решение в виде:

$$y_1(\varphi) = C_1(\varphi) \cos \varphi + C_2(\varphi) \sin \varphi,$$

откуда получаем

$$\begin{cases} C_1'(\varphi) \cos \varphi + C_2'(\varphi) \sin \varphi = 0 \\ -C_1'(\varphi) \sin \varphi + C_2'(\varphi) \cos \varphi = A(1 + \alpha^2 \cos^2 \varphi)^{-3/2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(\varphi) = -A \sin \varphi (1 + \alpha^2 \cos^2 \varphi)^{-3/2} \\ C_2'(\varphi) = A \cos \varphi (1 + \alpha^2 \cos^2 \varphi)^{-3/2}. \end{cases}$$

С помощью замены  $z = \alpha \cos \varphi$  и последующих преобразований находим:

$$C_1(\varphi) = -\int A \sin \varphi (1 + \alpha^2 \cos^2 \varphi)^{-3/2} d\varphi = \frac{A \cos \varphi}{(1 + \alpha^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}},$$

$$C_2(\varphi) = \int A \cos \varphi (1 + \alpha^2 \cos^2 \varphi)^{-3/2} d\varphi = \frac{A \sin \varphi}{(1 + \alpha^2)(1 + \alpha^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}}.$$

Таким образом,

$$y_1(\varphi) = C_1(\varphi) \cos \varphi + C_2(\varphi) \sin \varphi = \frac{A \cos^2 \varphi}{(1 + \alpha^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}} + \frac{A \sin^2 \varphi}{(1 + \alpha^2)(1 + \alpha^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}} =$$

$$= \frac{A \sqrt{1 + \alpha^2 \cos^2 \varphi}}{1 + \alpha^2}.$$

Итак, решение системы уравнений (3):

$$x_1(\varphi) = \alpha \cos \varphi, \quad x_2(\varphi) = -\alpha \sin \varphi,$$

$$y_1(\varphi) = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + \frac{A}{1+\alpha^2} \sqrt{1+\alpha^2 \cos^2 \varphi},$$

$$y_2(\varphi) = C_2 \cos \varphi - C_1 \sin \varphi + \frac{A \alpha^2 \sin \varphi \cos \varphi}{(1+\alpha^2) \sqrt{1+\alpha^2 \cos^2 \varphi}}.$$

Все решения невозмущённой системы (3) периодические с периодом  $2\pi$ .

Можно, также, записать решения системы (3) в сферических координатах:  $\theta(\varphi)$ ,  $r(\varphi)$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $0 < \theta < \pi$ . Имеем:

$$x_1 = \operatorname{ctg} \theta(\varphi), \quad y_1 = \frac{1}{r(\varphi) \sin \theta(\varphi)},$$

а так как  $r(\varphi) \sin \theta(\varphi) = \frac{1}{y_1}$ , то для сферической системы координат

$$x = r \sin \theta \cos \varphi = \frac{1}{y_1} \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi = \frac{1}{y_1} \sin \varphi,$$

$$z = r \cos \theta = \frac{1}{y_1} \cdot x_1.$$

Здесь  $x_1 = \alpha \cos \varphi$ ,  $y_1(\varphi) = \beta \cos(\varphi + \varphi_0) + \frac{A}{1+\alpha^2} \sqrt{1+\alpha^2 \cos^2 \varphi}$  – найденные решения, если ввести обозначения  $\beta = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ ,  $\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{C_2}{C_1}$ . При этом

$$\theta(\varphi) = \operatorname{arcctg}(\alpha \cos \varphi), \quad r(\varphi) = \frac{1}{y_1 \sin \theta} = \frac{\sqrt{1+\alpha^2 \cos^2 \varphi}}{\beta \cos(\varphi + \varphi_0) + \frac{A}{1+\alpha^2} \sqrt{1+\alpha^2 \cos^2 \varphi}},$$

где  $\frac{1}{\sin \theta} = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 \theta} = \sqrt{1+\alpha^2 \cos^2 \varphi}$ , т.к.  $\operatorname{ctg} \theta = x_1 = \alpha \cos \varphi$ . Для того чтобы значение радиуса было положительным, необходимо потребовать выполнение условия  $\beta < \frac{A}{1+\alpha^2}$ .

При подстановке  $\varphi = 0$  можно отследить начальную точку на орбите:

$$\theta(0) = \theta_0 = \operatorname{arcctg} \alpha, \quad r(0) = \frac{1}{y_1 \sin \theta_0} = \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\beta \cos \varphi_0 + \frac{A}{\sqrt{1+\alpha^2}}} = \frac{1+\alpha^2}{\beta \cos \varphi_0 \sqrt{1+\alpha^2} + A}.$$

Если  $\beta = 0$ , то  $r(0) = \frac{1}{A}(1+\alpha^2)$ . При этом декартовы координаты начальной точки вычисляются по формулам:

$$x = r \sin \theta_0 \cos 0 = \frac{1}{y_1} = \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{A},$$

$$y = r \sin \theta_0 \sin 0 = 0,$$

$$z = r \cos \theta_0 = \frac{1}{y_1} \cdot x_1 = \frac{\alpha \sqrt{1+\alpha^2}}{A}.$$

В случае  $\alpha = 0$  имеем эллиптическую орбиту с постоянным значением  $\theta = \frac{\pi}{2}$ :

$$\theta(\varphi) \equiv \operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad r(\varphi) = \frac{1}{\beta \cos(\varphi + \varphi_0) + A}.$$

В декартовых координатах орбита расположена в плоскости  $z = 0$ :

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta_0 \cos \varphi = \frac{1}{\beta \cos(\varphi + \varphi_0) + A} \cos \varphi, \\y &= r \sin \theta_0 \sin \varphi = \frac{1}{\beta \cos(\varphi + \varphi_0) + A} \sin \varphi, \\z &= r \cos \theta_0 = 0.\end{aligned}$$

## 2. МЕТОДЫ МАЛОГО ПАРАМЕТРА И КРЫЛОВА–БОГОЛЮБОВА

Применим теперь к исходной системе (1) метод малого параметра. Ищем решения в виде асимптотических рядов с  $\lambda \ll 1$ :

$$\begin{aligned}u &= u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots, \\v &= v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2 + \dots.\end{aligned}$$

Подставим  $u, v$  в систему уравнений (1), раскладывая правые части по формуле Тейлора по степеням  $\lambda$  до 2-го порядка включительно:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\varphi^2}(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2) + u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 &= -\frac{2u_0 v_0}{(1+u_0^2)^{5/2}} \lambda + \left( -\frac{2u_0 v_1}{(1+u_0^2)^{5/2}} + \frac{2(4u_0^2 - 1)u_1 v_0}{(1+u_0^2)^{7/2}} \right) \lambda^2, \\ \frac{d^2}{d\varphi^2}(v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2) + v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2 &= \frac{A}{(1+u_0^2)^{3/2}} - \left( \frac{3u_0 u_1}{(1+u_0^2)^{5/2}} - v_0^2 \left( \frac{5}{(1+u_0^2)^{7/2}} - \frac{4}{(1+u_0^2)^{5/2}} \right) \right) \lambda - \\ &\left( \frac{3u_1^2}{(1+u_0^2)^{5/2}} - \frac{15u_0^2 u_1^2}{(1+u_0^2)^{7/2}} + \frac{6u_0 u_2}{(1+u_0^2)^{5/2}} - v_0 v_1 \left( \frac{20}{(1+u_0^2)^{7/2}} - \frac{16}{(1+u_0^2)^{5/2}} \right) + v_0^2 \left( \frac{70u_0 u_1}{(1+u_0^2)^{9/2}} - \frac{40u_0 u_1}{(1+u_0^2)^{7/2}} \right) \right) \frac{\lambda^2}{2}.\end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем для каждого приближения  $u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2$  свое дифференциальное уравнение.

Далее, пользуясь методом Крылова–Боголюбова [1], ищем порождающее решение возмущенной системы уравнений (1) в виде

$$\begin{aligned}u_0(a, \psi) &= a(\varphi) \cos \psi(\varphi), \\v_0(a, \psi) &= A \sqrt{1 + a(\varphi)^2 \cos^2 \psi(\varphi)},\end{aligned}$$

где  $a(\varphi), \psi(\varphi)$  – функции переменной  $\varphi$ , удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\varphi} &= \lambda A_1(a) + \lambda^2 A_2(a) + \dots \\ \frac{d\psi}{d\varphi} &= 1 + \lambda B_1(a) + \lambda^2 B_2(a) + \dots\end{aligned}$$

Функции  $u_0(a, \psi), v_0(a, \psi)$  описывают колебания с медленно меняющейся амплитудой  $a(\varphi)$  и частотой  $\frac{d\psi}{d\varphi}$ .

Имея целью найти периодические решения исходных уравнений (1), мы должны приравнять нулю коэффициенты при  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$  в правой части каждого уравнения. Из этих условий имеем:

$$B_1(a) = (1 + a^2)^{-5/2}, \quad A_1(a) = A_2(a) = 0.$$

Таким образом:

$$\frac{da}{d\varphi} = 0 + O(\lambda^3) \Rightarrow a(\varphi) = a_0 + O(\lambda^3),$$

$$\omega = \frac{d\psi}{d\varphi} = 1 + \lambda(1+a_0^2)^{-5/2} + O(\lambda^2) \Rightarrow \psi(\varphi) = \omega\varphi + \varphi_0.$$

Отсюда получаем решения в виде

$$u(a, \psi) = u_0(a, \psi) + \lambda u_1(a, \psi) + \lambda^2 u_2(a, \psi),$$

$$v(a, \psi) = v_0(a, \psi) + \lambda v_1(a, \psi) + \lambda^2 v_2(a, \psi).$$

Применяя данную методику, можно найти, например для  $a_0 = 0.6$ , аналитическое приближение решения системы уравнений (1). При начальных условиях

$$u(0) = 0.6, \quad u'(0) = 0,$$

$$v(0) = 0.876, \quad v'(0) = 0,$$

порождающее решение системы имеет вид

$$u_0(\varphi) = 0.6 \cos \omega\varphi,$$

$$v_0(\varphi) = \sqrt{1 + 0.36 \cos^2 \omega\varphi}.$$

Последовательно находим 1-ое приближение:

$$u_1(\varphi) = -0.0111 \cos 3\omega\varphi + 0.0004 \cos 5\omega\varphi - 0.00002 \cos 7\omega\varphi$$

$$v_1(\varphi) = 0.1557 + 0.0285 \cos 2\omega\varphi - 0.003 \cos 4\omega\varphi + 0.0002 \cos 6\omega\varphi;$$

затем 2-ое приближение:

$$u_2(\varphi) = 0.0094 \cos 3\omega\varphi - 0.0002 \cos 5\omega\varphi,$$

$$v_2(\varphi) = 0.0507 - 0.0145 \cos 2\omega\varphi + 0.0021 \cos 4\omega\varphi - 0.0001 \cos 6\omega\varphi.$$

### 3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Сопоставим полученное аналитическое приближение с численным решением системы (1) при  $\lambda = 0.1$  в пакете MAPLE. Как видим (рис.2,3), соответствующие графики совпадают.

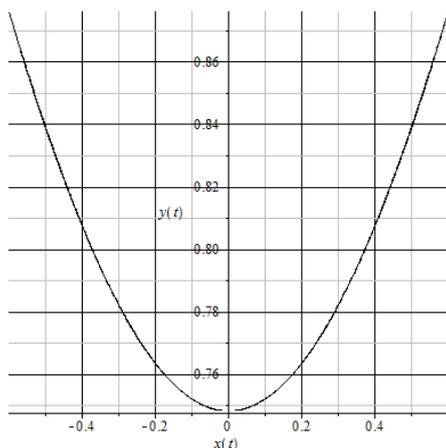


Рис. 2 Численное решение

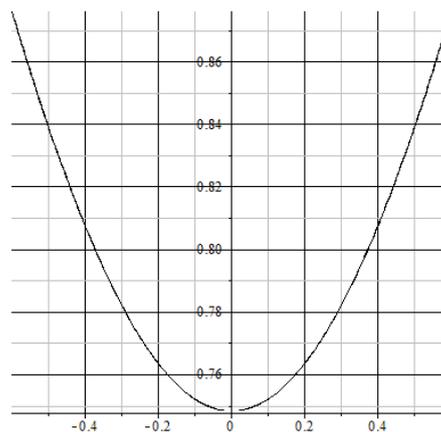
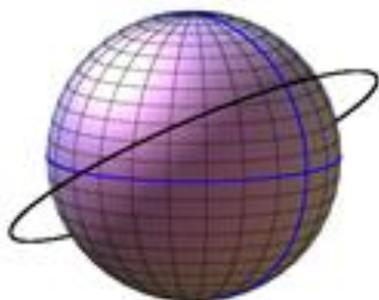
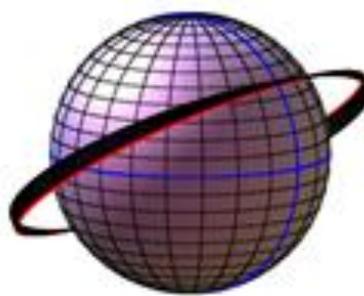
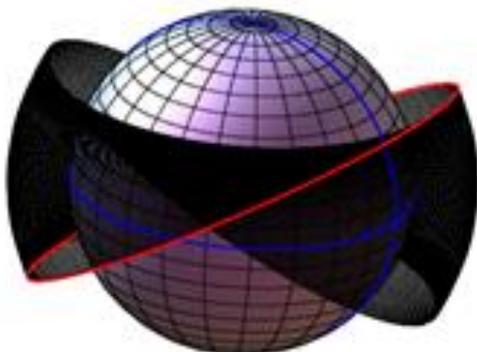
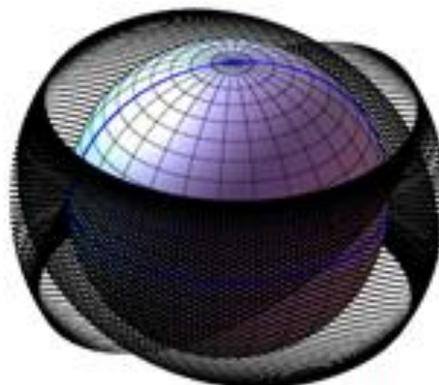
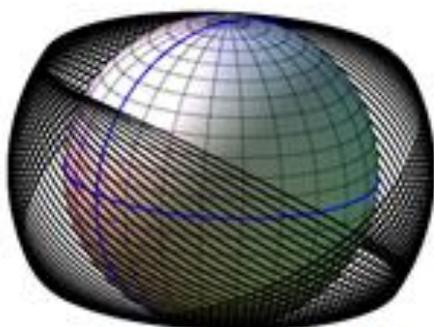
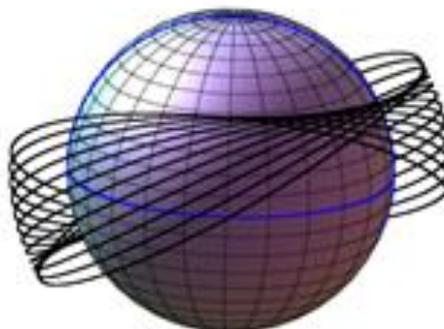


Рис. 3 Аналитическое приближение

Визуализируем полученные аналитические приближения для различных значений параметра  $\lambda$ . На рис. 5, 6 красным цветом выделена орбита, соответствующая  $\lambda = 0$

Рис. 4  $\lambda=0$ ,  $\varphi \in (0, \infty)$ Рис. 5  $\lambda=0.01$ ,  $\varphi \in (0, 16\pi)$ Рис. 6  $\lambda=0.01$ ,  $\varphi \in (0, 160\pi)$ Рис. 7  $\lambda=0.02$ ,  $\varphi \in (0, 150\pi)$ Рис. 8  $\lambda=0.03$ ,  $\varphi \in (0, 64\pi)$ Рис. 9  $\lambda=0.05$ ,  $\varphi \in (0, 16\pi)$ 

Как видим на рис.4, при  $\lambda=0$  орбита спутника плоская и замкнутая в декартовых координатах. При значениях  $\lambda$  отличных от нуля, происходит поворачивание плоскости орбиты, в результате чего спутник, с каждым оборотом отклоняется в западном направлении. С ростом значений  $\lambda$  отклонение на каждом витке становится все больше (см. рис.5-9).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974, 503 с.
2. Diliberto S.P., Kayner W.T., Freund R.J. The application of periodic surface theory to the study of satellite orbits // Astronom. J. 1961. V. 66, № 3, P. 118–128.
3. Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973, 512 с.

*Работа поступила 17.02.2019г.*