МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

УДК 004.942

МЕТАЭВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДВУХУРОВНЕВОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ

С.В. Иванов, А.Н. Пономаренко

Формулируется стохастическая двухуровневая задача размещения предприятий, в которой фигурируют два игрока: лидер и последователь. Первым свои предприятия размещает лидер, а затем последователь. Доход, получаемый от потребителей, предполагается случайным. На этапе принятия решения игрокам известен только закон распределения случайного дохода. Цель обоих игроков состоит в максимизации гарантированной с заданной вероятностью прибыли. Для случая гауссовского распределения случайных параметров задача сводится к детерминированной двухуровневой задаче. Для решения полученной задачи предлагаются два алгоритма, основанные на адаптации метаэвристических методов: метода имитации отжига и метода поиска с чередующимися окрестностями. На примере задачи размещения электростанций проводится сравнение эффективности двух разработанных алгоритмов.

We formulate a stochastic bilevel facility location problem with two players: leader and follower. The leader locates his facilities first before the follower does. The income got from consumers is assumed to be random. When the decision makes, the players know only the distribution of the random parameters. The players intend to maximize the income ensured with a given probably. For Gaussian distribution of random parameters, the problem is reduced to a deterministic bilevel one. To solve the problem, two algorithms are suggested. The algorithms are based on modifications of metaheuristic methods: simulated annealing and variable neighborhood search. We compare the efficiency of the developed algorithms for a power plant location problem.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА
Двухуровневая задача, стохастическая задача, квантиль, окрестности, метод имитации отжига, метод чередующихся окрестностей.

ДЛЯ ЦИТАТЫ
С.В. Иванов, А.Н. Пономаренко. Метаэвристические методы решения двухуровневой стохастической задачи размещения предприятий // Моделирование и анализ данных. 2019. №2. С.99-108.

S.V. Ivanov, A.N. Ponomarenko. Metaheuristic methods for solving a bilevel stochastic facility location problem. Modelirovaniye i analiz dannykh=Modelling and data analysis *(Russia)*. 2019, no.2, pp.99-108.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача конкурентного размещения предприятий описываются ситуацию, когда двое игроков в установленном порядке размещают свои предприятия с целью получения максимальной прибыли. Постановка данной задачи, методы ее исследования и ряд алгоритмов ее решения описаны в работе [1].

Для описания исследуемой задачи используется аппарат двухуровневой оптимизации [4,5]. Двухуровневые модели описывают взаимодействие двух игроков, поочередно принимающих решения. При этом предполагается, что игроки владеют полной информацией друг о друге. Применение моделей данного класса в близких задачах энергетики обсуждается в [5].

В силу случайной природы спроса на производимую продукцию на этапе принятия решения игрокам может быть неизвестна реализация спроса в момент реализации продукции. Поэтому возникает необходимость рассмотрения стохастических задач размещения предприятий. Обзор работ в этом области можно найти в [7]. Если лицу, принимающему решение, необходимо обеспечить гарантированную с некоторой вероятностью прибыль, то целесообразно использовать аппарат задач стохастического программирования с квантильным критерием. Квантильный критерий [3] описывает уровень потерь, который не может быть превышен с заданной вероятностью.

Задача конкурентного размещения предприятий с квантильным критерием была сформулирована в работе [2], где рассматривался случай дискретного распределения случайных параметров. При этом предполагалось, что реализация случайных параметров неизвестна только лидеру, тогда как последователь принимает решение при уже известной реализации спроса. Для данной задачи предложен метод поиска локально-оптимального решения и метод поиска нижней оценки оптимального решения. В [6] на основе комбинаторных методов предложен метод поиска улучшенной нижней оценки оптимального решения данной задачи.

В статье рассматривается двухуровневая задача конкурентного размещения предприятий в форме квантили в пессимистической постановке, т.е. лидер, при поиске оптимального решения, учитывает наихудшую для себя стратегию последователя. В отличие от [2,6], в исследуемой задаче ни лидеру, ни последователю не известны реализации случайных параметров. Для поиска оптимального решения лидера предлагается два алгоритма, основанные на метаэвристических методах: методе имитации отжига и поиске с чередующимися окрестностями.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сформулируем стохастическую задачу конкурентного размещения предприятий. Предполагается наличие двух игроков, по очереди размещающих свои предприятия с целью получения максимальной прибыли. Первый игрок называется лидером, а второй – последователем. Приведем описание параметров и оптимизационных переменных исследуемой математической модели.

Детерминированные параметры:

$I = \{1 \dots n\}$ – множество мест для размещения предприятий;

$J = \{1 \dots m\}$ – множество потребителей;

$f \in \mathbb{R}^n$ – вектор затрат, состоящий из компонент f_i, соответствующих стоимости размещения предприятия в i-м месте;

$D \in \mathbb{R}^{n\times m}$ – матрица предпочтений, состоящая из компонент d_{ij}, которые показывают приоритетность посещения i-го предприятия j-м потребителем. Неравенство $d_{i_1 j} > d_{i_2 j}$ означает, что для j-го потребителя посещение i_1-го предприятия предпочтительнее, чем i_2-го.

Случайные параметры:

X – матрица размерности $m \times n$, состоящая из случайных компонент X_{ij}, описывающих прибыль, получаемую i-м предприятием при его посещении j-м потребителем (реализация данной случайной матрицы и ее компонент обозначаются через x и x_{ij} соответственно).

Оптимизационные переменные:

$u \in \mathbb{R}^n$ – вектор размещения предприятий лидера, компоненты $u_i \in \{0; 1\}$, которого показывают, в каких местах лидер разместил свои предприятия. Если $u_i = 1$, то лидер разместил предприятие в i-м месте, если $u_i = 0$, то не разместил;

$U \in \mathbb{R}^{n\times m}$ – матрица, описывающая выбор предприятий лидера для обслуживания потребителей, если i-е предприятие лидера обслуживает j-го потребителя, то $u_{ij} = 1$, в противном случае $u_{ij} = 0$ (потребитель может посетить только одно из открытых предприятий, при этом должны учитываться его предпочтения);

$y \in \mathbb{R}^n$ – вектор размещения предприятий последователя, компоненты $y_i \in \{0; 1\}$, которого показывают, в каких местах последователь разместил свои предприятия. Если $y_i = 1$, то последователь разместил предприятие в i-м месте, если $y_i = 0$, то не разместил;

$Y \in \mathbb{R}^{n\times m}$ – матрица, описывающая выбор предприятий лидера для обслуживания потребителей, если i-е предприятие последователя обслуживает j-го потребителя, то $y_{ij} = 1$, в противном случае $y_{ij} = 0$.

Набор стратегий лидера обозначим через $\bar{u} = (u, U)$, а набор стратегий последователя – через $\bar{y} = (y, Y)$.

Функция потерь лидера имеет вид:

$$F(\bar{u}, \bar{y}, x) = \sum_{i=1}^{n} f_i u_i - \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} u_{ij} \right) \left(1 - \sum_{i}^{n} y_{ij} \right),$$

где первая сумма выражает затраты на размещение предприятий, а вторая сумма – полученную прибыль от потребителей с учетом возможного перехода потребителей к последователю после открытия новых предприятий. Естественно, лидер стремится обеспечить отрицательное значение функции потерь, что соответствует получению положительной прибыли.

Аналогичным образом записывается функция потерь последователя:

$$f(\bar{u},\bar{y},x) = \sum_{i=1}^{n} f_i\, y_i - \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} y_{ij}\right).$$

Рассмотрим функцию квантили, определённую по правилу

$$\Phi_\alpha(\bar{u},\bar{y}) = \min\{\varphi : P\{F(\bar{u},\bar{y},X) \le \varphi\} \ge \alpha\},$$

где $\alpha \in (0,1)$ – заданный уровень надёжности. Данная функция квантили выражает потери лидера, непревышение которых гарантируется с вероятностью α. Как правило, значение α выбирается близким к единице.

Аналогичным образом можно записывать квантиль потерь последователя:

$$\varphi_\beta(\bar{u},\bar{y}) = \min\{\varphi : P\{f(\bar{u},\bar{y},X) \le \varphi\} \ge \beta\},$$

где $\beta \in (0,1)$ –уровень надёжности последователя. Выбор уровня надёжности характеризует склонность игрока к риску, в общем случае может быть разным у лидера и последователя.

Последователь размещает предприятия, когда уже известна стратегия лидера $\bar{u} = (u, U)$. Последователь выбирает свою стратегию $\bar{y} = (y, Y)$ как решение оптимизационной задачи

$$\varphi_\beta(\bar{u},\bar{y}) \to \min_{\bar{y}}$$

при ограничениях

$$y_i \in \{0,1\},$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_{ij} \le 1,$$

$$y_i \ge y_{ij},$$

$$y_i + u_i + \sum_{l:d_{lj}<d_{ij}} y_{lj} \le 1.$$

Второе ограничение запрещает назначать для обслуживания потребителя более одного предприятия. Третье ограничение разрешает обслуживать последователю потребителя только в открытых последователем предприятиях. Четвертое ограничение, с одной стороны, запрещает открывать предприятия в уже местах, где расположено предприятие лидера, а с другой стороны, запрещает обслуживать потребителя в предприятиях, менее предпочтительных для данного потребителя, чем уже открытые лидером или последователем предприятия. Через $Y^*(\bar{u})$ обозначим множество оптимальных стратегий лидера, получаемых через решение сформулированной оптимизационной задачи.

Двухуровневая задача размещения предприятий (задача лидера) формулируется в виде

$$\max_{\bar{y}\in Y^*(\bar{u})} \Phi_\alpha(\bar{u},\bar{y}) \to \min_{\bar{u}}$$

при ограничениях

$$u_i \in \{0,1\},$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_{ij} = 1,$$

$$u_i \geq u_{ij},$$

$$u_i + \sum_{l:d_{lj}<d_{ij}} u_{lj} \leq 1.$$

Из второго ограничения следует, что лидер должен для обслуживания каждого потребителя назначить одно и только одно предприятие. Из третьего ограничения следует, что лидер может назначать для обслуживания потребителей только открытые предприятия. Четвёртое ограничение учитывает предпочтения потребителей, запрещая назначать для их обслуживания менее предпочтительные предприятия, чем уже открытые. Максимум в постановке задачи значит, что в случае нескольких оптимальных стратегий последователя лидер учитывает наихудшую для себя, что соответствует так называемой пессимистической постановке задачи двухуровневой оптимизации.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ

Исследуем случай гауссовского распределения случайной матрицы X. Пусть $M[X_{ij}] = \mu_{ij},\ cov(X_{ij}, X_{kl}) = K_{ijkl}$.

Для того, чтобы найти квантиль $\Phi_\alpha(\bar{u}, \bar{y})$ функции потерь лидера, получим выражения для ее математического ожидания и дисперсии. Через x_α обозначим квантиль уровня α стандартного нормального распределения. Введём обозначение

$$z_j(\bar{y}) = \left(1 - \sum_{i=1}^{n} y_{ij}\right)$$

Найдем математическое ожидание функции потерь лидера:

$$E_L(\bar{u},\bar{y}) = M\left[\sum_{i=1}^{n} f_i\, u_i - \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} X_{ij}u_{ij}\right)z_j(\bar{y})\right]$$

$$= M\left[\sum_{i=1}^{n} f_i\, u_i\right] - M\left[\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} X_{ij}u_{ij}\right)z_j(\bar{y})\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i\, u_i - \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} u_{ij}M[X_{ij}]\right)z_j(\bar{y})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i u_i - \sum_{j=1}^{m} z_j(\bar{y})\left(\sum_{i=1}^{n} u_{ij}\mu_{ij}\right).$$

Найдем дисперсию функции потерь лидера:

$$K_L(\bar{u},\bar{y}) = D\left[\sum_{i=1}^{n} f_i\, u_i - \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} X_{ij}u_{ij}\right)z_j(\bar{y})\right]$$

$$= D\left[\sum_{i=1}^{n} f_i\, u_i\right] + D\left[\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} X_{ij}z_j(\bar{y})u_{ij}\right)\right]$$

$$= \sum_{i\in I, j\in J, k\in I, l\in J} z_j(\bar{y})z_l(\bar{y})K_{ijkl}u_{ij}u_{kl}.$$

Таким образом,

$$F(\bar{u},\bar{y},X) \sim \mathcal{N}\left(E_L(\bar{u},\bar{y}), K_L(\bar{u},\bar{y})\right)$$

Квантиль $\Phi_\alpha(\bar{u},\bar{y})$ функции потерь лидера выражается через квантиль x_α стандартного нормального распределения:

$$\Phi_\alpha(\bar{u},\bar{y}) = x_\alpha\sqrt{K_L(\bar{u},\bar{y})} + E_L(\bar{u},\bar{y})$$

Теперь найдем квантиль $\varphi_\beta(\bar{u},\bar{y})$ функции потерь последователя. Для этого запишем выражения для ее математического ожидания:

$$E_F(\bar{y}) = M\left[\sum_{i=1}^{n} f_i y_i - \sum_{j=1}^{m}\sum_{i}^{n} y_{ij}X_{ij}\right] = M\left[\sum_{i=1}^{n} f_i y_i\right] - M\left[\sum_{j=1}^{m}\sum_{i}^{n} y_{ij}X_{ij}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i y_i - \sum_{j=1}^{m}\sum_{i}^{n} y_{ij}M[X_{ij}] = \sum_{i=1}^{n} f_i y_i - \sum_{j=1}^{m}\sum_{i}^{n} y_{ij}\mu_{ij}$$

и дисперсии

$$K_F(\bar{y}) = D\left[\sum_{i=1}^{n} f_i\, y_i - \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} X_{ij} y_{ij}\right)\right] = D\left[\sum_{i=1}^{n} f_i\, y_i\right] + D\left[\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} X_{ij} y_{ij}\right)\right]$$

$$= \sum_{i\in I, j\in J, k\in I, l\in J} K_{ijkl} y_{ij} y_{kl}.$$

Таким образом, можно записать
$f(\bar{y}, X) \sim \mathcal{N}\left(E_F(\bar{y}), K_F(\bar{y})\right)$.

Квантиль $\varphi_\beta(\bar{u}, \bar{y})$ функции потерь последователя выражается через квантиль x_β стандартного нормального распределения:

$$\varphi_\beta(\bar{u}, \bar{y}) = x_\beta \sqrt{K_L(\bar{y})} + E_L(\bar{y}).$$

4. ОПИСАНИЕ МЕТАЭВРИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Матрица назначения предприятий для обслуживания потребителей U строится единственным образом в зависимости от матрицы предпочтений D и вектора размещения предприятий u. Для того, чтобы найти матрицу U, из открытых предприятий лидера нужно выбрать наиболее предпочтительное для каждого из потребителей.

Оба метода используют окрестности вектора u

$$O_k(u) = \left\{\tilde{u} \in \{0,1\}^n : \sum_{i=1}^{n} |u_i - \tilde{u}_i| \le k\right\}$$

для поиска/генерации нового вектора стратегий размещения предприятий. Параметр k показывает для векторов из данной окрестности максимальное количество элементов, отличающихся от элементов вектора u. Для использования предлагаемых методов необходимо для каждого задаваемого значения u находить точное решение задачи последователя. Это реализуется с помощью стандартных методов целочисленной оптимизации.

Метод имитации отжига

Суть метода заключается в том, что для некоторого начального решения, соответствующего вектору размещению предприятий u, выбирается новая стратегия u' из данной окрестности. Если для новой стратегии u' значение оптимизируемой функции получается лучше, чем для u, то новая стратегия принимается за текущее решение. Если же решение получилось хуже, то оно принимается в качестве текущей стратегии с некоторой вероятностью. Тем самым, метод позволяет выходить из локальных минимумов и продолжать поиск глобальных минимумов. Процедура продолжается до стабилизации найденного решения.

Алгоритм

1. На входе параметр a имеет начальное значение, которое в процессе работы метода уменьшается. Так же задается нижняя граница данного параметра a_{min}.
2. Задается начальное произвольное состояние вектора u_0.
3. $i = 1$.
4. Пока $a_i > a_{min}$
   a. Генерируем новое состояние вектора u_c на основе предыдущего u_{i-1}, используя одну из окрестностей $O_1(u)$ или $O_2(u)$,
   b. $\Delta\varphi = \varphi(u_c) - \varphi(u_{i-1})$
   c. если $\Delta\varphi \le 0$, то $u_i = u_c$
   d. если $\Delta\varphi > 0$, то генерируется реализация равномерной случайной величины ξ на $(0,1)$
      i. если $\xi < exp\left(-\frac{\Delta\varphi}{t_i}\right)$, то $u_i = u_c$
      ii. если $\xi \ge exp\left(-\frac{\Delta\varphi}{t_i}\right)$, то $u_i = u_{i-1}$
   e. $a_{i+1} = \lambda a_i$, где $0.9 \le |\lambda| \le 1$, $i = i + 1$, перейти к шагу (4).

Метод чередующихся окрестностей (VNS)

Данный метод осуществляет поиск оптимального решения путем перебора возможных решений с помощью окрестностей $O_k(u)$. Одна из окрестностей $O_1(u)$ используется для локального поиска. Сначала осуществляется локальных поиск в окрестности $O_1(u)$ некоторого начального решения u. Если удается найти стратегию лучше исходной, то итерации начинаются сначала и продолжаются до тех пор, пока не будет найдено новое улучшенное решение. После этого увеличивается мощность окрестности k, которая показывает, сколько элементов вектора стратегии u, будет изменено. Получает новое значение и проводит локальный поиск.

Если было найдено значение лучше, то мощность понижается до единицы и все начинается сначала. Если хуже, то мощность увеличивается до заданной или до размерности вектора стратегии. Тем самым гарантируется, что будет найдено приближенное значение близкое или равное точному.

Алгоритм.

1. Выбрать окрестность $O_1(u)$ и начальное значение вектора стратегии.
2. Повторять, пока не выполнен критерий остановки.
   2.1. $k = 1$
   2.2. Повторять, пока $k \le k_{max}$. Если не выполнено, то переходим к пункту (2).

2.2.1. Случайно выбрать вектор стратегий из допустимого множества после применения поиска по $O_k(u)$

2.2.2. Применить локальный поиск к выбранной стратегии и получить локальный оптимум.

2.2.3. Если значение функции улучшилось, то проводим заново локальный поиск, если нет, то увеличиваем мощность окрестности. Переходим к пункту (2.2.).

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

На примере задачи конкурентного размещения электространций проведен численный эксперимент, в котором лидер и последователь размещают электростанции в n = 7 местах. Лидер и последователь поочередно размещают свои предприятия, основываясь на полученной прибыли от потребления электроэнергии потребителями, m = 100. Лидер и последователь учитывают наилучшие комбинации размещения друг друга, расставляя свои электростанции. Так же и лидеру, и последователю известны предпочтения потребителей по каждому из мест для размещения электростанций.

При решении задачи методом имитации отжига были получены графики изменения квантили функции потерь, представленные на рис.1.

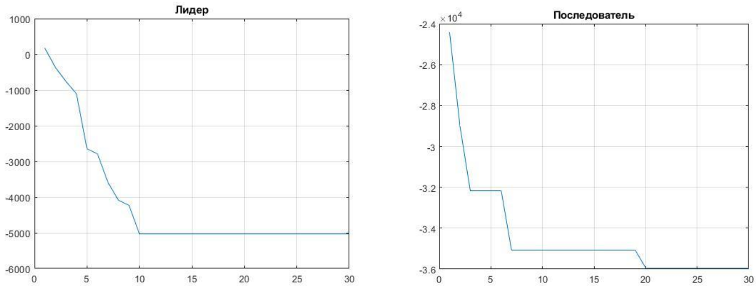

Рис. 1. Применение метода имитации отжига

В результате решения задачи найдены стратегия лидера: u = (1 0 1 0 0 0) и стратегия последователя: y = (0 1 0 0 1 0).

При решении задачи методом поиска с чередующимися окрестностями получены графики изменения квантили функции потерь, представленные на рис. 2.

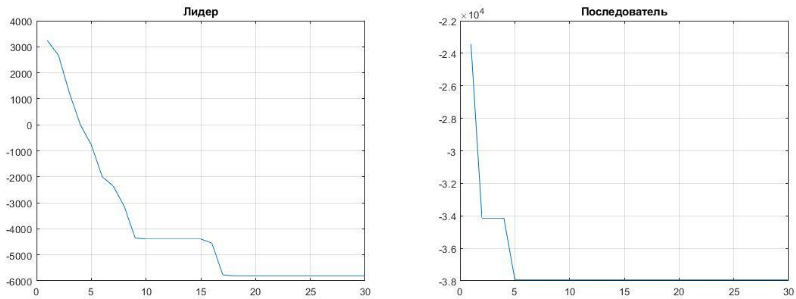

Рис. 2. Применение метода поиска с чередующимися окрестностями.

В результате решения найдена стратегия лидера u = (1 0 1 1 0 0) и стратегия последователя y = (0 1 0 0 0 1).

Таким образом, видно, что с помощью поиска с чередующимися окрестностями в данном примере удалось найти решение с меньшим значением минимизируемой функции, чем при применении метода имитации отжига. Это обусловлено тем, что метод поиска с чередующимися окрестностями, в отличие от метода имитации отжига, использует окрестности, в которых могут меняться более двух элементов вектора размещений.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе сформулирована новая стохастическая задача размещения предприятий, в которой ни лидеру, ни последователю не известны реализации случайных параметров задачи. Для случая гауссовского распределения случайных параметров задача сведена к детерминированной двухуровневой задаче, для решения которой адаптированы два метаэвристических метода: метод имитации отжига и метод поиска с чередующимися окрестностями. Для рассмотренного численного примера метод поиска с чередующимися окрестностями позволил найти решение с меньшим значением оптимизируемой функции.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 17-07-00203А.

ЛИТЕРАТУРА

1. Береснев В.Л., Мельников А.А. Приближенные алгоритмы для задачи конкурентного размещения предприятий//Дискрет. анализ и исслед. операций. 2010. Т. 17. №6. С. 3-10.
2. Иванов С.В. Морозова М.В. Стохастическая задача конкурентного размещения предприятий с квантильным критерием // АиТ. 2016. № 3. С. 109-122.
3. Кибзун А.И., Кан Ю.С. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
4. Bard J.F. Practical Bilevel Optimization: Algorithms and Applications. // Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998.
5. Dempe S, Kalashnikov V, Pérez-Valdés GA, Kalashnykova N. Bilevel Programming Problems - Theory, Algorithms and Applications to Energy Network. // Springer Verlag: Berlin, Heidelberg, 2015.
6. Melnikov A., Beresnev V. Upper Bound for the Competitive Facility Location Problem with Quantile Criterion // Lecture Notes in Computer Science. 2016. V. 9869. P. 373-387.
7. Snyder L.V. Facility location under uncertainty: a review // IIE Transact. 2006. V. 38. No. 7. P. 547–564.

Работа поступила 20.02.2019г.