УДК 004.942

АЛГОРИТМ ВНЕШНЕЙ АППРОКСИМАЦИИ ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА ДОПУСТИМЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ С ОГРАНИЧЕННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Д.Н. Ибрагимов, Е.Ю. Порцева

В работе рассматривается задача быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным множеством управления. Исследуется достаточное условие применимости аппроксимации выпуклого множества управления для оценки точности гарантирующего решения.

The paper considers the problem of minimum-time for a linear discrete system with a bounded set of controls. We study a sufficient condition for the applicability of the approximation of a convex control set to estimate the accuracy of a guaranteed solution.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Дискретная система управления, задача быстродействия, оптимальное позиционное управление, задача линейного программирования, множество управляемости, выпуклый многогранник, ограниченный полиэдр, выпуклый компакт, полиэдральная аппроксимация.

ДЛЯ ЦИТАТЫ

Д.Н. Ибрагимов, Е.Ю. Порцева. Алгоритм внешней аппроксимации выпуклого множества допустимых управлений для дискретной системы с ограниченным управлением // Моделирование и анализ данных. 2019. №2. С.83-98.

D.N. Ibragimov, E.Yu. Portseva. The algorithm of external approximation of a convex set of admissible controls for a discrete system with bounded control. Modelirovaniye i analiz dannykh=Modelling and data analysis *(Russia)*. 2019, no.2, pp.83-98.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача быстродействия является классической задачей теории оптимального управления, обладающей естественным функционалом качества.

Изначально данная задача была сформулирована для систем с непрерывным временем и полностью решена для случая линейных ограничений на управление.

Решение, основанное на принципе максимума [1-3] и методе динамического программирования [4], гарантирует, что управление будет релейно, то есть будет являться кусочно-постоянной функцией с конечным числом точек переключения и значениями в вершинах множества допустимых управлений.

Задачи оптимального управления для систем с дискретным временем в общем случае имеют ряд существенных отличий от аналогов с непрерывным временем. Зачастую они сводятся к решению задач выпуклого и линейного программирования [2,6,7,8]. Иногда удается получить результат, известный как дискретный принцип максимума [6]. Тем не менее, в случае дискретного времени традиционные методы теории оптимального управления оказываются неэффективны при решении задачи быстродействия. Более того, доказано, что формальное применение дискретного принципа максимума дает некорректные результаты [9,10].

Данные проблемы обусловленным дискретным характером критерия качества управления — времени, необходимого для достижения системой начала координат, что приводит к неединственности оптимального управления почти для всех начальных состояний. Актуальным оказывается поиск более эффективных методов.

В работах [9,11,12] рассмотрен метод решения поставленной задачи на основе класса множеств 0-управляемости — множеств тех начальных состояний, из которых система может быть переведена в начало координат за фиксированное число шагов. Алгоритм решения базируется на идее перевода состояния системы на каждом шаге в множество 0-управляемости за меньшее число шагов. В качестве критерия принадлежности состояния множеству используется функционал Минковского. В [11] продемонстрировано, что в случае линейных ограничений на управление задача быстродействия может быть полностью сведена к решению ряда ЗЛП. Однако аналогичный подход для случая выпуклых множеств допустимых управлений приводит к сложным задачам нелинейного математического программирования.

Данный факт делает актуальным решение задачи об аппроксимации множества допустимых управлений вложенным в него многогранником: решение задачи быстродействия для меньшего множества допустимых управлений будет являться гарантирующим решением в исходной задаче. Подобные задачи рассматривались в различных постановках прежде: например, в [13] предложен алгоритм аппроксимации α- ядра для решения задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь.

Для увеличения точности гарантирующего решения требуется определить критерий качества аппроксимации и построить алгоритм, позволяющий добиться сколь угодно малой величины этого критерия.

Решение поставленной задачи базируется на свойствах выпуклых множеств, рассмотренных в качестве точек метрических пространств [14-19].

Как известно [19], класс выпуклых многогранников является всюду плотным в пространстве компактов с метрикой Хаусдорфа. Данный факт гарантирует, что задача об аппроксимации может быть разрешена. В [12] разработан алгоритм, позволяющий приблизить произвольное выпуклое компактное множество (вписанным) в него многогранником, и доказана сходимость в смысле метрики Хаусдорфа.

Тем не менее, алгоритм, изложенный в [12], не позволяет оценить качество гарантирующего решения, что приводит к актуальности решения задачи об аппроксимации множества допустимых управлений (описанным) вокруг него многогранником. В этом случае оптимальное значение критерия для вспомогательной системы будет не больше, чем для исходной. В то время, как согласно [12] минимальное число шагов, необходимое для достижения 0, у вспомогательной системы будет не меньше, чем у исходной. В работе приведен обзор методов решения задачи быстродействия, изложенных в [9,11,12]. Также построен алгоритм внешней аппроксимации, который базируется на идее, разработанной в [13], которая заключается в процедуре построения равномерной сетки на n-мерном кубе, использующейся как множество нормалей к опорным гиперплоскостям выпуклого компакта.

Доказана сходимость разработанного алгоритма в смысле метрики Хаусдорфа. Эффективность новых методов опробована на примере решения задачи демпфирования высотного сооружения [20].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Решается задача быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным управлением в виде выпуклого компактного множества:

$$\begin{aligned} &x(i+1) = A\,x(i) + u(i),\\ &x(0) = x_0,\\ &u(i) \in \mathcal{U}, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Где для каждого $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ существует $x(i) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u(i) \in \mathbb{R}^n$ – вектор управления, на каждом шаге выбирающийся из множества допустимых управлений $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n, 0 \in \mathcal{U}, \operatorname{diam} \mathcal{U} < \infty,$ предполагается, что $\det A \neq 0$. Требуется перевести систему в ноль из начального состояния посредством допустимого управления за минимальное число шагов.

Наименьшее число шагов, необходимое, чтобы перевести систему из заданного начального состояния в 0 обозначим через N_{min}. Предполагается, что $N_{min} < \infty$, иначе задача быстродействия для системы (1) не имеет решения.

Далее используются следующие понятия:

1. Траектория $\{x^*(i)\}_{i=0}^{N_{min}}$ называется оптимальной, если $x^*(N_{min}) = 0$.

2. Оптимальным управлением $\{u^*(i)\}_{i=0}^{N_{min}-1}$ называется набор векторов из множества допустимых управлений $u^*(i) \in \mathcal{U}$ такой, что $x^*(N_{min}) = 0$.

3. Множество начальных состояний системы, из которых можно перейти в 0 за N шагов посредством выбора допустимых управлений, называется множеством 0-управляемости

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(N) &= \{x_0 : \exists\, u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = 0\},\\ \mathcal{X}(0) &= 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

4. Обозначим через $\mathcal{K} = [-1; 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ n-мерный куб с центром в начале координат и длиной ребра равной 2. Очевидно, что справедливо также представление

$$\mathcal{K} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \max_{\underline{k=1,n}} |x_k| \leq 1\right\}.$$

Построим на $\partial\mathcal{K}$ равномерную сетку

$$\mathcal{K}_N = \bigcup_{i=1}^{n} \left\{0; \pm\frac{1}{N}; \pm\frac{2}{N}; \dots; \pm 1\right\}^{i-1} \times \{-1; 1\} \times$$

$$\times \left\{0; \pm\frac{1}{N}; \pm\frac{2}{N}; \dots; \pm 1\right\}^{n-1}.$$

Заметим, что N_{min} можно также определить с помощью класса множеств 0-управляемости:

$$N_{min} = \min\,\{N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x_0 \in \mathcal{X}(N)\}. \qquad (3)$$

Для случая, когда множество допустимых управлений системы (1) имеет вид многогранника или полиэдра решение известно и сводится к решению задачи линейного программирования [11], но в случае, когда $\mathcal{U}$ - произвольный выпуклый компакт, возникает трудновычислимая задача выпуклого программирования. Для решения этой проблемы было предложено аппроксимировать множество допустимых управлений вписанным многогранником $\underline{\mathcal{U}}_R$. Решение задачи быстродействия для вспомогательной системы будем называть гарантирующим. Для оценки N_{min} аппроксимируется множество допустимых управлений описанным многогранником $\overline{\mathcal{U}}_R$. Тогда, имея $\underline{\mathcal{U}}_R \subset \mathcal{U} \subset \overline{\mathcal{U}}_R$, получаем оценку $\underline{N}_{min} \geq\geq N_{min} \geq \overline{N}_{min}$.

Однако величина $\underline{N}_{min} - \overline{N}_{min}$ может быть велика, в этом случае необходимо улучшить качество аппроксимации, а следовательно нужен критерий качества. Для критерия качества аппроксимации выпуклого множества многогранниками выбрана метрика Хаусдорфа

$$\rho_H(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \max\left\{\sup_{x\in\mathcal{X}}\inf_{y\in\mathcal{Y}}||x-y||; \sup_{y\in\mathcal{Y}}\inf_{x\in\mathcal{X}}||x-y||\right\},$$

так как согласно [5] многогранники плотны в $\mathbb{K}_n = \{\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n : \mathcal{X} - \text{компакт}\}$, а само метрическое пространство $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$ является полным.

Формулируется следующая задача.

Задача:

Построить последовательность $\{\overline{\mathcal{U}}_R\}_{R=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}_n : \overline{\mathcal{U}}_R$ *– описанный многогранник,*

$$\mathcal{U} \subset \overline{\mathcal{U}}_R : \rho_H(\mathcal{U}, \overline{\mathcal{U}}_R) \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Решение задачи для $\overline{\mathcal{U}}_R$ даёт оценку снизу N_{min}, что позволяет судить о качестве гарантирующего решения.

3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

В данном разделе приводятся обзор методов из [9,11,12], посвящённых решению задачи быстродействия в случае, когда $\mathcal{U}$ – многогранник, а так же метод построения гарантирующего решения для произвольного выпуклого $\mathcal{U}$.

Так как решение задачи строится на классе множеств 0-управляемости, сформулируем свойства этого класса.

Лемма 1 [11].

Пусть класс множеств $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ *определён соотношениями* (2). *Тогда верно представление*

$$\mathcal{X}(N) = -\sum_{i=1}^{N} A^{-i}\,\mathcal{U}. \qquad (4)$$

Следствие 1 [11].

Пусть $\{\mathcal{X}\ (N)\}_{N=0}^{\infty}$ *определяется соотношением* (2). *Тогда*

$$\mathcal{X}(N+1) = A^{-1}\,\mathcal{X}(N) + (-A^{-1}\,\mathcal{U}).$$

Лемма 2 [11].

Справедливы следующие свойства класса множеств 0-управляемости для любого $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

1. $\mathcal{X}(N)$ – выпуклый компакт;

2. $\mathcal{X}(N) \subset \mathcal{X}(N+1)$.

3. Если $\mathcal{U}$ – многогранник, то $\mathcal{X}(N)$ – многогранник.

Рассмотрим случай, когда на управление в системе (1) наложены только линейные ограничения:

$$\mathcal{U} = \bigcap_{k=1}^{K} \{u: (u, n^k) \le a_k\}. \quad (5)$$

То есть множество допустимых управлений $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ имеет вид полиэдра, ограниченного конечным числом гиперплоскостей с векторами нормалей $n^k \in \mathbb{R}^n$, ориентированными вовне множества $\mathcal{U}$. Известно, что в случае (5) задача быстродействия может быть сведена к задаче линейного программирования. Данный факт базируется на следующих свойствах класса выпуклых многогранников, доказанных в [11].

Лемма 3 [11].

Пусть $\mathcal{X} = conv\{v^1, \dots, v^M\}$ *– многогранник и* $x \in \mathbb{R}$, *тогда вычисление значения* $\mu(x, \mathcal{X})$ *сводится к решению задачи линейного программирования:*

$$\begin{gathered} \mu(x,\mathcal{X}) = \min_{r,\lambda_1,\dots,\lambda_n} r, \\ x = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i v^i, \\ \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \le r, \\ 0 \le \lambda_i \le r, i = \overline{1,M}. \end{gathered} \quad (6)$$

Лемма 4 [11].

Включение $x \in \mathcal{X}$ *верно тогда и только тогда, когда* $\mu(x, \mathcal{X}) \le 1$.

Определим функционал

$$S_N(x) = \arg\min_{u \in \mathcal{U}} \mu\big(x + u, \mathcal{X}(N)\big)$$

Согласно лемме 3, вычисление функционала $S_N(x)$ в любой точке $x \in \mathbb{R}^n$ сводится к решению ЗЛП

$$\min_{r,\lambda_1,\ldots,\lambda_M,u} r,$$
$$x + u = \sum_{j=1}^{M} v^j \lambda_j,$$
$$\sum_{j=1}^{M} \lambda_j \le r, \qquad (7)$$
$$0 \le r \le 1,$$
$$(u, n^k) \le \alpha_k, k = \overline{1, K}.$$

Далее приведена теорема, предлагающая вид оптимального позиционного управления в задаче быстродействия для системы (1) с управлением вида (5), доказанная в [11].

Теорема 1 [12].

Пусть для некоторого заданного $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *траектория системы* (1) *с управлением вида* (5) *определяется соотношениями*

$$x(i+1) = A\,x(i) + S_{N_{min}-i-1}\big(A\,x(i)\big), i = \overline{0, N_{min}-1},$$
$$x(0) = x_0.$$

Тогда

1. $x(N_{min}) = 0,$
2. оптимальное позиционное управление на i-м шаге имеет вид

$$u^*\big(i, x(i)\big) = S_{N_{min}-i-1}\big(A\,x(i)\big).$$

Алгоритм внутренней аппроксимации состоит из двух этапов. На первом этапе строится сетка на кубе и обозначатся узлы. На втором этапе определяется максимальное число, на которое нужно умножить узел из $\mathcal{K}_N$, чтобы он оставался внутри множества допустимых управлений. Таким образом, продолжив векторы из сетки на кубе до границы множества, получим совокупность вершин многогранника, вписанного в выпуклое множество допустимых управлений.

То есть, получив решение на множестве $\underline{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$ можно говорить о гарантирующим решении. А с увеличением качества аппроксимации решение будет стремиться к оптимальному. Таким образом, необходимо построить сходящуюся последовательность многогранников к $\mathcal{U}$.

Доказательство предложенного метода описано в работе [12] Далее представлена основная теорема, которая доказывает сходимость алгоритма внутренней аппроксимации.

Лемма 5 [12].

Пусть отображение $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *непрерывно во всём* $\mathbb{R}^n$. *Тогда отображение* $T: \mathbb{K}_n \to \mathbb{K}_n$ *также являются непрерывным во всём* $\mathbb{K}_n$, *где*

$$T(\mathcal{X}) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists x \in \mathcal{X}, y = T(x)\}.$$

Определим вспомогательную функцию

$$\alpha(x,\mathcal{X}) = \max_{\alpha x\in\mathcal{X};\alpha>0} \alpha.$$

где $\mathcal{X} \in \mathbb{K}_n$ – некоторый выпуклый компакт такой, что $0 \in int\ \mathcal{X}$. Тогда отображение $T_{\mathcal{X}}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ можно сформулировать следующим образом

$$T_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha(x,\mathcal{X})}{\alpha(x,\mathcal{K})}x, x \neq 0, \\ \quad 0, x = 0. \end{cases}$$

Теорема 2 [12].

Пусть $\mathcal{X} \in \mathbb{K}_n$ *– выпуклое множество,* $0 \in int\ \mathcal{X}$. *Тогда*

$$T_{\mathcal{X}}(\mathcal{K}_N) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \partial\mathcal{X},$$

$$conv\ T_{\mathcal{X}}(\mathcal{K}_N) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{X}.$$

Заметим, что множество $conv\ T_{\mathcal{X}}(\mathcal{K}_N)$ является многогранником, причём, верно включение

$$Ext\ conv\ T_{\mathcal{X}}(\mathcal{K}_N) \subset T_{\mathcal{X}}\ \mathcal{X}(\mathcal{K}_N).$$

То есть фактически теорема 4 гарантирует, что выбирая номер N, можно с любой степенью точности (в смысле расстояния Хаусдорфа) аппроксимировать произвольный выпуклый компакт вложенным в него многогранником.

Таким образом, аппроксимируя множество управления снизу, можно получить гарантированное число шагов, за которое возможно перевести систему из заданного начального значения в ноль. Запишем сам алгоритм внутренней аппроксимации.

Алгоритм 1. *Алгоритм внутренней аппроксимации выпуклого множества допустимых управлений*

1. Построить сетку $\mathcal{K}_R$ на n-мерном кубе. Обозначить узлы через n^k, где $k = 1, \dots, R$.

2. Определить значение следующей функции

$$\alpha(n^k,\mathcal{U}) = \max_{\substack{\alpha\, n^k\in\mathcal{U};\\ \alpha>0}} \alpha$$

3. Найти вершины многогранника $\underline{\mathcal{U}_R}$

$$T_{\mathcal{U}}(n^k) = \frac{\alpha(n^k,\mathcal{U})}{\alpha(n^k,\mathcal{K})}n^k. \tag{8}$$

4. Если $k = R$, то все вершины найдены, иначе увеличить k на 1 и вернуться к шагу 2.

Таким образом полученное множество $\underline{\mathcal{U}_R}$ представляет собой многогранник вписанный в $\mathcal{U}$, но содержит в себе меньше векторов управлений, что влияет на решение задачи быстродействия. Т.е. при решении задачи мы получаем оценку сверху минимального числа шагов, за которое систему (1) можно перевести в 0.

Для оценки снизу минимального числа шагов необходима аппроксимация сверху множества допустимых управлений.

4. АЛГОРИТМ ВНЕШНЕЙ АППРОКСИМАЦИИ

Для решения задачи быстродействия с ограниченным управлением в виде произвольного выпуклого множества необходима также аппроксимация сверху. Полученное множество допустимых управлений будет содержать больше векторов управления, таким образом, используя это множество, можно привести систему (1) в 0 за меньшее число шагов.

Алгоритм заключается в двух этапах. На первом этапе строится сетка на кубе и обозначаются узлы. На втором этапе узлы на сетке куба рассматриваются как нормали к опорным гиперплоскостям к множеству $\mathcal{U}$. Совокупность всех гиперплоскостей образует описанный вокруг $\mathcal{U}$ многогранник. На основе этих рассуждений запишем теоремы об аппроксимации.

Теорема 3.

Пусть $\overline{\mathcal{U}} \in \mathbb{K}_n$ *такое, что* $\mathcal{U} \subset \overline{\mathcal{U}}$.

1. *Тогда для множеств 0-управляемости будет выполнено следующее включение:*
$$\mathcal{X}(N) \subset \overline{\mathcal{X}}(N), N \in \mathbb{N},$$
где $\overline{\mathcal{X}}(N)$ *– множество 0-управляемости вспомогательной системы с множеством допустимых управлений* $\overline{\mathcal{U}}$.

2. *Тогда* $\overline{N}_{min} \le N_{min}$, *где* $\overline{N}_{min}$ *– минимальное число шагов, за которое систему* (1) *можно перевести в 0 посредством выбора управления из* $\overline{\mathcal{U}}$.

Доказательство

Доказательство пункта 1 теоремы непосредственно следует из леммы 2, а доказательство пункта 2 непосредственно следует из леммы 2 и соотношения (3).

Рассмотрим в качестве внешней аппроксимации для некоторого $N \in \mathbb{N}$ следующее множество:

$$\overline{\mathcal{U}}_R = \bigcap_{p \in \mathcal{K}_N} \left\{ u \in \mathbb{R}^n : (p, u) \le \max_{y \in \mathcal{U}} (p, y) \right\} \qquad (9)$$

Сформулируем и докажем теорему о сходимости.

Теорема 4.

Пусть $\overline{\mathcal{U}}_R$ *определяется соотношением* (11). *Тогда*

$$\rho_H(\overline{\mathcal{U}}_N, \mathcal{U}) \overset{\mathrm{N}\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Доказательство

В силу леммы 9 из [12]

$$\mathcal{K}_N \overset{\mathrm{N}\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{K},$$

Также для каждого $N \in \mathbb{N}$ верно включение $\mathcal{U} \subset \overline{\mathcal{U}}_R$.

Пусть $\hat{u} \in \overline{\mathcal{U}}_R \backslash \mathcal{U}$, тогда по теореме об опорной гиперплоскости [21] существует $p \in \mathcal{K}$ такой, что

$$(p, \hat{u}) > \max_{u \in \mathcal{U}} (p, u).$$

Обозначим $= (p, \hat{u}) - \max_{u \in \mathcal{U}} (p, u) > 0$ и выберем $p' \in \mathcal{K}_{R'}$ такой, что $||p' - p|| < \delta$.

Рассмотрим величину

$$|(p', \hat{u}) - (p, \hat{u})| = |p' - p, \hat{u}| \leq \big||p' - p|\big| \cdot \big||\hat{u}|\big| \leq \delta \big||\hat{u}|\big| \leq \delta \max_{u \in \mathcal{U}} ||u|| = \hat{\delta}.$$

Тогда при $u^* = \arg\max_{u \in \mathcal{U}} (p, u)$ выполнены соотношения

$$\max_{u \in \mathcal{U}} (p', u) - \max_{u \in \mathcal{U}} (p, u) = (p', u^*) - \max_{u \in \mathcal{U}} (p, u) \leq (p', u^*) - (p, u^*) =$$

$$= (p' - p, u^*) \leq ||p' - p|| \cdot ||u^*|| \leq \delta ||u^*|| \leq \delta \max_{u \in \mathcal{U}} ||u|| = \hat{\delta}.$$

Если выбрать δ так, чтобы $\hat{\delta} < \frac{\varepsilon}{2}$, то

$$(p', \hat{u}) - \max_{u \in \mathcal{U}} (p', u) \geq (p, \hat{u}) - \hat{\delta} - \max_{u \in \mathcal{U}} (p', u) \geq$$

$$\geq (p, \hat{u}) - \hat{\delta} - \max_{u \in \mathcal{U}} (p, u) - \hat{\delta} \geq \varepsilon - 2\,\hat{\delta} > 0.$$

Теперь рассмотрим $\rho_H(\overline{\mathcal{U}}_R, \mathcal{U})$. Учитывая, что $\overline{\mathcal{U}}_R \subset \mathcal{U}$,

$$\rho_H(\overline{\mathcal{U}}_R, \mathcal{U}) = \sup_{x \in \overline{\mathcal{U}}_R} \inf_{y \in \mathcal{U}} ||x - y||.$$

Поскольку для любых $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\inf_{y \in \mathcal{U}} ||x - y|| > \varepsilon$, существует $R' \in \mathbb{N}$, удовлетворяющий условию

$$\forall R'' \geq R' u \notin \overline{\mathcal{U}}_{R''} \Rightarrow \rho_H(\overline{\mathcal{U}}_{R''}, \mathcal{U}) \leq \varepsilon.$$

Откуда

$$\rho_H(\overline{\mathcal{U}}_R, \mathcal{U}) \overset{R \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Как видно последовательность множеств $\{\overline{\mathcal{U}}_R\}_{R=1}^{\infty}$ сходится к исходному множеству $\mathcal{U}$ с точки зрения расстояния Хаусдорфа.

Таким образом, получив оценку снизу минимального числа шагов, за которое возможно перевести систему из начального положения в ноль, можно рассуждать о качестве нижней аппроксимации множества допустимых управлений. Улучшая аппроксимацию, можно получить более точное решение. Запишем алгоритм внешней аппроксимации выпуклого множества допустимых управлений.

Алгоритм 2. *Алгоритм внешней аппроксимации выпуклого множества допустимых управлений*

1. Построить сетку $\mathcal{K}_R$ на n-мерном кубе. Обозначить узлы через n^k, где $k = 1, \ldots, R$.

2. Для всех $k = \overline{1, K}$ определить граничные точки множества $\mathcal{U}$ как
$$u^k = \arg\max_{u \in \mathcal{U}} (n^k, u),$$
и вычислить величины
$$\alpha_k = (n^k, u^k).$$

3. Составить полиэдр
$$\overline{\mathcal{U}}_R = \bigcap_{k=1}^{R} \{u: (n^k, u) \leqslant \alpha_k\}.$$

Построенное множества $\overline{\mathcal{U}}_R$ имеет вид полиэдра, в то время как множество $\underline{\mathcal{U}}_R$, построенное по алгоритму внутренней аппроксимации, имеет вид многогранника.

5. ЗАДАЧА ДЕМПФИРОВАНИЯ ВЫСОТНОГО СООРУЖЕНИЯ

Эффективность предложенных методов продемонстрирована на примере решения задачи демпфирования здания, расположенного в зоне сейсмических активностей. Данная модель была рассмотренна в [20].

Из-за сейсмических активностей возникают колебания сооружений, которые способствуют потере устойчивости и разрушению строения. Для гашения таких колебаний разработана задача управления сооружением по принципу обратной связи, за счёт дополнительных прикладываемых сил на это сооружение. Известны и широко применимы два совершенно противоположных метода управления сооружения по принципу обратной связи, а именно: динамическое гашение колебаний с использованием дополнительных материальных тел и виброзащита, предполагающая изоляцию сооружения от подвижного основания. Один из возможных вариантов технической реализации динамического гашения колебаний заключается в создании специального этажа с размещением на нем некоторой достаточно малой массы (по сравнению с общей массой сооружения), перемещаемой в соответствии с законом управления в форме обратной связи по текущим показаниям датчиков, что позволяет оказывать управляющее воздействие на данный этаж.

В качестве механической системы, моделирующей колебания высотного сооружения, будем рассматривать одномерную цепочку упругосвязанных материальных точек (этажей или секций сооружения), одна из которых (основание) совершает поступательное движение, порождаемое сейсмическим воздействием. Предполагается, что масса основания намного превышает массы остальных материальных точек и поэтому влиянием движения секций сооружения на движение основания можно пренебречь. В дальнейшем будем считать, что массы всех материальных точек одинаковы, а упругие и демпфирующие связи моделируются линейными элементами с одинаковыми коэффициентами упругости и демпфирования.

Уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид:

$$\begin{cases} m\ddot{\xi}_1(t) = -2b\dot{\xi}_1(t) - 2c\xi_1(t) + b\dot{\xi}_2(t) + c\xi_2(t) + U_1(t), \\ \vdots \\ m\ddot{\xi}_i(t) = -2b\dot{\xi}_i(t) - 2c\xi_i(t) + b\dot{\xi}_{i-1}(t) + \\ c\xi_{i-1}(t) + b\dot{\xi}_{i+1}(t) + c\xi_{i+1}(t) + U_i(t), \\ \vdots \\ m\ddot{\xi}_n(t) = -2b\dot{\xi}_n(t) - 2c\xi_n(t) + b\dot{\xi}_{n-1}(t) + c\xi_{n-1}(t) + U_n(t), \end{cases} \tag{10}$$

где ξ_i – координата i-й материальной точки относительно основания, $\mathcal{U}_i$ – управляющая сила, приложенная к i-й материальной точке; m – масса материальной точки, b и c – коэффициенты демпфирования и упругости межсекционных связей.

Введем обозначения

$$y(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \\ \dot{\xi}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n(t) \end{pmatrix}, v(t) = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ U_1(t) \\ \vdots \\ U_n(t) \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \frac{b}{m}, \omega^2 = \frac{c}{m}.$$

Тогда уравнения (10) можно привести к каноническому виду

$$\dot{y}(t) = A\,y(t) + v(t),$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\omega^2 K & -\beta K \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим следующие значения параметров. Пусть высота здания составляет 6 этажей, то есть $n = 6$. Также пусть $\beta = 1, \omega^2 = 100$. Значение параметров выбраны на основе модели, построенной в [20]. Полагая, что управление $v(t)$ является кусочно-постоянной функцией, меняющей свои значения через промежутки времени Δt, можно перейти к дискретному аналогу системы (10), обозначив

$$x(i) = y(i\,\Delta t).$$

Пусть $\Phi(t)$ – фундаментальная система решений (10). Тогда, пологая $v(i) = v_i$, справедливо представление

$$x(i+1) = \Phi(\Delta t)\,\Phi^{-1}(0)\,x(i) + (\Phi(\Delta t)\,\Phi^{-1}(0)\,A^{-1} - A^{-1})v_i.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} &\tilde{A} = \Phi(\Delta t)\,\Phi^{-1}(0), \\ &B = \Phi(\Delta t)\,\Phi^{-1}(0)A^{-1} - A^{-1}, \\ &u(i) = v_i, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Окончательно получим систему

$$\begin{aligned} x(i+1) &= \tilde{A}\,x(i) + B\,u(i), \\ x(0) &= y_0,\ u(i) \in \mathcal{U}. \end{aligned} \tag{11}$$

Где матрицы $\hat{A}, B \in \mathbb{R}^{12}$ – матрицы дискретной системы, $\mathcal{U}$ – множество допустимых управлений непрерывной системы, $x(i)$ – состояние системы на i-м шаге.

Будем полагать, что демпфирующие устройства установлены между 1-м и 2-м, 3-м и 4-м, 5-м и 6-м этажами. Тогда $u_2(i) = u_4(i) = u_6(i) = 0$, а множество допустимых управлений фактически является трёхмерным шаром. В данном случае теорема 1 неприменима, что затрудняет процесс решения задачи. То есть необходима аппроксимация множества допустимых управлений многогранником. Применим алгоритмы аппроксимаций 1 и 2 для аппроксимации. Полученные результаты изображены на рисунках 1-4.

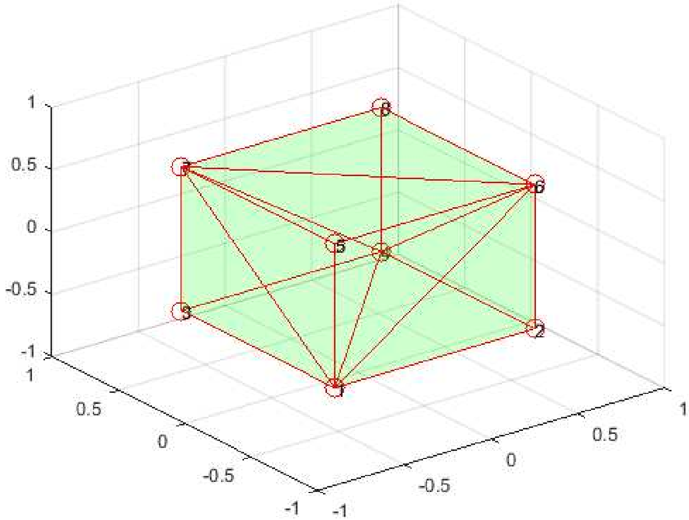

Рис. 1. Аппроксимация $\mathcal{U}$ снизу для 8 точек

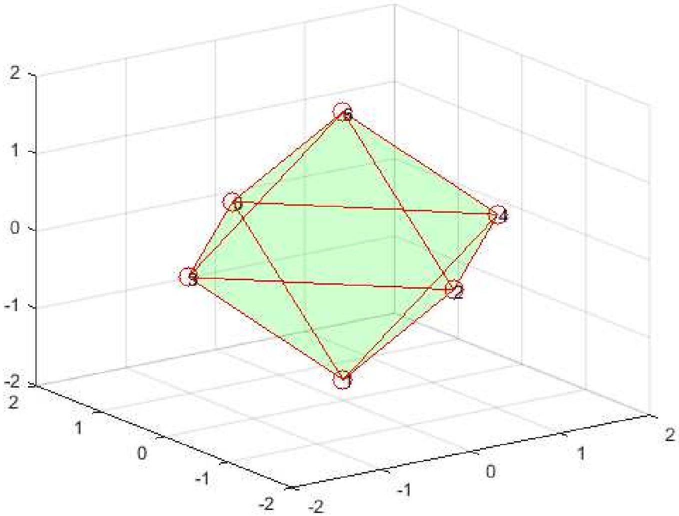

Рис. 2. Аппроксимация $\mathcal{U}$ сверху для 8 точек

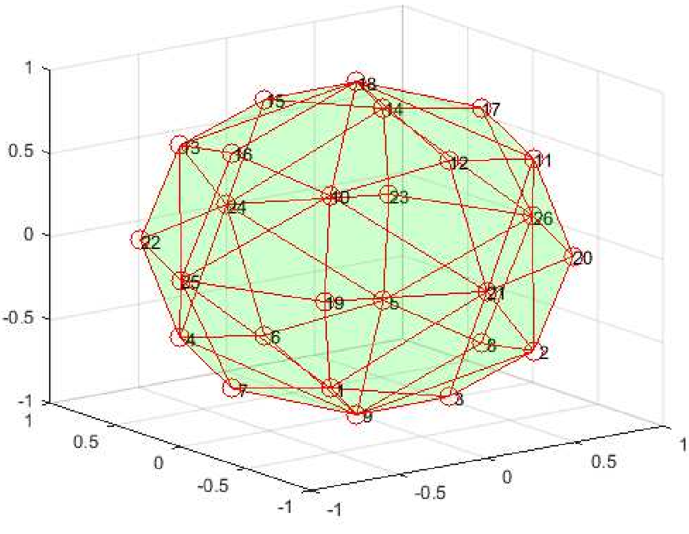

Рис. 3. Аппроксимация $\mathcal{U}$ снизу для 27 точек

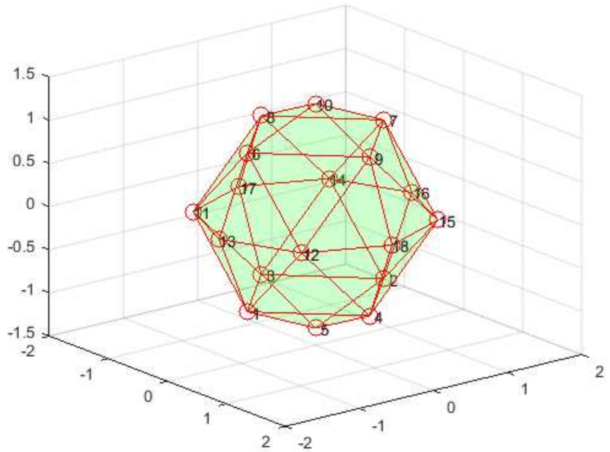

Рис. 4. Аппроксимация $\mathcal{U}$ сверху для 27 точек

Таким образом, для построения гарантирующего решения после аппроксимации $\mathcal{U}$ можно использовать теорему 1. Для начального состояния $y(0) = (0, -1, 0.5, 2.5, 1, 2, 3, 4, 3, 5, 6, 6.5)^T$ получены следующие результаты:

$$\underline{N}_{min} = 4, \overline{N}_{min} = 3.$$

Гарантирующие управления и траектория системы приведены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1. Оптимально позиционное управление.

k	0	1	2	3
$u_1^*(k)$	-0.0250	-0.0038	0.0436	-0.0011e-03
$u_2^*(k)$	-0.0440	-0.0016	0.1213	0.0147e-03
$u_3^*(k)$	-0.0650	0.0016	0.2151	0.0312e-03
$u_4^*(k)$	-0.0770	-0.0005	0.2347	0.0397e-03
$u_5^*(k)$	-0.0900	0.0069	0.3381	0.0489e-03
$u_6^*(k)$	-0.0920	0.0080	0.3521	0.0525e-03
$u_7^*(k)$	0.0420	-0.0057	-0.1801	-0.0217e-03
$u_8^*(k)$	0.0580	0.0004	-0.1755	-0.0635e-03
$u_9^*(k)$	0.0290	0.0404	0.2582	-0.0774e-03
$u_{10}^*(k)$	-0.5410	0.3670	4.8355	0.1180e-03
$u_{11}^*(k)$	0.0850	0.0721	0.3589	-0.0515e-03
$u_{12}^*(k)$	-0.1260	-0.0631	-0.1537	0.0345e-03

Таблица 2. Траектория системы.

k	0	1	2	3	4
$x_1^*(k)$	0	-0.0250	-0.0288	0.0148	0
$x_2^*(k)$	-1	0.0804	0.0788	0.0107	0
$x_3^*(k)$	0.5	-0.1489	-0.0471	0.0233	0
$x_4^*(k)$	2.5	0.1990	0.0313	0.0244	0
$x_5^*(k)$	1	-0.1683	0.0386	0.0155	0
$x_6^*(k)$	2	0.0708	0.0043	0.0277	0
$x_7^*(k)$	3	1.2298	1.2241	0.5678	0
$x_8^*(k)$	4	-1.8200	-2.391	-0.6328	0
$x_9^*(k)$	3	3.0290	3.8135	0.3671	0
$x_{10}^*(k)$	5	-5.3192	-4.9522	-0.1167	0
$x_{11}^*(k)$	6	6.0850	4.4845	0.3275	0
$x_{12}^*(k)$	6.5	0.6272	-0.2892	-0.2044	0

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача быстродействия для линейных дискретных систем с ограниченным управлением. Рассматривалось множество управлений в виде выпуклого компакта. Для решения данной задачи разработан алгоритм внешеней аппроксимации множества допустимых управлений. Доказана теорема о сходимости аппроксимированного множества к исходному множеству. Построен метод оценки критерия качества гарантирующего решения в задаче быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным управлением.

Отдельно рассмотрена задача быстродействия для демпфирующей системы здания в зоне сейсмических активностей. Произведена дискретизация непрерывной системы. Для заданного множества допустимых управлений в виде трёхмерного шара проведена аппроксимация по предложенному алгоритму и приведены иллюстрации. Найдено гарантирующее управление и траектория системы.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 18-08-00128-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Б.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.:Наука, 1969.
2. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.:Наука, 1969.
3. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. М.:Наука, 2005.
4. Беллман Р. Динамическое программирование. М.:ИИЛ, 1960.
5. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М.:Наука, 1973.
6. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.:Наука, 1973.
7. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.:Мир, 1977.
8. Табак Д., Куо Б. Оптимальное управление и математическое программирование. М.:Наука, 1975.
9. Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н. О задаче оптимального быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным скалярным управлением на основе множеств 0-управляемости // Автоматика и Телемеханика. 2015. №9. С.3-30.
10. Fisher M.E., Gayek J.E. Estimating Reachable Sets for Two-Dimensional Linear Discrete Systems // J. Optim. Theory Appl. 1988. V.56. No.1. P.67-88.
11. Ибрагимов Д.Н. Оптимальное по быстродействию управление движением аэростата // Труды МАИ. 2015. №83.
12. Ибрагимов Д.Н. Аппроксимация множества допустимых управлений в задаче быстродействия линейной дискретной системой // Труды МАИ. 2016. №87.
13. Васильева С.Н., Кан Ю.С. Метод решения задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь // Автоматика и телемеханика. 2015. №9. С.83-101.
14. Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.:ФИЗМАТЛИТ, 2004.
15. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.:ФИЗМАТЛИТ, 2012.
16. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. М.:Постмаркет, 2000.
17. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. Т. 1, 2. М.: Мир, 1991.
18. Овсеевич А.И., Черноусько Ф.Л. Свойства оптимальных эллипсоидов, приближающих области достижимости системы с неопределённостями // Известия РАН. Теория и системы управления. 2004, №4. С.8-18.
19. Берже М. Геометрия. Том 2. М.:МИР, 1984.
20. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.:Физматлит, 2007.
21. Дж. фон Нейман. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970. - 708 с.

Работа поступила 20.02.2019г.