МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 005+519.7

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В МОДЕЛИ ГОСУДАРСТВА II

В.К. Захаров, Д.В. Капитанов, О.А. Кузенков

В статье на основе *общей агрегированной модели государства в широком смысле* (близком к слову «*страна*»), *понятия реальной стоимости достояний* и *теории денег как средства государственного управления* создаётся *математическая модель государства с базисным использованием ссудного дохода* в виде системы из семи дифференциальных уравнений с восемью управляющими параметрами. Для неё ставится оптимизационная задача нахождения оптимальных управлений при различных функционалах качества. В качестве конкретного случая рассматривается *задача обеспечения максимума совокупного конечного достояния государства*. Приводится явное аналитическое решение полученной оптимизационной задачи.

Some *mathematical model of a state* is constructed in the form of a system of seven differential equations with eight controlling parameters. It is based on some *general aggregated model of a state in broad meaning* (close to the word «*country*»), on some *notion of a real cost of wealth,* and on some *theory of money as a weapon of state administration*. The optimization problem of finding the optimal controls under varies quality functionals is considered for this system. In the capacity of a concrete case the *problem of guaranteeing the maximum of the joint final wealth of a state* is considered. The explicit analytical solution of the obtained optimization problem is presented.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА
Государство в широком смысле, общая модель государства, реальная стоимость достояний, деньги как средство государственного управления, математическая модель государства, система экономических уравнений государства с базисным использованием ссудного дохода, оптимизационная задача, оптимальные управления, аналитическое решение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Статья состоит из трёх частей. В первой части, принадлежащей первому автору, излагается *общая агрегированная модель государства в широком смысле* (близком к слову «*страна*»), восходящая к работам [12, 14-17, 23].

Во второй части, также принадлежащей первому автору, на основе общей модели государства, нового *понятия реальной стоимости достояний*, развитой в работах [2-4, 6], и новой *теории денег как средства государственного управления*, развитой в работах [3-11], создаётся соответствующая математическая модель в виде системы из семи дифференциальных уравнений с восемью управляющими параметрами. Эта система называется далее ***системой экономических уравнений государства с базисным использованием ссудного***

дохода. Для неё ставится оптимизационная задача нахождения оптимальных управлений при различных функционалах качества. В качестве конкретного случая рассматривается ***задача обеспечения максимума совокупного конечного достояния государства***.

В третьей части, принадлежащей второму и третьему авторам, приводится **явное аналитическое** решение указанной выше оптимизационной задачи для системы экономических уравнений государства с базисным использованием ссудного дохода, которое позволяет дать эффективный численный алгоритм поиска оптимального управления. Такая авторская удача оказалась возможной на основе использования классических методов оптимального управления [1, 22] и приемов решения оптимизационных задач, разработанных в книгах [19, 21] и в статьях [18, 20]. В заключение находится численное решение задачи при одном наборе значений начальных данных, и приводятся соответствующие графики.

Статья является обобщением и развитием статьи [13], в которой решалась оптимизационная задача для более простой ***базисно-надстроечной модели государства с базисным использованием ссудного дохода***.

2. ОБЩАЯ АГРЕГИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ГОСУДАРСТВА В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ (СТРАНЫ)

2.1. Содержательная модель государства в широком смысле (страны)

Каждое государство в широком смысле, близком к слову страна, является сложной **трёхуровневой жизнедеятельной (и, в частности, организационно-производственной) подсистемой общества**, устроенной в виде совокупности ***основных систем***, связанных друг с другом в единое целое и зависящих друг от друга так, что без каждой из этих систем государство существовать не может. **Основными системами государства** являются: *содержательная, учётная, обеспечительная, совокупная распорядительная* и *властная системы*.

Содержательная система C осуществляет *аграрный* (*изымающий из природной среды*), *индустриальный* (*перерабатывающий*) и *сервисный* (*обслуживающий*) *способы жизнедеятельности*. ***Учётная система D*** осуществляет производство, сбор, хранение и раздачу денег, статистических сведений и т.п. ***Обеспечительная система E*** обеспечивает порядок, охрану, законность, нравственность и пр. ***Распорядительные системы F, G*** и ***H*** ведают деятельностью содержательной, учётной и обеспечительной систем соответственно. ***Властная система P*** осуществляет руководство совокупной распорядительной системой.

Властная система выделяет в учётной системе ***казначейскую систему***, осуществляющую производство, сбор и хранение денег. Она называется также *эмиссионным денежным центром государства*. Соответственно властная система выделяет в распорядительной системе ***денежно-распорядительное ведомство***, ведающее деятельностью казначейской системы.

Для использования денег самой содержательной системой властная система выделяет в учётной системе наряду с казначейской системой ***банковскую систему***, осуществляющую выдачу ссудных денег и сбор долговых и временно свободных денег, и подчиняет её деятельность денежно-распорядительному ведомству.

Далее властная система разрешает ***банковской системе*** брать в долг у казначейской системы некоторое количество денег, передавать их содержательным единицам **в долг с условием возврата с относительной прибавочной долей *r*** и затем вновь возвращать в эту казначейскую систему, причём дополнительно **с относительной прибавочной долей $p \le r$**.

Содержательная, учётная и обеспечительная системы связаны с *природной средой* $\boldsymbol{A_1}$, *внешней организованной средой* $\boldsymbol{A_2}$, состоящей из зарубежных жизнедеятельных единиц и государств, и *внутренней организованной средой* $\boldsymbol{A_3}$, состоящей из неконтролируемых государством теневых или криминальных единиц.

Используемые государством и производимые им достояния располагаются в единицах государства и во внешних средах. Все эти достояния подразделяются на следующие ***виды***: *содержательное* (код 1), *распорядительное* (код 2), *властное* (код 3), *обеспечительное* (код 4), *учётное* (код 5).

Каждая основная система производит *достояние своего вида*. При производстве соответствующего достояния каждая система использует некоторые из имеющихся в ней достояний. Все основные системы связаны между собой потоками производимых достояний.

Содержательная, учётная и обеспечительная системы получают из внешних сред и отдают в эти среды соответствующие достояния.

В сильно агрегированной форме устройство и функционирование государства, а также описание имеющихся в нём достояний и потоков дано на рисунке 1. На нем производимые достояния выделены квадратиком с жирным контуром. Дугами указаны *преобразовательные потоки*. *Передаточные потоки* показаны стрелками с указанием кодов на концах стрелок. *Произведённые потоки* обозначены прямыми входящими стрелочками, а *изведённые* – выходящими.

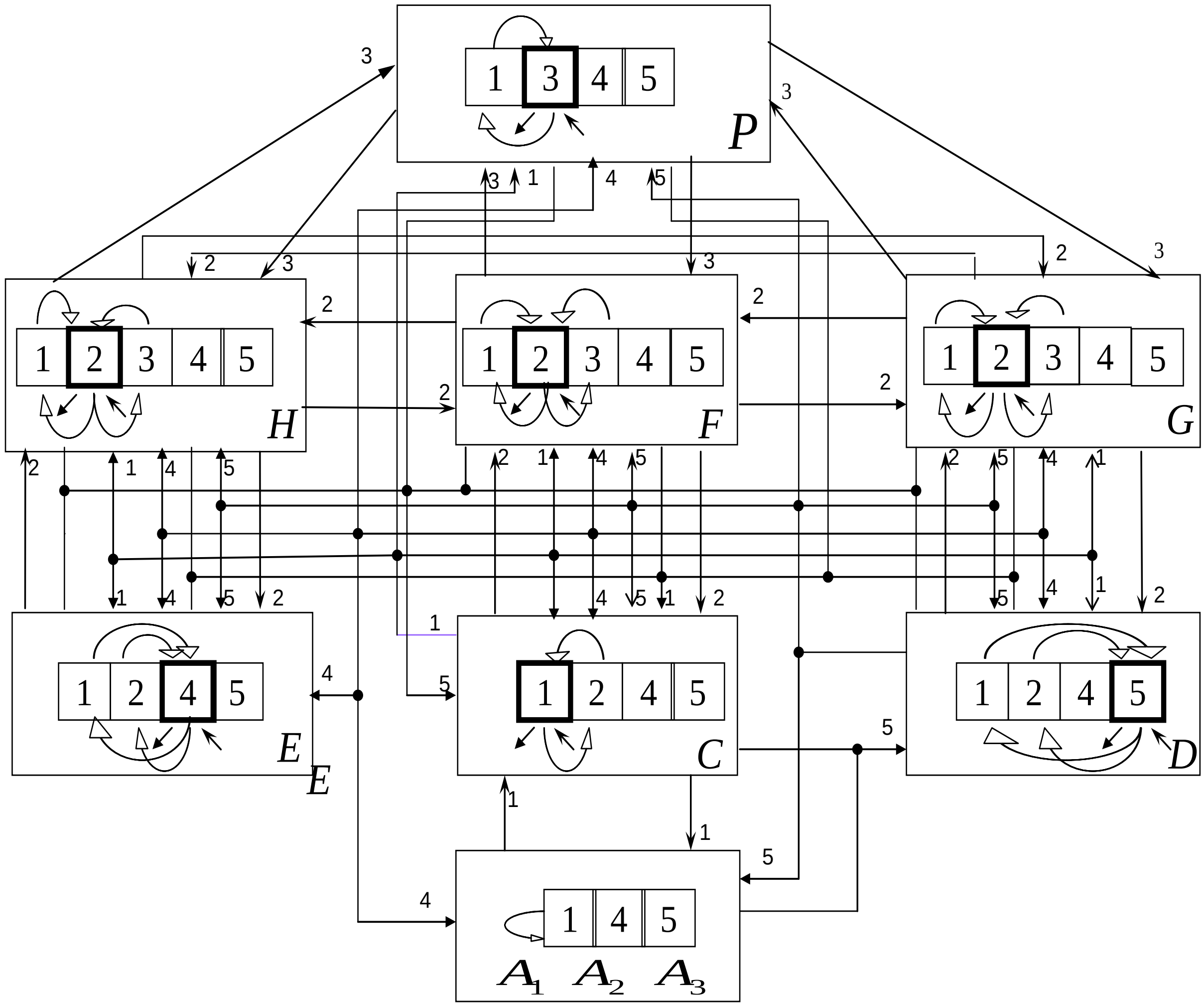


Рис. 1. Схема систем, достояний и потоков государства

2.2. Название и смысл потоков

Достояние вида *m* в системе *M* в момент времени *t* будем обозначать через $W_M^m(t)$. Поток из системы *M* в систему *N* достояния вида *m* в достояние вида *n* в момент времени *t* будем обозначать через $S_{MN}^{mn}(t)$. Указание на момент времени *t* будем в основном опускать. Потоки S_{MN}^{mn} при *M≠N* называются ***передаточными***. Потоки S_{MM}^{mn} при *m≠n* называются ***преобразовательными***.

Потоки S_{AC}^{11} для $A = A_1$, A_2 , A_3 назовем ***первичными***. Если $A = A_1$, то этот поток назовём ***первичным жизнеобеспечивающим***. Если $A = A_2$, то этот поток назовём ***первичным жизнеподдерживающим***. Если $A = A_3$, то этот поток назовём ***первичным подрывным***.

В содержательной системе *C* выделим ***казённую (бюджетную) часть*** C_b и ***не казённую (автономную) часть*** C_a.

Потоки $S_{CD}^{11}, S_{CE}^{11}, S_{CF}^{11}, S_{CG}^{11}, S_{CH}^{11}$ и S_{CP}^{11} назовем ***приходными***. В частности, считаем, что все работники систем *D, E, F, G, H* и *P* находятся в содержательной системе *C*. Поэтому они приходят из *C* в эти системы *M* в составе приходного потока S_{CM}^{11}. Значит, их заработок приходит к ним в составе денежного потока S_{MC}^{55}.

Потоки $S_{DD}^{15}, S_{EE}^{14}, S_{FF}^{12}, S_{GG}^{12}, S_{HH}^{12}$ и S_{PP}^{13} назовем ***после приходными***. Смысл их состоит в том, что содержательное достояние, пришедшее в системы *D, E, F, G, H* и *P* из содержательной системы *C*, *приходуется*, т.е. ставится на учёт как их основное достояние, используемое для собственной деятельности.

Потоки $S_{DD}^{51}, S_{EE}^{41}, S_{FF}^{21}, S_{GG}^{21}, S_{HH}^{21}, S_{PP}^{31}$ для систем *D, E, F, G, H, P* являются ***предотходными*** (ударение на третьем слоге). Смысл их состоит в том, что «отходы» деятельности системы *M* переводятся в переходное состояние, т.е. снимаются с учета и подготавливаются для последующей передачи в содержательную систему С.

Потоки $S_{DC}^{11}, S_{EC}^{11}, S_{FC}^{11}, S_{GC}^{11}, S_{HC}^{11}, S_{PC}^{11}$ для систем *D, E, F, G, H, P* являются ***отходными*** (ударение на втором слоге) ***содержательными***. Смысл их состоит в том, что «отходы» деятельности систем *M* передаются содержательной системе *C*. Например, кроме обычных отходов из обеспечительной системы *D* ежегодно возвращаются в содержательную систему отслужившие срок военнослужащие. Аналогическим образом поток $S_{CA_1}^{11}$ является ***отходным***. Отходы деятельности системы *C* сбрасываются в природную среду A_1.

Поток $S_{CA_2}^{11}$ является ***отдаточным.*** Результаты деятельности содержательной системы *C* передаются внешней организованной среде A_2 или в обмен на какое-либо достояние, или в виде дани, или в виде помощи и т.п.

Поток $S_{CA_3}^{11}$ является ***скрывающим.*** Результаты деятельности содержательной системы *C* скрытно передаются внутренней организованной среде A_3.

Потоки $S_{CC}^{12}, S_{DD}^{52}, S_{EE}^{42}, S_{FF}^{23}, S_{GG}^{23}$ и S_{HH}^{23} назовем ***преддокладными потоками*** (ударение на четвёртом слоге). Смысл их состоит в том, что созданная в системах *C, D, E, F, G, H* содержательная информация о деятельности систем переводится в переходное состояние, т.е. снимается с учета и подготавливается для последующей передачи в соответствующие вышестоящие системы.

Потоки $S_{CF}^{22}, S_{DG}^{22}, S_{EH}^{22}, S_{FP}^{33}, S_{GP}^{33}$ и S_{HP}^{33} назовем *потоками докладов* или ***доклад-ными потоками*** (ударение на третьем слоге). Смысл их состоит в том, что указанные системы *M* отправляют в вышестоящие системы информацию о своей деятельности.

Потоки $S_{FC}^{22}, S_{GD}^{22}, S_{HE}^{22}, S_{PF}^{33}, S_{PG}^{33}$ и S_{PH}^{33} назовем *потоками приказов* или ***приказ-ными потоками*** (ударение на третьем слоге). Смысл их состоит в том, что созданное в системах *F, G, H* и *P* распорядительное и властное достояния передаются для исполнения в нижележащие системы. Посредством трёх первых потоков ведомства распорядительных систем осуществляют ***ведомственное управление*** по отношению к соответствующим укладам содержательной, хранительной и обеспечительной систем, Посредством трёх вторых потоков властная система осуществляет ***властное управление*** по отношению к совокупной распорядительной системе.

Потоки $S_{CC}^{21}, S_{DD}^{25}, S_{EE}^{24}, S_{FF}^{32}, S_{GG}^{32}$ и S_{HH}^{32} назовем ***послеприказными потоками*** (ударение на пятом слоге). Смысл их состоит в том, что распорядительное и властное достояния, пришедшее в системы *C, D, E, F, G, H* из вышестоящих систем, *приходуется*, т.е. ставится на учёт как их основное достояние, принимается к исполнению и используется для собственной деятельности.

Потоки $L_{DC}^{55}, S_{DC_b}^{55}, S_{DD}^{55}, S_{DE}^{55}, S_{DF}^{55}, S_{DG}^{55}, S_{DH}^{55}$ и S_{DP}^{55} назовем ***учётными***. Смысл их состоит в том, что из учётной системы *D* во все системы передаются учётные достояния. Первый поток назовём ***ссудным*** **(*кредитным*)**, а остальные потоки назовём ***казённо-раздаточными***.

Потоки $S_{DC}^{55}, S_{EC}^{55}, S_{FC}^{55}, S_{GC}^{55}, S_{HC}^{55}$ и S_{PC}^{55} назовём ***предметно-трудовыми***. Смысл их состоит в том, что содержательная система для отдачи в учётную систему налогов T_{CD}^{55} и процентной части rL_{DC}^{55} от взятой из учётной системы ссуды L_{DC}^{55} **вынуждена** отдавать казённым системам *D,E,F,G,H* и *P* часть своего предметно-трудового содержательного достояния, получая от них указанные денежные достояния.

Потоки $S_{EC}^{44}, S_{ED}^{44}, S_{EE}^{44}, S_{EF}^{44}, S_{EG}^{44}, S_{EH}^{44}$ и S_{EP}^{44} назовем ***силовыми.*** Смысл их состоит в том, что из обеспечительной системы *E* во все системы для соблюдения в них порядка и законности временно передаются обеспечительные достояния, включающие в себя людей и оборудование. Отметим, что после выполнения поставленных задач эти достояния (возможно с потерями) в виде ***силовых возвратных потоков*** $S_{CE}^{44}, S_{DE}^{44}, S_{EE}^{44}, S_{FE}^{44}, S_{GE}^{44}, S_{HE}^{44}$ и S_{PE}^{44} возвращаются обратно в систему *E*.

Посредством учётных и силовых потоков уклады учётной и обеспечительной систем (по распоряжению соответствующих распорядительных ведомств) осуществляет ***побуждающее управление*** по отношению ко всем системам.

Потоки $S_{M\infty}^{11}$ назовем ***изведёнными***. В них включается та часть основного достояния систем *M=C,D,E,F,G,H,P*, которая в процессе их жизнедеятельности полностью исчезает или, иначе говоря, *изводится*. Например, руда после выплавки металла полностью исчезает; чистая бумага после того, как на ней напечатан приказ или закон, тоже исчезает полностью как чистая. Кроме того, сооружения и оборудование изнашиваются, ветшают и пр. Следовательно, изведённые потоки $S_{M\infty}^{mm}$ представляются в виде суммы $S_{M\infty}^{mm} = S_{M\leftrightarrow}^{mm} + S_{M\mapsto}^{mm}$ ***переработанного потока*** $S_{M\leftrightarrow}^{mm}$ и ***износного потока*** $S_{M\mapsto}^{mm}$.

Потоки $S^{11}_{\infty C}, S^{11}_{\infty D}, S^{11}_{\infty E}, S^{11}_{\infty F}, S^{11}_{\infty G}, S^{11}_{\infty H}$ и $S^{33}_{\infty P}$ назовем ***произведёнными***. В них включается та часть основного достояния систем C, D, E, F, G, H и P, которая «производится» именно в них, а не поступает откуда-либо извне. Здесь слово «производится» понимается в самом широком смысле. В частности, **отходы деятельности считаются произведёнными в системе**. Кроме того, полученный готовый **товар**, выставленный на продажу в каком-либо заведении и снабжённый в какой-либо форме информацией о цене, можно считать **произведённым в этом заведении**, поскольку над ним была произведена некоторая деятельность.

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГОСУДАРСТВА

Математическая модель государства создаётся на основе общей агрегированной модели государства, изложенной в первой части, посредством использования *реальной денежной стоимости достояний всех видов*, развитой в работах [2-4].

3.1. Система эволюционных уравнений государства в широком смысле (страны)

Система эволюционных уравнений государства составляется по следующему ***принципу сохранения***: скорость изменения реальной стоимости достояния какого-либо вида в какой-либо основной системе равно сумме реальных стоимостей всех входящих потоков этого достояния в эту систему минус сумма реальных стоимостей всех выходящих потоков этого достояния из этой системы. В итоге получается следующая система уравнений.

1)
$$\begin{aligned}\dot W^1_C(t) &= S^{11}_{AC} + S^{21}_{CC} + S^{11}_{\infty C} + S^{11}_{CC} + S^{11}_{DC} + S^{11}_{EC}\\ &+ S^{11}_{FC} + S^{11}_{GC} + S^{11}_{HC} + S^{11}_{PC} - S^{11}_{CA} - S^{12}_{CC} - S^{11}_{C\infty}\\ &- S^{11}_{CC} - S^{11}_{CD} - S^{11}_{CE} - S^{11}_{CF} - S^{11}_{CG} - S^{11}_{CH} - S^{11}_{CP}\end{aligned}$$

2) $$\dot W^2_C(t) = S^{12}_{CC} + S^{22}_{FC} - S^{21}_{CC} - S^{22}_{CF}$$

3) $$\dot W^4_C(t) = S^{44}_{EC} - S^{44}_{CE}$$

4)
$$\begin{aligned}\dot W^5_C(t) &= S^{55}_{DC_b} + L^{55}_{DC} + S^{55}_{DC} + S^{55}_{EC}\\ &+ S^{55}_{FC} + S^{55}_{GC} + S^{55}_{HC} + S^{55}_{PC} - S^{55}_{CD}\end{aligned}$$

5) $$\dot W^1_D(t) = S^{51}_{DD} + S^{11}_{CD} - S^{15}_{DD} - S^{11}_{DC}$$

6) $$\dot W^2_D(t) = S^{52}_{DD} + S^{22}_{GD} - S^{25}_{DD} - S^{22}_{DG}$$

7) $$\dot W^4_D(t) = S^{44}_{ED} - S^{44}_{DE}$$

8)
$$\begin{aligned}\dot W^5_D(t) &= S^{25}_{DD} + S^{15}_{DD} + S^{55}_{\infty D} + S^{55}_{CD} + S^{55}_{DD}\\ &- S^{52}_{DD} - S^{51}_{DD} - S^{55}_{D\infty} - S^{55}_{DC_b} - L^{55}_{DC} - S^{55}_{DC}\\ &- S^{55}_{DD} - S^{55}_{DE} - S^{55}_{DF} - S^{55}_{DG} - S^{55}_{DH} - S^{55}_{DP}\end{aligned}$$

9) $$\dot W^1_E(t) = S^{41}_{EE} + S^{11}_{CE} - S^{14}_{EE} - S^{11}_{EC}$$

10) $\dot{W}_E^2(t) = S_{EE}^{42} + S_{HE}^{22} - S_{EE}^{24} - S_{EH}^{22}$

11) $$\dot{W}_E^4(t) = S_{EE}^{24} + S_{EE}^{14} + S_{\infty E}^{44} + S_{CE}^{44} + S_{DE}^{44} + S_{EE}^{44} + S_{FE}^{44} + S_{GE}^{44} + S_{HE}^{44} + S_{PE}^{44} - S_{EE}^{42} - S_{EE}^{41} - S_{E\infty}^{44} - S_{EC}^{44} - S_{ED}^{44} - S_{EE}^{44} - S_{EF}^{44} - S_{EG}^{44} - S_{EH}^{44} - S_{EP}^{44}$$

12) $\dot{W}_E^5(t) = S_{DE}^{55} - S_{EC}^{55}$

13) $\dot{W}_F^1(t) = S_{FF}^{21} + S_{CF}^{11} - S_{FC}^{11} - S_{FF}^{12}$

14) $$\dot{W}_F^2(t) = S_{FF}^{32} + S_{FF}^{12} + S_{\infty F}^{22} + S_{CF}^{22} + S_{GF}^{22} + S_{HF}^{22} - S_{FF}^{23} - S_{FF}^{21} - S_{F\infty}^{22} - S_{FC}^{22} - S_{FG}^{22} - S_{FH}^{22}$$

15) $\dot{W}_F^3(t) = S_{FF}^{23} + S_{PF}^{33} - S_{FF}^{32} - S_{FP}^{33}$

16) $\dot{W}_F^4(t) = S_{EF}^{44} - S_{FE}^{44}$

17) $\dot{W}_F^5(t) = S_{DF}^{55} - S_{FC}^{55}$

18) $\dot{W}_G^1(t) = S_{GG}^{21} + S_{CG}^{11} - S_{GG}^{12} - S_{GC}^{11}$

19) $$\dot{W}_G^2(t) = S_{GG}^{32} + S_{GG}^{12} + S_{\infty G}^{22} + S_{DG}^{22} + S_{FG}^{22} + S_{HG}^{22} - S_{G\infty}^{22} - S_{GG}^{23} - S_{GG}^{21} - S_{GD}^{22} - S_{GF}^{22} - S_{GH}^{22}$$

20) $\dot{W}_G^3(t) = S_{GG}^{23} + S_{PG}^{33} - S_{GG}^{32} - S_{GP}^{33}$

21) $\dot{W}_G^4(t) = S_{EG}^{44} - S_{GE}^{44}$

22) $\dot{W}_G^5(t) = S_{DG}^{55} - S_{GC}^{55}$

23) $\dot{W}_H^1(t) = S_{HH}^{21} + S_{CH}^{11} - S_{HH}^{12} - S_{HC}^{11}$

24) $$\dot{W}_H^2(t) = S_{HH}^{32} + S_{HH}^{12} + S_{\infty H}^{22} + S_{EH}^{22} + S_{FH}^{22} + S_{GH}^{22} - S_{HH}^{23} - S_{HH}^{21} - S_{H\infty}^{22} - S_{HE}^{22} - S_{HF}^{22} - S_{HG}^{22}$$

25) $\dot{W}_H^3(t) = S_{HH}^{23} + S_{PH}^{33} - S_{HH}^{32} - S_{HP}^{33}$

26) $\dot{W}_H^4(t) = S_{EH}^{44} - S_{HE}^{44}$

27) $\dot{W}_H^5(t) = S_{DH}^{55} - S_{HC}^{55}$

28) $\dot{W}_P^1(t) = S_{PP}^{31} + S_{CP}^{11} - S_{PP}^{13} - S_{PC}^{11}$

29) $$\dot{W}_P^3(t) = S_{PP}^{13} + S_{\infty P}^{33} + S_{FP}^{33} + S_{GP}^{33} + S_{HP}^{33} - S_{PP}^{31} - S_{P\infty}^{33} - S_{PF}^{33} - S_{PG}^{33} - S_{PH}^{33}$$

30) $\dot{W}_P^4(t) = S_{EP}^{44} - S_{PE}^{44}$

31) $\dot{W}_P^5(t) = S_{DP}^{55} - S_{PC}^{55}$

Далее составленная система эволюционных уравнений упрощается путём наложения описываемых ниже *допущений для потоков достояний*. Часть допущений основана на *предположении о сохранении реальной стоимости достояний*, другая часть допущений основана на новой *теории денег как средства государственного управления*, развитой в работах [3-11]. Самыми эвристическими допущениями являются допущение 14 о виде ссудного потока и допущение 15 о виде изводных потоков.

3.2. Допущения для потоков

1. Считаем, что послесодержательные потоки и содержательные потоки имеют одинаковую реальную стоимость, т.е.

$$S_{DD}^{15} = S_{CD}^{11}, S_{EE}^{14} = S_{CE}^{11}, S_{FF}^{12} = S_{CF}^{11}, S_{GG}^{12} = S_{CG}^{11}, S_{HH}^{12} = S_{CH}^{11}, S_{PP}^{13} = S_{CP}^{11}.$$

2. Считаем, что предотходные потоки и отходные потоки имеют одинаковую отрицательную реальную стоимость, т.е.

$$S_{DD}^{51} = S_{DC}^{11}, S_{EE}^{41} = S_{EC}^{11}, S_{FF}^{21} = S_{FC}^{11}, S_{GG}^{21} = S_{GC}^{11}, S_{HH}^{21} = S_{HC}^{11} \text{ и } S_{PP}^{31} = S_{PC}^{11}.$$

3. Считаем, что обменные потоки между распорядительными системами равны, т.е.

$$S_{FG}^{22} = S_{GF}^{22}, S_{FH}^{22} = S_{HF}^{22}, S_{GH}^{22} = S_{HG}^{22}.$$

4. Считаем, что преддокладные и докладные потоки имеют одинаковую реальную стоимость, т.е.

$$S_{CC}^{12} = S_{CF}^{22}, S_{DD}^{52} = S_{DG}^{22}, S_{EE}^{42} = S_{EH}^{22},$$
$$S_{FF}^{23} = S_{FP}^{33}, S_{GG}^{23} = S_{GP}^{33}, S_{HH}^{23} = S_{HP}^{33}.$$

5. Считаем, что послеприказные и приказные потоки имеют одинаковую реальную стоимость, т.е.

$$S_{CC}^{21} = S_{FC}^{22}, S_{DD}^{25} = S_{GD}^{22}, S_{EE}^{24} = S_{HE}^{22},$$
$$S_{FF}^{32} = S_{PF}^{33}, S_{GG}^{32} = S_{PG}^{33}, S_{HH}^{32} = S_{PH}^{33}.$$

6. Считаем, что из каждой не содержательной системы в «обмен» на предметно-трудовую компоненту (см. далее) уходит в содержательную систему учётного достояния столько, сколько его приходит в систему из учётной системы, т.е.

$$S_{DC}^{55} = S_{DD}^{55}, S_{EC}^{55} = S_{DE}^{55}, S_{FC}^{55} = S_{DF}^{55},$$
$$S_{GC}^{55} = S_{DG}^{55}, S_{HC}^{55} = S_{DH}^{55}, S_{PC}^{55} = S_{DP}^{55}.$$

Эти равенства означают равенство денежных предметно-трудовых и казённо-раздаточных потоков.

7. Денежные казённо-раздаточные потоки $S_{DD}^{55}, S_{DE}^{55}, S_{DF}^{55}, S_{DG}^{55}, S_{DH}^{55}, S_{DP}^{55}$ передаются учётной системой соответственно учётной, обеспечительной, совокупной распорядительной

и властной системам **без условия возврата**. Денежный казённо-раздаточный поток $S_{DC_b}^{55}$ передаётся учётной системой казённой части содержательной системы также **без условия возврата**.

Полный казённо-раздаточный поток $S_{D\Sigma}^{55}$ имеет вид

$$S_{D\Sigma}^{55} = S_{DC_b}^{55} + S_{DD}^{55} + S_{DE}^{55} + S_{DF}^{55} + S_{DG}^{55} + S_{DH}^{55} + S_{DP}^{55}.$$

Денежный ссудный поток L_{DC}^{55} передаётся учётной системой неказённой части содержательной системы **на условии возврата с процентом *r100%.*** (здесь буква L от слова «loan»). Он в конечном итоге возвращается в учётную систему вместе с процентной частью от ссуды, т.е. в виде ***возвратного сбора*** $L_{DC}^{55} + rL_{DC}^{55}$. Число $r100\%$ называется ***учётной ставкой центрального вводчика денег***: оно показывает, что жизнедеятельная единица, беря деньги в долг у центрального вводчика в количестве V, должна через некоторое время отдать ему деньги в количестве $V + rV$. Чаще всего учётная ставка удовлетворяет неравенству $0 < r < 1$.

Следовательно, из учётной системы в содержательную систему уходит ***полный поток*** $S_{DC_b}^{55} + L_{DC}^{55} + S_{DC}^{55}$, в котором третье слагаемое учётная система передаёт не казённой части содержательной системы в «обмен» на свою собственную ***предметно-трудовую компоненту***

$$(S_{CD}^{11} - S_{DC}^{11}) + S_{\infty D}^{55} + (S_{GD}^{22} - S_{DG}^{22})$$

Предметно-трудовые потоки в конечном итоге переходят к содержательной системе и возвращаются из неё в учётную систему в виде ***возвратно-налоговых сборов***.

При этом ***полный налоговый сбор*** T_{CD}^{55} равен полному казённо-раздаточному потоку минус процентная часть от ссуды, полученной содержательной системой, т.е.

$$T_{CD}^{55} = S_{D\Sigma}^{55} - rL_{DC}^{55}.$$

Поэтому ***полный возвратно-налоговый сбор*** $S_{CD}^{55} = (L_{DC}^{55} + rL_{DC}^{55}) + T_{CD}^{55}$ имеет вид

$$S_{CD}^{55} = L_{DC}^{55} + S_{D\Sigma}^{55}.$$

8. Считаем, что силовые и силовые возвратные потоки имеют одинаковую реальную стоимость, т.е.

$$S_{EC}^{44} = S_{CE}^{44}, S_{ED}^{44} = S_{DE}^{44}, S_{EF}^{44} = S_{FE}^{44},$$
$$S_{EG}^{44} = S_{GE}^{44}, S_{EH}^{44} = S_{HE}^{44}, S_{EP}^{44} = S_{PE}^{44}.$$

9. Напомним, что изведённые потоки $S_{M\infty}^{mm}$ представляются в виде суммы $S_{M\infty}^{mm} = S_{M\leftrightarrow}^{mm} + S_{M\mapsto}^{mm}$ ***переработанного потока*** $S_{M\leftrightarrow}^{mm}$ и ***износного потока*** $S_{M\mapsto}^{mm}$.

Считаем, что соответствующая ***предметно-трудовая компонента не содержательной системы*** (т.е. стоящая в левой части приводимого ниже соответствующего равенства)

оплачивается этой системой передаваемым ею содержательной системе предметно-трудовым денежным потоком, а значит, согласно равенствам их пункта 6 и получаемым этой системой казённо-раздаточным денежным потоком, т.е.

$$(S_{CD}^{11} - S_{DC}^{11}) + S_{\infty D}^{55} - S_{D\leftrightarrow}^{55} + (S_{GD}^{22} - S_{DG}^{22}) = S_{DC}^{55} = S_{DD}^{55}$$
$$(S_{CE}^{11} - S_{EC}^{11}) + S_{\infty E}^{44} - S_{E\leftrightarrow}^{44} + (S_{FE}^{22} - S_{EF}^{22}) = S_{EC}^{55} = S_{DE}^{55}$$
$$(S_{CF}^{11} - S_{FC}^{11}) + S_{\infty F}^{22} - S_{F\leftrightarrow}^{22} + (S_{PF}^{33} - S_{FP}^{33})$$
$$+ (S_{CF}^{22} - S_{FC}^{22}) = S_{FC}^{55} = S_{DF}^{55}$$
$$(S_{CG}^{11} - S_{GC}^{11}) + S_{\infty G}^{22} - S_{G\leftrightarrow}^{22} + (S_{PG}^{33} - S_{GP}^{33})$$
$$+ (S_{DG}^{22} - S_{GD}^{22}) = S_{GC}^{55} = S_{DG}^{55}$$
$$(S_{CH}^{11} - S_{HC}^{11}) + S_{\infty H}^{22} - S_{H\leftrightarrow}^{22} + (S_{PH}^{33} - S_{HP}^{33})$$
$$+ (S_{EH}^{22} - S_{HE}^{22}) = S_{HC}^{55} = S_{DH}^{55}$$
$$(S_{CP}^{11} - S_{PC}^{11}) + S_{\infty P}^{33} - S_{P\leftrightarrow}^{33} + (S_{FP}^{33} - S_{PF}^{33})$$
$$+ (S_{GP}^{33} - S_{PG}^{33}) + (S_{HP}^{33} - S_{PH}^{33}) = S_{PC}^{55} = S_{DP}^{55}.$$

Здесь первые слагаемые $S_{CM}^{11} - S_{MC}^{11}$, стоящие в скобках, называются ***предметными компонентами не содержательных систем M***, а суммы остальных слагаемых называются ***трудовыми компонентами не содержательных систем M***.

Эти равенства означают, что казённо-раздаточные потоки $S_{DD}^{55}, S_{DE}^{55}, S_{DF}^{55}, S_{DG}^{55}, S_{DH}^{55}, S_{DP}^{55}$ состоят из ***предметной части***, предназначенной для оплаты соответствующей системой приходного и отходного содержательных достояний, и ***трудовой части***, предназначенной для оплаты трудовой деятельности в системе.

10. Считаем, что ***предметно-трудовая компонента содержательной системы*** (т.е. стоящая в левой части приводимого ниже равенства) **финансируется** учётной системой передаваемым ею содержательной системе ссудным денежным потоком, т.е.

$$(S_{AC}^{11} - S_{CA}^{11}) + S_{\infty C}^{11} - S_{C\leftrightarrow}^{11} + (S_{FC}^{22} - S_{CF}^{22}) = L_{DC}^{55}.$$

11. ***Полный приходно-отходный поток*** $S_{C\Sigma}^{55}$ имеет вид

$$S_{C\Sigma}^{55} = (S_{CD}^{11} - S_{DC}^{11}) - (S_{CE}^{11} - S_{EC}^{11}) - (S_{CF}^{11} - S_{FC}^{11})$$
$$- (S_{CG}^{11} - S_{GC}^{11}) - (S_{CH}^{11} - S_{HC}^{11}) - (S_{CP}^{11} - S_{PC}^{11}).$$

Используя равенства из пункта 9, получаем

$$S_{C\Sigma}^{55} = p_1 S_{DD}^{55} + p_2 S_{DE}^{55} + p_3 S_{DF}^{55} + p_4 S_{DG}^{55} + p_5 S_{DH}^{55} + p_6 S_{DP}^{55},$$

где $0 < p_i < 1$ для всех i. Числа p_i показывают части казённо-раздаточных потоков S_{DM}^{55}, идущие на оплату не содержательными системами M своих **предметных** (приходноотходных) компонент $S_{CM}^{11} - S_{MC}^{11}$. Соответственно, числа $1 - p_i$ показывают части казённо-раздаточных потоков, идущие на оплату не содержательными системами *M=D,E,F,G,H,P* своих **трудовых** компонент.

Показатели pᵢ предметно-трудового распределения казённо-раздаточных потоков S_{DM}^{55} устанавливают сами не содержательные системы *M*, исходя из общих установок властной системы на данном временном промежутке.

12. Считаем, что денежные казённо-раздаточные потоки S_{DM}^{55} состоят из двух частей: из ***бюджетной части*** B_{DM}^{55} (здесь буква *B* от слова «budget») и ***процентно-ссудной части*** $q_i r L_{DC}^{55}$, т.е.

$$S_{DC_b}^{55} = B_{DC}^{55} + q_0 r L_{DC}^{55}$$
$$S_{DD}^{55} = B_{DD}^{55} + q_1 r L_{DC}^{55}$$
$$S_{DE}^{55} = B_{DE}^{55} + q_2 r L_{DC}^{55}$$
$$S_{DF}^{55} = B_{DF}^{55} + q_3 r L_{DC}^{55}$$
$$S_{DG}^{55} = B_{DG}^{55} + q_4 r L_{DC}^{55}$$
$$S_{DH}^{55} = B_{DH}^{55} + q_5 r L_{DC}^{55}$$
$$S_{DP}^{55} = B_{DP}^{55} + q_6 r L_{DC}^{55},$$

где $q_0 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 = 1.$

Полный бюджетно-раздаточный поток $B_{D\Sigma}^{55}$ имеет вид

$$B_{D\Sigma}^{55} = B_{DC}^{55} + B_{DD}^{55} + B_{DE}^{55} + B_{DF}^{55} + B_{DG}^{55} + B_{DH}^{55} + B_{DP}^{55}.$$

Тогда полный казённо-раздаточный поток $S_{D\Sigma}^{55}$ принимает вид $S_{D\Sigma}^{55} = B_{D\Sigma}^{55} + rL_{DC}^{55}$. Следовательно, полный налоговый сбор равняется полному бюджетному потоку, т.е. $T_{CD}^{55} = B_{D\Sigma}^{55}$.

Денежные казённо-раздаточные потоки S_{DM}^{55} предназначены для осуществления добровольно-принудительного **изъятия** части производимого содержательного достояния из содержательной системы *C* и **передачи** его в казённые системы *M=C_b,D,E,F,G,H,P*. Основными способами такого изъятия являются ***изъятие посредством налогов*** и ***изъятие посредством ссуд***.

Изъятие посредством налогов предназначено изымать содержательное достояние в размере, равном полному бюджетно-раздаточному потоку $B_{D\Sigma}^{55}$. Изъятие посредством ссуд предназначено изымать содержательное достояние в размере, равном процентной части rL_{DC}^{55}, полученной избранным вводчиком от выданной содержательной системе ссуды L_{DC}^{55}. Именно ссудную часть rL_{DC}^{55} властная система раздаёт указанным казённым системам *M* в соответствии с ***показателями qᵢ распределения процентно-ссудного потока***

rL^{55}_{DC}. Показатели q_i устанавливает властная система, исходя из собственных целей, задач и предпочтений на данном временном промежутке.

13. Будем считать, что ссудный поток L^{55}_{DC} прямо пропорционален произведению $W^1_C(K - W^1_C)$ и обратно пропорционален учётной ставке r и полному бюджетному потоку $B^{55}_{D\Sigma}$, т.е. он имеет вид

$$L^{55}_{DC} = aW^1_C(K - W^1_C)/(c + dr^{\beta} + (B^{55}_{D\Sigma})^{\gamma}),$$

где число K>0 обозначает ***наибольшую предельно возможную величину содержательного достояния содержательной системы***, числа β, γ >0 показывают ***степень влияния соответствующих факторов на ссудную востребованность***, а числа a, c, d>0 представляют собой размерностные коэффициенты.

В развёрнутом виде получаем

$$L^{55}_{DC} = aW^1_C(K - W^1_C)/(c + dr^{\beta} +$$
$$(B^{55}_{DC} + B^{55}_{DD} + B^{55}_{DE} + B^{55}_{DF} + B^{55}_{DG} + B^{55}_{DH} + B^{55}_{DP})^{\gamma}).$$

Стоящее в числителе произведение $W^1_C(t)(K - W^1_C(t))$ показывает, что **воспринимаемая** содержательной системой ссуда $L^{55}_{DC}(t)$ зависит от величины $W^1_C(t)$ содержательного достояния содержательной системы. Эта зависимость имеет вид опущенной вниз параболы $W(K - W) = K^2/4 - (W - K/2)^2$, имеющей максимум при значении $W_0 = K/2$. Поэтому при малых значениях достояния $W^1_C(t)$ по мере его увеличения **ссудная вместимость** $L^{55}_{DC}(t)$ **содержательной системы** возрастает. Однако после достижения величины $W_0 = K/2$ дальнейшее увеличение достояния $W^1_C(t)$ приводит к убыванию ссудной вместимости $L^{55}_{DC}(t)$.

14. Будем считать, что износные потоки $S^{mm}_{M\mapsto}$ в системах M прямо пропорциональны их достояниям W^m_M, т.е. они имеют вид

$$S^{11}_{C\mapsto} = e_0(W^1_C)^{\alpha_0}$$
$$S^{55}_{D\mapsto} = e_1(W^5_D)^{\alpha_1}$$
$$S^{44}_{E\mapsto} = e_2(W^4_E)^{\alpha_2}$$
$$S^{22}_{F\mapsto} = e_3(W^2_F)^{\alpha_3}$$
$$S^{22}_{G\mapsto} = e_4(W^2_G)^{\alpha_4}$$
$$S^{22}_{H\mapsto} = e_5(W^2_H)^{\alpha_5}$$
$$S^{33}_{P\mapsto} = e_6(W^3_P)^{\alpha_6},$$

где $0 < e_i < 1$ и $\alpha_i > 0$ для всех *i*. Числа e_i показывают величину убывания основных достояний систем *M* **за счёт износа и старения**. Числа α_i показывают степень убывания основных достояний систем *M* ***Износные показатели*** e_i и α_i являются естественными характеристиками систем *M* на данном временном промежутке.

3.3. Система экономических уравнений государства в широком смысле (страны)

Применяя все указанные связи между потоками к системе эволюционных уравнений, получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$1)\quad \begin{aligned} \dot{W}_C^1 &= L_{DC}^{55} \\ &-(p_1(B_{DD}^{55}+q_1 r L_{DC}^{55})+p_2(B_{DE}^{55}+q_2 r L_{DC}^{55}) \\ &+p_3(B_{DF}^{55}+q_3 r L_{DC}^{55})+p_4(B_{DG}^{55}+q_4 r L_{DC}^{55}) \\ &+p_5(B_{DH}^{55}+q_5 r L_{DC}^{55})+p_6(B_{DP}^{55}+q_6 r L_{DC}^{55}))-e_0(W_C^1)^{\alpha_0}, \end{aligned}$$

где

$$L_{DC}^{55} = aW_C^1(K-W_C^1)/(c+dr^{\beta}+ (B_{DC}^{55}+B_{DD}^{55}+B_{DE}^{55}+B_{DF}^{55}+B_{DG}^{55}+B_{DH}^{55}+B_{DP}^{55})^{\gamma}).$$

$$2)\quad \dot{W}_D^5 = B_{DD}^{55}+q_1 r L_{DC}^{55}-e_1(W_D^5)^{\alpha_1}$$

$$3)\quad \dot{W}_E^4 = B_{DE}^{55}+q_2 r L_{DC}^{55}-e_2(W_E^4)^{\alpha_2}$$

$$4)\quad \dot{W}_F^2 = B_{DF}^{55}+q_3 r L_{DC}^{55}-e_3(W_F^2)^{\alpha_3}$$

$$5)\quad \dot{W}_G^2 = B_{DG}^{55}+q_4 r L_{DC}^{55}-e_4(W_G^2)^{\alpha_4}$$

$$6)\quad \dot{W}_H^2 = B_{DH}^{55}+q_5 r L_{DC}^{55}-e_5(W_H^2)^{\alpha_5}$$

$$7)\quad \dot{W}_P^3 = B_{DP}^{55}+q_6 r L_{DC}^{55}-e_6(W_P^3)^{\alpha_6}.$$

Здесь $K>0$, $\alpha_i > 0$, $\beta,\gamma>0$, a, c, $d>0$, $0 < e_i < 1$, $0 < p_i < 1$, $0 < q_i < 1$ и $q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6 < 1$. Правые части остальных уравнений оказались равными нулю.

Эту систему можно назвать ***системой экономических уравнений государства*** **(*в широком смысле*)**. Первое уравнение этой системы естественно назвать ***основным экономическим уравнением государства***.

3.4. Оптимизационная задача для системы экономических уравнений государства

В полученной выше системе экономических уравнений параметры B_{DM}^{55}, r, p_i, q_i являются управлениями.

Из самого вида экономических уравнений вытекают следующие непосредственные выводы.

1. Увеличение бюджетных раздач B^{55}_{DM} казённым системам $M=C_b,D,E,F,G,H,P$ приводит к приращению их основных достояний. Однако это приводит и к одновременному убыванию содержательного достояния содержательной системы C как за счёт уменьшения ссудного заимствования, так и за счёт увеличения предметных отдач $p_i B^{55}_{DM}$ казённым системам M.

2. Увеличение учётной ставки r также приводит к приращению основных достояний указанных казённых систем. Однако, как и ранее, это приводит и к одновременному убыванию содержательного достояния содержательной системы C как за счёт уменьшения ссудного заимствования, так и за счёт увеличения предметных отдач $p_i q_i r L^{55}_{DC}$ казённым системам M.

Из сказанного следует, что властная система государства должна решать **оптимизационную задачу** на выбор оптимизирующих управлений B^{55}_{DM}, r, p_i, q_i в системе экономических уравнений в соответствии с поставленными целями на временном промежутке $[t_0,T]$. При этом оптимизирующие управления должны быть ограничены как снизу, так и сверху следующими числовыми неравенствами:

$$r_0 \le r \le r_1,\ (B^{55}_{DM})_0 \le B^{55}_{DM} \le (B^{55}_{DM})_1 \text{ для } M=C,D,E,F,G,H,P.$$

Например, возможной целью может быть **достижение к моменту времени T относительно начального момента времени t_0 наибольшего значения** ***целевой функции прироста совокупного достояния***

$$\Phi(t) = (W^1_C + W^5_D + W^4_E + W^2_F + W^2_G + W^2_H + W^3_P)(t) -$$
$$(W^1_C + W^5_D + W^4_E + W^2_F + W^2_G + W^2_H + W^3_P)(t_0)$$

Формально это можно записать в виде $\Phi(T) \to \max$.

Ясно, что это равносильно ***обеспечению максимума совокупного конечного достояния государства***, т.е.

$$(W^1_C + W^5_D + W^4_E + W^2_F + W^2_G + W^2_H + W^3_P)(T) \to \max.$$

Поскольку система экономических уравнений государства является сложной, естественно пытаться решать поставленную оптимизационную задачу в нескольких более простых случаях.

3.5. Основная упрощенная система экономических уравнений государства

Рассмотрим упрощённый вариант этой системы.

$$1)\quad \begin{aligned} \dot{W}^1_C &= L^{55}_{DC} \\ &- (p_1(B^{55}_{DD} + q_1 r L^{55}_{DC}) + p_2(B^{55}_{DE} + q_2 r L^{55}_{DC}) \\ &+ p_3(B^{55}_{DF} + q_3 r L^{55}_{DC}) + p_4(B^{55}_{DG} + q_4 r L^{55}_{DC}) \\ &+ p_5(B^{55}_{DH} + q_5 r L^{55}_{DC}) + p_6(B^{55}_{DP} + q_6 r L^{55}_{DC})) - e_0 W^1_C, \end{aligned}$$

где

$$L_{DC}^{55} = aW_C^1(K - W_C^1)/(c + dr + (B_{DC}^{55} + B_{DD}^{55} + B_{DE}^{55} + B_{DF}^{55} + B_{DG}^{55} + B_{DH}^{55} + B_{DP}^{55})).$$

2) $\dot{W}_D^5 = B_{DD}^{55} + q_1 r L_{DC}^{55} - e_1 W_D^5$

3) $\dot{W}_E^4 = B_{DE}^{55} + q_2 r L_{DC}^{55} - e_2 W_E^4$

4) $\dot{W}_F^2 = B_{DF}^{55} + q_3 r L_{DC}^{55} - e_3 W_F^2$

5) $\dot{W}_G^2 = B_{DG}^{55} + q_4 r L_{DC}^{55} - e_4 W_G^2$

6) $\dot{W}_H^2 = B_{DH}^{55} + q_5 r L_{DC}^{55} - e_5 W_H^2$

7) $\dot{W}_P^3 = B_{DP}^{55} + q_6 r L_{DC}^{55} - e_6 W_P^3$,

где $K>0$, $a, c, d>0$, $0 < e_i < 1$, $0 < p_i < 1$, $0 \le q_i \le 1$ и $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 < 1$.

На управления накладываются следующие ограничения

$r_0 \le r \le r_1$, $(B_{DM}^{55})_0 \le B_{DM}^{55} \le (B_{DM}^{55})_1$ для $M=C,D,E,F,G,H,P$.

Эту систему можно назвать *основной упрощённой системой экономических уравнений государства*.

3.6. Упрощенная система экономических уравнений государства при базисном использовании ссудного дохода

Рассмотрим упрощённый вариант предыдущей системы. Данное упрощение означает, что передача в казённые системы $M=D,E,F,G,H,P$ содержательного достояния из содержательной системы посредством банковской системы не производится, т.е. $q_0=1$, $q_i=0$ для всех $i=1,...,6$. Иначе говоря, весь прибавочно-ссудный поток rL_{DC}^{55} (*ссудный доход*) используется только для перераспределения содержательного достояния от неказённой части C_a содержательной системы к её казённой части C_b. Получающуюся при этом модель можно назвать ***моделью государства при базисном использовании ссудного дохода***. Эта модель описывается следующей системой уравнений

1) $$\dot{W}_C^1 = L_{DC}^{55} - (p_1 B_{DD}^{55} + p_2 B_{DE}^{55} + p_3 B_{DF}^{55} + p_4 B_{DG}^{55} + p_5 B_{DH}^{55} + p_6 B_{DP}^{55}) - e_0 W_C^1,$$

где

$$L_{DC}^{55} = aW_C^1(K - W_C^1)/(c + dr + (B_{DC}^{55} + B_{DD}^{55} + B_{DE}^{55} + B_{DF}^{55} + B_{DG}^{55} + B_{DH}^{55} + B_{DP}^{55})).$$

2) $\dot{W}_D^5 = B_{DD}^{55} - e_1 W_D^5$

3) $\dot{W}_E^4 = B_{DE}^{55} - e_2 W_E^4$

4) $\dot{W}_F^2 = B_{DF}^{55} - e_3 W_F^2$

5) $\dot{W}_G^2 = B_{DG}^{55} - e_4 W_G^2$

6) $\dot{W}_H^2 = B_{DH}^{55} - e_5 W_H^2$

$$7)\quad \dot{W}_P^3 = B_{DP}^{55} - e_6 W_P^3.$$

Здесь $K>0$, $a, c, d>0$, $0 < e_i < 1$, $0 < p_i < 1$.

На управления накладываются следующие ограничения

$$r_0 \le r \le r_1,\ (B_{DM}^{55})_0 \le B_{DM}^{55} \le (B_{DM}^{55})_1 \text{ для } M=C,D,E,F,G,H,P.$$

Эту систему можно назвать ***упрощённой системой экономических уравнений государства при базисном использовании ссудного дохода***.

Интерес представляет нахождение оптимального решения последней системы при следующих числовых данных:

$T=100$, $K=300$, $d=20$, $a=0{,}0005$, $c=1$, $p_1=0{,}3$, $p_2=0{,}6$, $p_3=p_4=p_5=0{,}2$, $p_6=0{,}7$, $e_0=0{,}015$, $e_1=0{,}005$, $e_2=0{,}02$, $e_3=e_4=e_5=0{,}005$, $e_6=0{,}01$, $W_C^1(0)=100$, $W_D^5(0)=20$, $W_E^4(0)=20$, $W_F^2(0)=10$, $W_G^2(0)=10$, $W_H^2(0)=10$, $W_P^3(0)=30$, $r_0=0.001$, $r_1=1$, $(B_{DC}^{55})_0=0$, $(B_{DC}^{55})_1=0.5$, $(B_{DM}^{55})_0=0.1$, $(B_{DM}^{55})_1=0.2$ для $M=D,E,F,G,H,P$.

4. РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ ГОСУДАРСТВА ПРИ БАЗИСНОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ССУДНОГО ДОХОДА

4.1. Постановка задачи оптимального управления

Будем решать базисную систему экономических уравнений государства в более привычных математических обозначениях. Далее для удобства полагается $W_C^1 = x$, $W_M = y_i$ для $M=C,D,E,F,G,H,P$, соответственно, $r=u$, $B_{DC}^{55}=v$, $B_{DM}^{55}=w_i$.

Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{cases} x' = \dfrac{a(K-x)x}{c+du+v+\sum\limits_{j=1}^{6} w_j} - \sum\limits_{j=1}^{6} p_j w_j - e_0 x; & (1) \\ y_i' = w_i - e_i y_i,\quad i=\overline{1,6}. & (2) \end{cases}$$

с начальными условиями $x(0)=x_0, y_i(0)=y_{i0}, i=\overline{1,6}$.

Здесь $K, a, d, p_i, c, e_i, e_0$ – некоторые положительные константы, а $u, v, w_i, i=\overline{1,6}$ – управляющие функции времени, удовлетворяющие в каждый момент времени $0 \le t \le T$ следующим ограничениям:

$$\begin{cases} 0 \le u_0 \le u \le u_1, & (3) \\ 0 \le v_0 \le v \le v_1, & (4) \\ 0 \le w_{i0} \le w_i \le w_{i1}, w_i, i=\overline{1,6}. & (5) \end{cases}$$

Относительно начальных условий предполагается, что $(K-x_0)x_0 > 0$.

Задача состоит в том, чтобы найти управляющие функции *u, v* и $w_i, i=\overline{1,6}$, при которых выражение $x(T)+\sum_1^6 y_i(T)$ достигает наибольшего значения, где *T* – заданное время управления.

Особенность этой задачи заключается в том, что **управляющая система является нелинейной**, поскольку управления входят в уравнения нелинейным образом. Тем не менее, удаётся найти явное аналитическое решение.

4.2. Решение задачи на основе принципа максимума

Для решения поставленной оптимизационной задачи будем использовать принцип максимума Понтрягина. В этом случае сопряженная система имеет вид

$$\begin{cases} \psi_i' = (-a(K-2x^*)/(c+du^*+v^*+\sum\limits_{j=1}^{6} w_j^*)+e_0)\psi_1; \\ \psi_i' = e_i\psi_i,\ \ i=\overline{2,7}. \end{cases}$$

Условия трансверсальности выглядят следующим образом

$$\psi_1(T)=-1,\ \ \psi_i(T)=-1,\ \ i=\overline{2,7}.$$

Здесь $u^*, v^*, w_i^*, i=\overline{1,6}$ − оптимальные управления, x^* − соответствующее им решение уравнения (1). Отсюда можно найти сопряженные функции ψ_1 и ψ_i в виде

$$\begin{cases} \psi_1 = -\exp(-\int\limits_t^T(\dfrac{a(K-2x^*)}{c+du^*+v^*+\sum\limits_{j=1}^{6} w_j^*}-e_0)dt); \\ \psi_i = -\exp(e_i(t-T)),\ \ i=\overline{2,7}. \end{cases} \tag{6}$$

Функция Гамильтона $H(u,v,w)$ принимает вид

$$H=\psi_1(\frac{a(K-2x^*)x^*}{c+du+v+\sum\limits_{j=1}^{6} w_j^*}-\sum_{j=1}^{6} p_j w_j^* - e_0x^*)+\sum_{i=1}^{6}\psi_{i+1}(w_i-e_iy_i^*).$$

Здесь y_i^* − решения уравнений (2), соответствующие оптимальному управлению.

Согласно принципу максимума на оптимальном управлении в каждый момент времени реализуется минимум функции Гамильтона $H(u,v,w)$ в области управления, определяемой ограничениями (3)–(5). Заметим, что точка минимума функции *H* в указанной области совпадает с точкой минимума функции

$$H^*=\psi_1(\frac{a(K-2x^*)x^*}{c+du+v+\sum\limits_{j=1}^{6} w_j^*}-\sum_{j=1}^{6} p_j w_j^*)+\sum_{i=1}^{6}\psi_{i+1}w_i).$$

Введем обозначения $A = \psi_1 a(K - x^*)x^*$, $B_i = \psi_{i+1} - p_i\psi_i$, $i = \overline{1,6}$. Тогда, функция H^* принимает вид

$$H^* = \frac{A}{c + du + v + \sum\limits_{j=1}^{6} w_j} + \sum_{j=1}^{6} B_j w_j.$$

Обратим внимание, что функция ψ_1 всегда отрицательна. Если при этом функция $(K - 2x^*)x^*$ положительна (что выполняется, по крайней мере, в некоторой окрестности начального состояния), то величина A будет отрицательной. Тогда минимум функции H^* будет достигаться только при $u^* = u_0$, $v^* = v_0$.

Поскольку $\dfrac{\partial^2 H}{\partial w_i^2} = \dfrac{2A}{(c + du + v + \sum\limits_{j=1}^{6} w_j)^3} < 0$, то, если внутри параллелепипеда, образованного отрезками $[w_i^0, w_i^1]$ будет существовать экстремум функции $H^*(u^*, v^*, w^*)$, и он будет точкой максимума. Следовательно, минимум может реализовываться только на границах этого параллелепипеда.

Каждое из управлений w_i, в некоторый момент времени τ_i может иметь один из двух возможных режимов переключений: либо с w_i^0 на w_i^1; либо наоборот с w_i^1 на w_i^0. Обозначим $A(\tau_i)$ – значение функции A в момент переключения τ_i, $B_j(\tau_i)$ – значение функции B_j в момент переключения τ_i, тогда точки переключения находятся из равенств

$$\frac{A(\tau_i)}{c + du_0 + v_0 + w_i^0 + \sum\limits_{j \neq i} w_j^{k_j}} + \sum_{j \neq i} B_j(\tau_i) w_j^{k_j} + B_i(\tau_i) w_j^0 =$$

$$\frac{A(\tau_i)}{c + du_0 + v_0 + w_i^1 + \sum\limits_{j \neq i} w_j^{k_j}} + \sum_{j \neq i} B_j(\tau_i) w_j^{k_j} + B_i(\tau_i) w_j^1$$

здесь i пробегает последовательность значений от 1 до 6, а индексы k_j принимают значения 0 или 1. Введем обозначения

$$\eta_i^0 = \frac{c + du_0 + v_0 + w_i^0 + \sum\limits_{j \neq i} w_j^{k_j}}{a};$$

$$\eta_i^1 = \frac{c + du_0 + v_0 + w_i^1 + \sum\limits_{j \neq i} w_j^{k_j}}{a},$$

$$\sigma_i = a\eta_i^0\eta_i^1.$$

С учетом этого, уравнения точек переключения определяются следующим образом $a\sigma_i B_i(\tau_i) = A(\tau_i)$, или, что то же самое

$$\sigma_i(\psi_{i+1}(\tau_i) - p_i\psi_1(\tau_i)) = \psi_1(\tau_i)(K - x^*(\tau_i))x^*(\tau_i), \quad i = \overline{1,6}.$$

Систему (2) легко проинтегрировать на участках постоянных управлений u^*, v^*, w^*. При этом на каждом участке возможны различные случаи интегрирования, определяющиеся параметрами задачи. Для первого уравнения на каждом участке возможны два случая: $D = (K - e_0\eta^*)^2 - 4\eta^* \sum_{j=1}^{6} w_j^* p_j > 0$ и $D \le 0$. (Здесь D − дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в правой части первого уравнения системы (2)). Рассмотрим случай, когда $D > 0$, что наиболее соответствует реальному положению дел. Очевидно, что в изучаемом случае это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными и легко интегрируется. Разделив переменные и вычислив соответствующие интегралы, получим:

$$\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{D}}{2} + x - 0.5(K - e_0\eta^*)}{\frac{\sqrt{D}}{2} - x - 0.5(K - e_0\eta^*)}\right| = \frac{\sqrt{D}}{\eta^*}t - C\sqrt{D},$$

Логарифм, в последнем выражении, есть либо ареатангенс, либо ареакотангенс (в зависимости от знака, с которым будет раскрыт модуль). При данном сочетании параметров, этот модуль следует раскрывать со знаком «-», что соответствует ареакотангенсу. Тогда,

$$x(t) = 0.5(K - e_0\eta^*) + \frac{\sqrt{D}}{2} cth\left[\frac{\sqrt{D}}{2}\left(\frac{t}{\eta^*} - C\right)\right],$$

где $C = -\frac{1}{\sqrt{D}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{D}}{2} + x^*(0) - 0.5(K - e_0\eta^*)}{\frac{\sqrt{D}}{2} - x^*(0) - 0.5(K - e_0\eta^*)}\right|.$

При заданных точках переключений τ_i и i-м управлении w_i^* дифференциальное уравнение для переменной y_i можно проинтегрировать на каждом участке постоянства управления w_i^*, $i = \overline{1,6}$. Решение будет иметь следующий вид:

$$y_i = C_i \exp(-bt) + \frac{w_i^*}{b},$$

где C_i - константа.

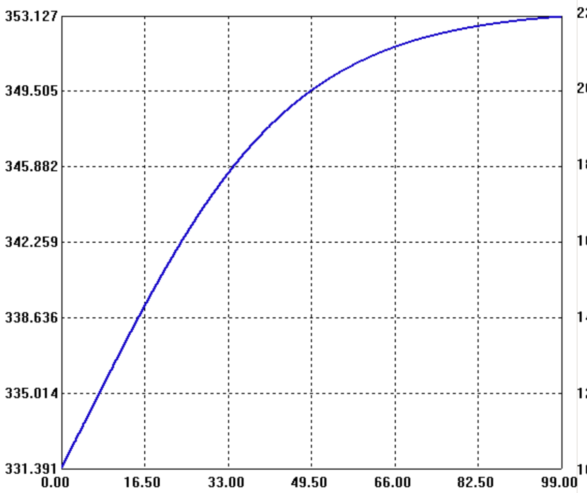
Для первого участка она имеет вид $C_i = y_0 - \frac{w_0}{b} + \frac{w_0 - w_i^*}{b}\exp(b\tau)$. Подставляя полученные решения в выражение для сопряженной функции, интегрируя по времени и далее подставляя в уравнение переключений (6), получим:

$$\eta^* e_0 \ln \frac{\left| sh\left(\frac{\sqrt{D}}{2}\left(\frac{t}{\eta^*} - C\right)\right)\right|}{\left| sh\left(\frac{\sqrt{D}}{2}\left(\frac{t}{\eta^*} + C\right)\right)\right|} + \frac{\sqrt{D}}{2}\left(cth\left(sh^2\left(\frac{\sqrt{D}}{2}\left(\frac{t}{\eta^*} - C\right)\right)\right) - cth\left(sh^2\left(\frac{\sqrt{D}}{2}\left(\frac{t}{\eta^*} + C\right)\right)\right)\right) =$$

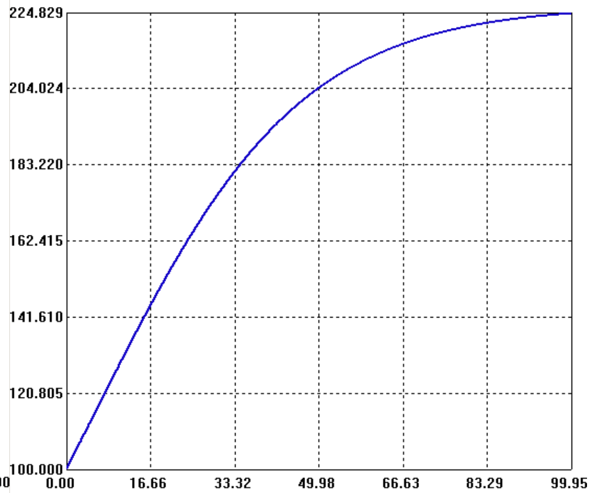
$$= \left(e_0 - e_{i+1} - \frac{1}{\eta^*}\left(\frac{K}{2}(K - \eta^*) - 0.25(K - \eta^* e_0 + D)\right)\right)(T - t) + \ln\left(p_i + \frac{K - x^*}{\sigma_i} x^*\right).$$

4.3. Численное решение оптимизационной задачи

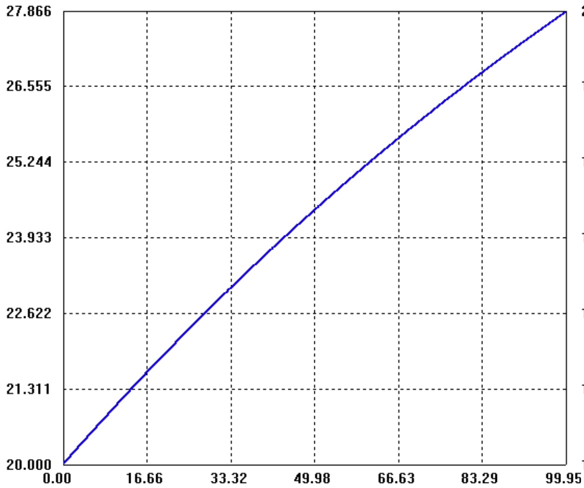
Далее задача оптимального управления сводится к определению точек переключения $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_6$ Задача решается численно по следующему алгоритму. Выбирается точка $(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_6)$ шестимерного пространства в гиперкубе $[0, T]^6$. При этих значениях моментов переключения аналитически интегрируются уравнения 2-6, а затем численно интегрируется первое уравнение системы. В результате определяются значения $x(t),\ y_i(t),\ i = \overline{1,6}$ суммируя которые находим значение функционала *J*, соответствующее выбранной точке $(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_6)$. Для нахождения оптимального набора параметров $(\tau_1^*, \tau_2^*, ..., \tau_6^*)$ выполняется прямой перебор в шестимерном гиперкубе $[0, T]^6$. Полученный численно оптимальный набор проверяется путем подстановки в уравнения переключений. Указанный алгоритм реализован на языке С++ в среде Microsoft Visual Studio 2010. Как показывает счет, при $w_i^* = w_{i1}$ уравнения переключений удовлетворяются при *t*=100,17. Это означает, что оптимальным, при данном сочетании параметров, будет режим без переключения. Таким образом, оптимальными будут управления $w_i^* = w_{i1}$ а соответствующее значение функционала $J = 353.127$. Результаты расчётов приведены на графиках. Первый график отражают динамику величины *J* функционала при переключении w_{i1} на w_{i0} (оптимальный режим). Второй – шестой графики отражают решения соответственно первого – седьмого уравнений системы без переключения (решение уравнений 4-6 одинаковые и приведены одним пятым графиком). Для сравнения, на графиках 7 – 11 приводится решение системы при неоптимальном режиме переключения *J*=338.99 (с w_{i0} на w_{i1} и моментом переключения (50,50,50,50,50,50,50)). Отметим, что найденное решение непрерывно зависит от начальных условий (рис. 14-15). Численный эксперимент показал, что малые возмущения начальных условий задачи не вызывают сильного возмущения решения, что свидетельствует о его устойчивости.



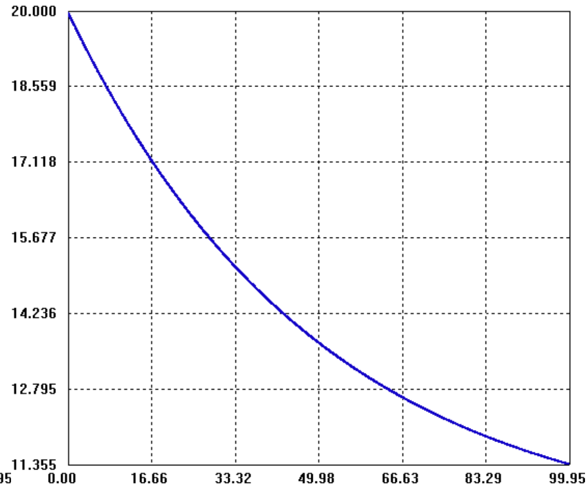
Граф. 1



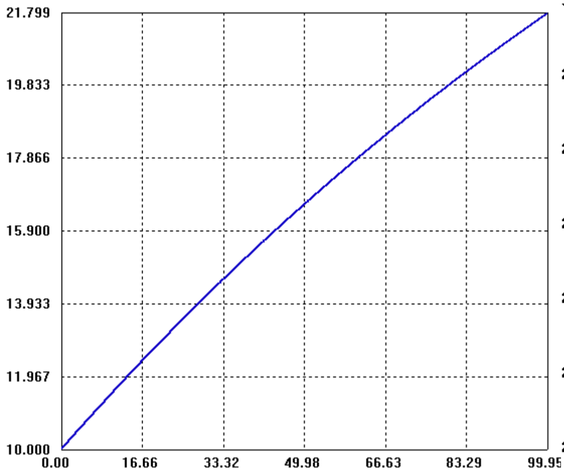
Граф. 2



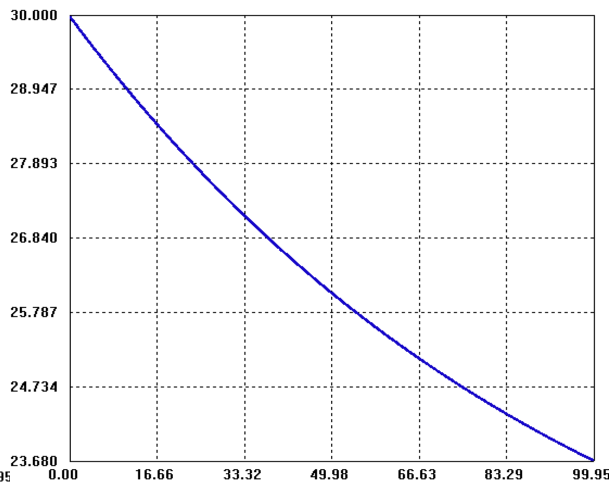
Граф. 3



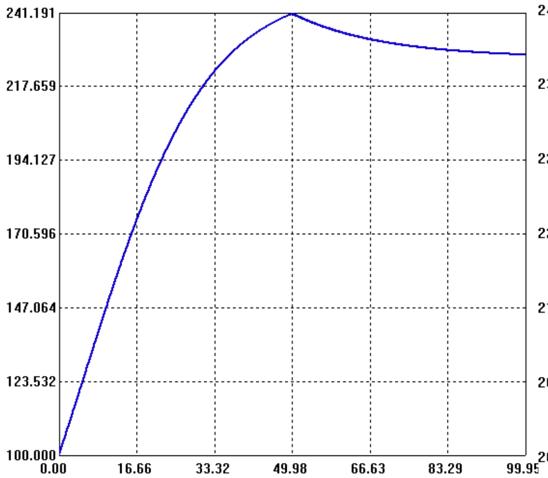
Граф. 4



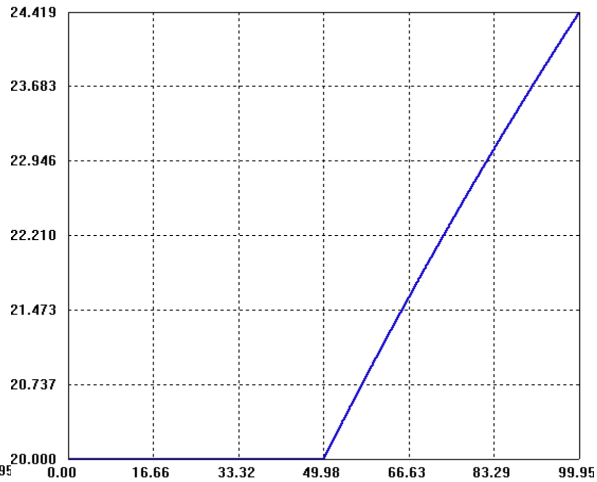
Граф. 5



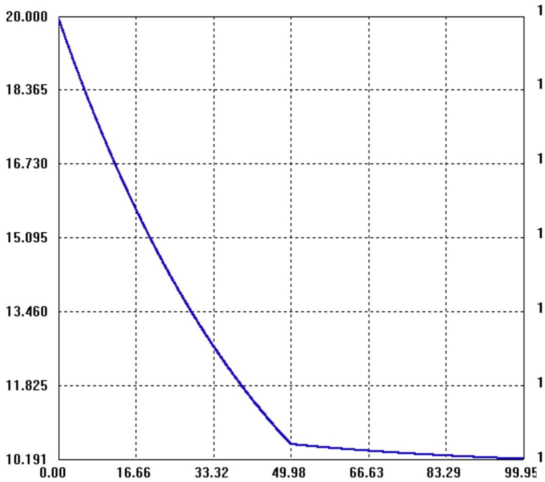
Граф. 6



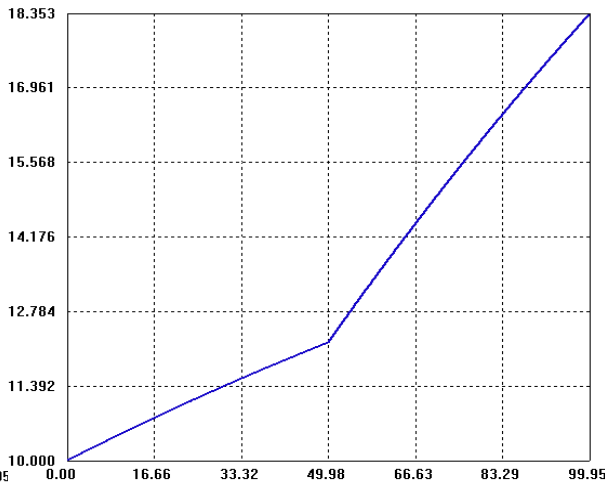
Граф. 7



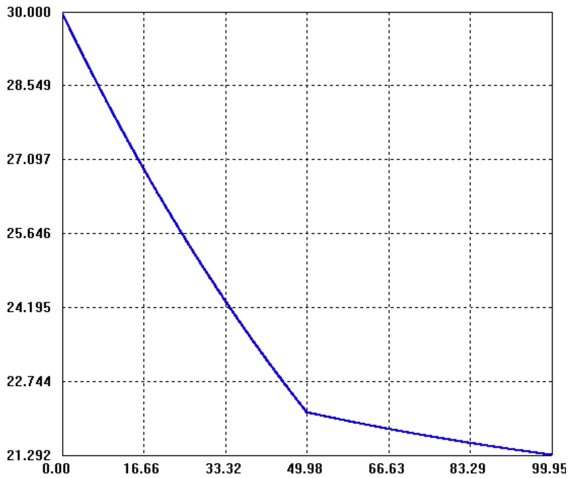
Граф. 8



Граф. 9



Граф. 10



Граф. 11

Рис. 2.

Из структуры оптимального управления видно, что оно кусочно-постоянное. Следовательно, фазовые траектории, соответствующие оптимальному решению будут состоять из кусков фазовых траекторий, соответствующих постоянным значениям управляющих параметров. Проведем качественный анализ системы (1),(2) при постоянных значениях управляющих параметров. Сначала найдем стационарные значения переменной *x*. Для этого приведем к общему знаменателю правую часть уравнения (1) и найдем корни квадратного трехчлена, образовавшегося в числителе полученного дробного выражения. Дискриминант этого трехчлена имеет вид

$$D=\left(e_0\left(c+du+v+\sum_{j=1}^{6} w_j\right)-aK\right)^2-4a\left(c+du+v+\sum_{j=1}^{6} w_j\right)\sum_{j=1}^{6} w_j p_j;$$

корни записываются следующим образом

$$\bar{x}_{1,2}=\frac{aK-e_0\left(c+du+v+\sum_{j=1}^{6} w_j\right)\pm\sqrt{D}}{2a}$$

Если при любом выборе управляющих параметров дискриминант D меньше нуля, то при оптимальном управлении функция x – монотонно убывает (причем, при увеличении T функция $x^*(T)$ будет монотонно уменьшаться к $-\infty$). Если $D>0$ при данном фиксированном значении управляющих параметров, то существует два различных стационарных значения переменной x, соответствующие корням квадратного трехчлена – $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$. Из принципа максимума следует, что максимальное число различных вариантов сочетания значений управляющих параметров в оптимальном управлении равно 2^6 (число всевозможных размещений значений w_{jk}, где $j=\overline{1,6},\ k\in\{0;1\}$). Значит и различных пар стационарных значений переменной x может быть не больше 2^6. Из существующих вариантов точек $\bar{x}_1$ можно найти наименьшую и наибольшую. Обозначим их соответственно $\min\{\bar{x}_1\}$ и $\max\{\bar{x}_1\}$. Аналогично для $\bar{x}_2$ обозначим наибольшую и наименьшую точки $\min\{\bar{x}_2\}$ и $\max\{\bar{x}_2\}$. Если начальная координата $x_0>\max\{\bar{x}_2\}$ или $x_0<\min\{\bar{x}_1\}$, то (при оптимальном управлении) фазовая координата x будет только монотонно убывать. Если $\min\{\bar{x}_1\}<x_0<\min\{\bar{x}_2\}$, то (при оптимальном управлении) будет наблюдаться рост координаты x (значение которой, в свою очередь, не может превышать $\max\{\bar{x}_2\}$). В данном случае, $\min\{\bar{x}_1\}\approx 6.493$ $\max\{\bar{x}_2\}\approx 226.89$. На следующих рисунках слева направо приведены графики изменения (во времени) фазовой координаты x при следующих начальных условиях $x_0=6,\ \ x_0=7,\ \ x_0=226,\ \ x_0=227.$

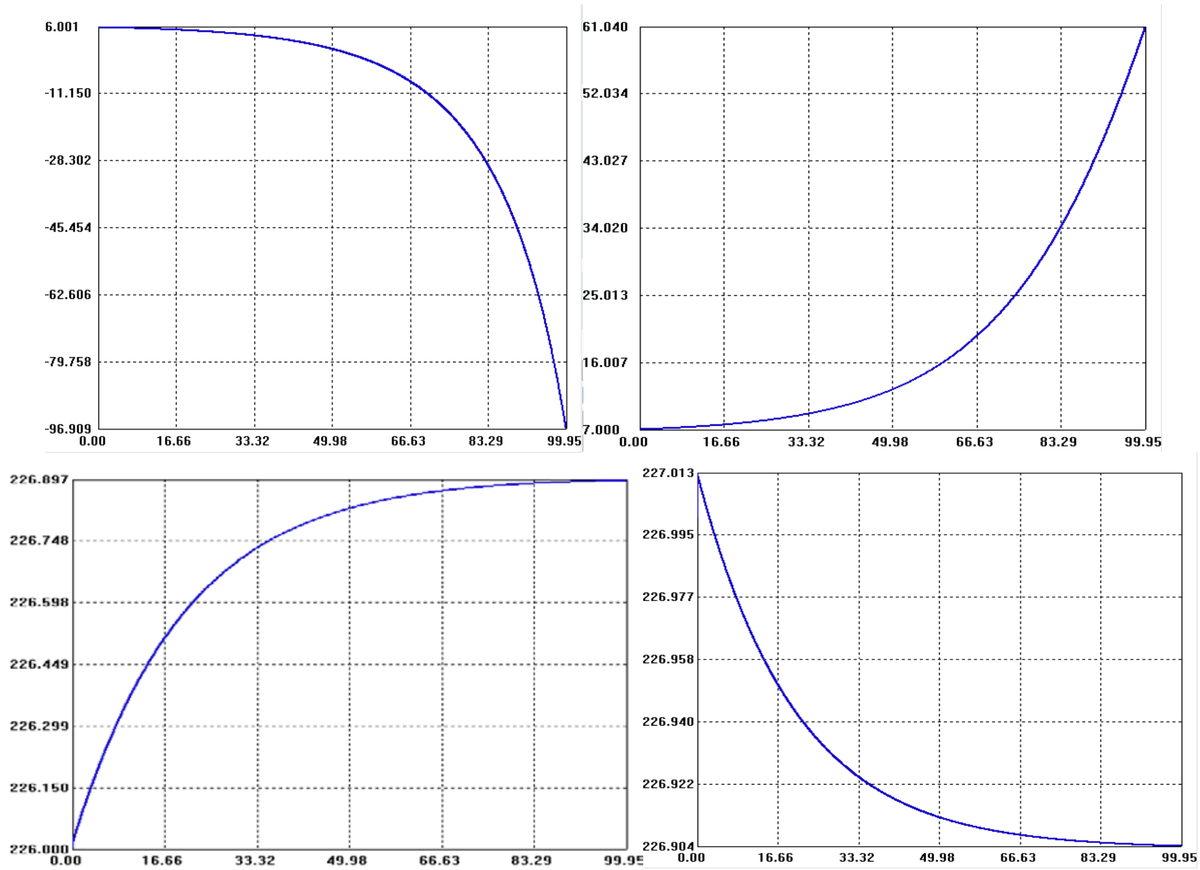


Рис. 3.

Далее рассмотрим стационарные значения переменных y_i, $i = \overline{1,6}$. Они имеют вид $\bar{y}_i = \dfrac{w_i}{e_i}$, $i = \overline{1,6}$. Очевидно, что для каждого i существует по две таких точки (наибольшая и наименьшая). Обозначим их соответственно через $\min\{\bar{y}_i\}$ и $\max\{\bar{y}_i\}$. Если начальная координата y_{i0} больше $\max\{\bar{y}_i\}$ то (при оптимальном управлении) соответствующая функция y_i может только монотонно убывать. Если же начальная координата y_{i0} меньше $\min\{\bar{y}_i\}$ то (при оптимальном управлении) функция y_i может только монотонно возрастать. И, наконец, если $\min\{\bar{y}_i\} < y_{i0} < \max\{\bar{y}_i\}$, то могут существовать участки как возрастания так и убывания. Поведение фазовых траекторий на инвариантной фазовой плоскости приведено на рисунке 4.

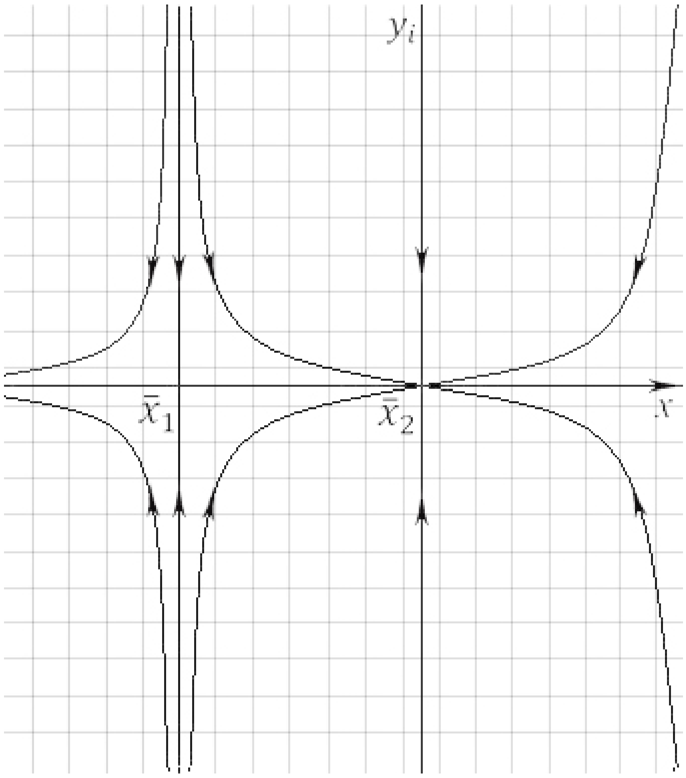


Рис. 4

На рисунке 5 приведены результаты исследования значения целевого функционала от ресурса управления. В ходе исследования изменялась величина верхней границы w_1 ограничений на значение управляющего параметра w_1 и определялась величина критерия качества. Результаты исследования показывают, что при увеличении ресурса управления значение критерия качества монотонно возрастают, причем рост близок к линейному.

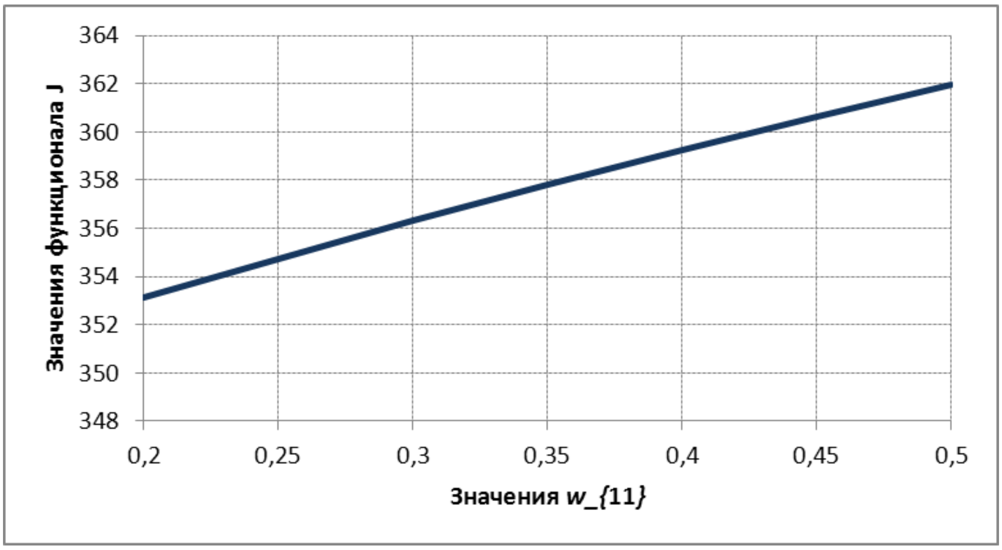


Рис. 5

На рисунке 6 приведены результаты исследования зависимости значения целевого функционала от параметра e_0. В ходе исследования изменялось значение параметра e_0 и определялась величина критерия качества. Результаты исследования показывают, что при увеличении параметра e_0 значение критерия качества монотонно убывает, причем убывание близко к линейному.

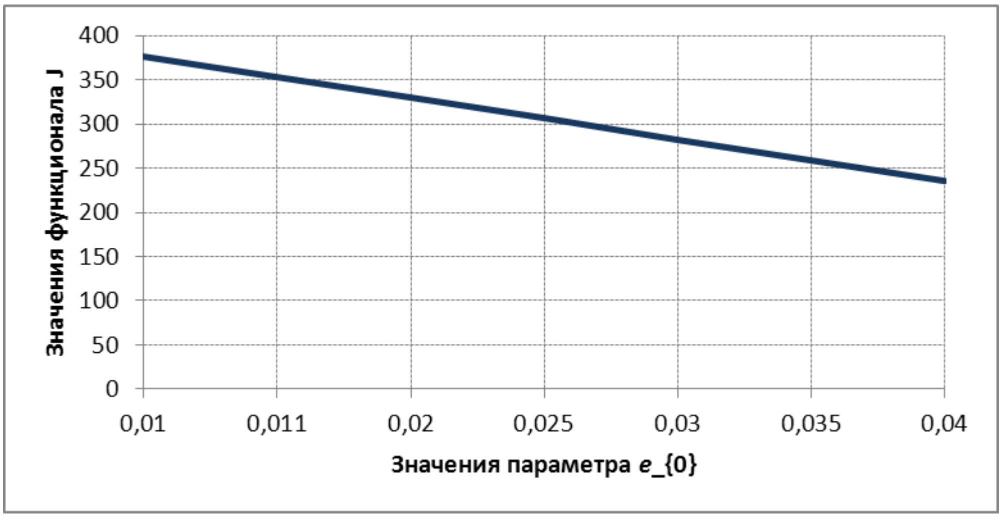


Рис. 6

Отметим, что существует значение $e_0^* \approx 0.04172$, такое, что при $e_0 < e_0^*$ наблюдается возрастание фазовой координаты x, а при $e_0 > e_0^*$ наблюдается ее убывание.

На рисунках 7 и 8 приведены результаты исследования зависимости значения целевого функционала от начальных состояний x_0 и y_{10} соответственно. В ходе исследования последовательно изменялись значения компонент x_0 (y_{10}) и определялась величина критерия качества. Результаты исследования показывают, что при увеличении x_0 (y_{10}) значения критерия качества монотонно возрастают. Изменение характера роста на графике (рис.7) при переходе через значение $x_0 = 6.493$, соответствует переходу через бифуркационное значение $\bar{x}_1$.

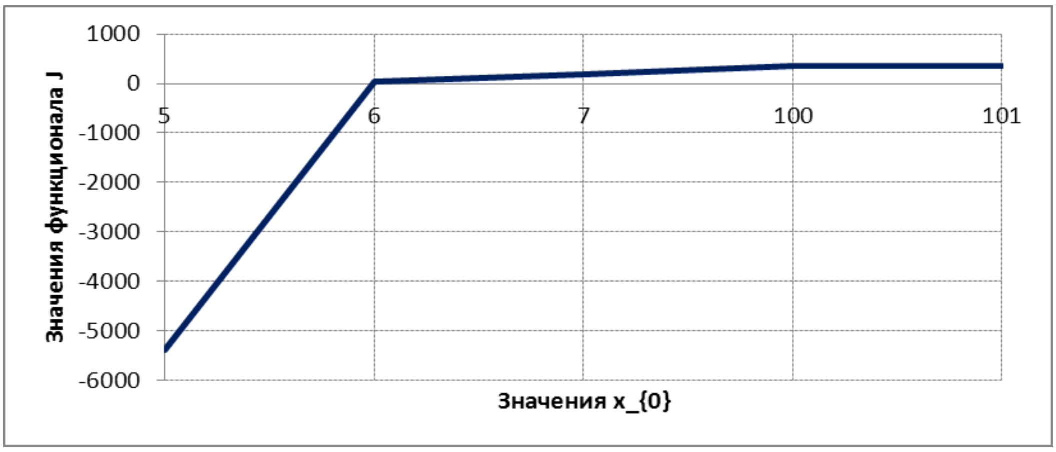


Рис. 7

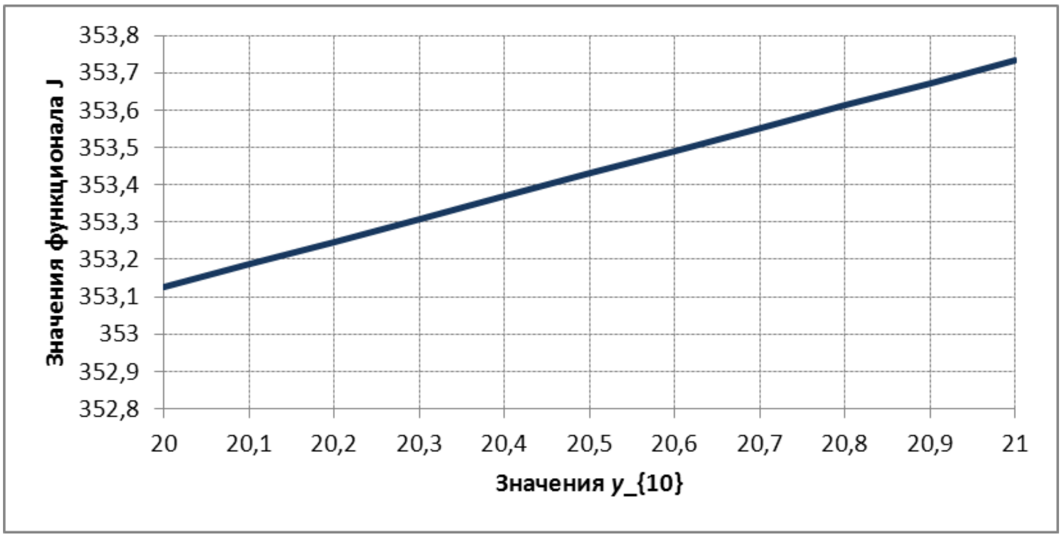


Рис. 8

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев В.В., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979.
2. Захаров В.К. К вопросу о денежном оценивании реальной стоимости // Россия как цивилизация денег. – М.; Волгоград: Волгоградское научное издательство, 2008. С. 266-269.
3. Захаров В.К. Деньги как средство государственного и межгосударственного управления. Об одной модели кризисов // Всероссийская научная конференция «Национальная безопасность: научное и государственное управленческое содержание» (4 декабря 2009г.). Материалы. – М.: Научный эксперт, 2010. С. 523-537.
4. Захаров В.К. Управление государством в широком смысле посредством денег // Четвёртая международная конференция “Управление развитием крупномасштабных систем” (4-6 октября 2010г.). Материалы. Том I. − М.: ИПУ РАН, 2010. С. 265-268.
5. Захаров В.К. Финансово-кризисные способы государственного и межгосударственного управления // Национальные интересы: приоритеты и безопасность. 2010. № 11. С. 9-16.
6. Захаров В.К. Номология. Устроение и направление человеческой деятельности. − М.: МГППУ, 2011.
7. Захаров В.К., Голикова Е.И. Деньги как средство управления // Финансы и кредит. 2009. № 21. С. 8-16.
8. Захаров В.К., Голикова Е.И. Кризисные способы изъятия содержательного достояния в условиях глобальной рецессии // Общество, государство, политика, 2009. № 2. С.60-72.
9. Захаров В.К., Голикова Е.И. Невидимая роль денег в координации экономических и общественных интересов // Проблемы теории и практики управления. 2009. № 1. С. 43-51.
10. Захаров В.К., Голикова Е.И. Невидимая роль денег в межгосударственном управлении // Проблемы теории и практики управления. 2009. № 6. С. 66-72.
11. Захаров В.К., Голикова Е.И. Деньги как средство управления кризисами // Финансы и кредит. 2010. № 10. С. 2-11.
12. Захаров В. К., Губарь О.В., Половинкин Е.С., Яшин А.Д. Об одной агрегированной модели государственного управления // 4 Международная конференция «Государственное

управление в XXI веке: традиции и инновации» (24-26 мая 2006г.). Материалы. − Москва: МГУ. 2006. С.583-589.
13. Захаров В.К., Кузенков О.А. Оптимальное управление в модели государства // Моделирование и анализ данных. 2011. № 1. С. 55-75.
14. Захаров В.К., Половинкин Е.С.. Яшин А.Д. Математическая модель архаичного государства и управления в нём // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия «Математическое моделирование и оптимальное управление», 2005. Вып.2 (29). С.101-108.
15. Захаров В. К., Половинкин Е.С., Яшин А.Д. Математическая модель государства // Доклады РАН. 2007. Т.413, № 2. С.158-162.
16. Захаров В.К., Яшин А.Д. Динамическая модель нома // Моделирование и анализ данных: Труды факультета информационных технологий МГППУ. − Москва: МГППУ, 2004. Вып. 1. С. 47-78.
17. Захаров В.К., Яшин А.Д. Динамическая модель самоорганизующегося нома // Международная конференция «Проблемы управления и моделирования в сложных системах» (14-17 июня 2004г.). Труды конференции. − Самара: ИПУСС РАН, 2004. С. 137-144.
18. Кузенков О.А., Рябова Е.А. Оптимальное управление за бесконечное время системой на единичном симплексе // Автоматика и телемеханика. 2005. № 10. С. 70-79.
19. Кузенков О.А., Рябова Е.А. Математическое моделирование процессов отбора. − Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2007.
20. Кузенков О.А. Исследование задач управления динамикой популяций на основе обобщенной модели Колмогорова // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. №5. С. 169-181.
21. Плотников В.И., Шашков В.М., Кузенков О.А. Оптимальное управление линейными сосредоточенными системами. – Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 1993.
22. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983.
23. Zakharov V.K., Yashin A.D. A mathematical model of a State // Международная конференция «Математическое моделирование социальной и экономической динамики» (23-25 июня 2004г.). Труды конференции. − Москва: РГСУ, 2004. С. 382-385.

Работа поступила 11.02.2014