Die Kulturgeschichte der Zahl als Impulsgeber für einen inklusiven Mathematikunterricht in der Grundschule

Klaus Rödler

Verfestigtes zählendes Rechnen, fehlendes Denken im Teile-Ganzes-Konzept und Missachtung der kardinalen Bedeutung unserer Stellenwertzahlen sind unverändert typische Merkmale von Schüler/innen mit Rechenschwierigkeiten. Zwanzig Jahre didaktischer Forschung und innovativer Praxis haben dieses Kernproblem des Arithmetik-Unterrichts nicht aus der Welt schaffen können. Die neu hinzugekommene Aufgabe der inklusiven Beschulung wirft auch von dieser Seite die Frage auf, warum die Zahlen und die mit ihnen vorgenommenen Rechenvorgänge für einen Teil der Schülerschaft unüberwindliche Hürden aufzuwerfen scheinen.

Rechnen-durch-Handeln ist der Versuch, diese Gesamtproblematik dadurch auf neue Weise anzugehen, dass Zahlen und Rechenvorgänge aus kulturgeschichtlicher Perspektive in einem erweiterten Sinne gedeutet werden. Indem der Lehrgang die Phylogenese der Zahlen mit ihren Entwicklungsstufen ernst nimmt und daran sowohl Erkenntnishürden wie Lösungswege identifiziert, entsteht das Gerüst einer inklusiven Fachdidaktik des Rechnenlernens.

1. Rechenprobleme und Erkenntnishürden

Noch immer hat ein beträchtlicher Teil jedes neuen Jahrgangs Schwierigkeiten, zu einem strukturierten, am dezimalen Aufbau unseres Zahlsystems orientierten Rechnen vorzudringen. Verfestigtes zählendes Rechnen (Lorenz 1998) ist ebenso sichtbar wie fehlende Kompetenz zu ableitendem Denken. (Gaidoschik et al. 2017) *„Warum bleiben Kinder in der Sackgasse des zählenden Rechnens hängen?“*, fragen Weisshaupt & Peucker (2009, 72) und diagnostizieren vor allem mangelhafte Zahlkonzepte: *„Übereinstimmend mit Gerster & Schultz (2000), Fritz & Ricken (2008) und Gaidoschik (2003) werden vor allem Schwierigkeiten in der Entwicklung des*

Anzahlverständnisses und des Teile-Ganzes-Verständnisses als Gründe für das Verharren in ineffektiven, fehlerhaften Strategien betrachtet“ (ebd.). Gerster & Schultz (2004, 80-99) weisen darauf hin, dass es vielen Kindern schwerfällt, das Konzept vom reversiblen Zehner aufzubauen.

Es besteht fachdidaktische Übereinstimmung darüber, dass sich die Kinder bis Ende der 1. Klasse zumindest beim Rechnen bis 10 vom zählenden Rechnen gelöst haben sollten. „Begründet wird dieses Ziel mit dem *‚inhaltlichen und empirisch belegbaren Zusammenhang‘* zwischen *‚verfestigtem zählenden Rechnen und (mathematischen Lernschwächen‘* (Häsel-Weide 2016, 22)“ (zit. nach: Gaidoschik et al. 2017, 96). Dennoch identifiziert Gaidoschek bei einer Studie in Österreich 65% zählende Erstklässler (ebd.).

Meyerhöfer schließt aus dieser Gesamtsituation, dass es offensichtlich „stoffliche Hürden“ gibt und dass deren Nichtbearbeitung zu Rechenproblemen führt und im schlimmsten Fall zu einer dann am Kind diagnostizierten Rechenschwäche (Meyerhöfer 2011). Allerdings bleibt er mit der Benennung der stofflichen Hürden unscharf. Mit dem Hinweis auf die Notwendigkeit des Aufbaus eines „kardinalen, ordinalen und relationalen Zahlbegriffs“, verbunden mit der „Ablösung vom zählenden Rechnen“, des Verständnis der „Logik des Stellenwertsystems“ sowie der „Operationslogik“ der Grundrechenarten, insbesondere „der Operationslogik der Division“ (a.a.O.) wird nicht sichtbar, worin genau die Schwierigkeiten bei der Bewältigung eben dieser bekannter Hürden liegt.

Fachdidaktisch geht es also darum, einerseits die stofflichen Hürden besser zu identifizieren, welche für einen Teil der Schülerschaft zu unüberwindbaren Erkenntnishürden werden und andererseits Lösungswege aufzuzeigen, welche neue Zugänge zu den schwierigen Themen öffnen. Für beides ist gewinnbringend, einen Blick in die Kulturgeschichte der Zahlen und des Rechnens zu werfen, in der unser Stellenwertsystem und die damit verbundenen Rechenverfahren wurzeln.

2. Erkenntnisstufen in der Phylogenese der Zahl und des Rechnens

2.1 Was ist eine Zahl?

Noch bevor es eine Zahlwortreihe gab und abstrakte Zahlzeichen entstanden, gab es Zahlen: Kerben in Knochen, gehäufte Steine oder aufgefädelte Muscheln waren konkrete gegenständliche Zahlen, die durch analoge Abbildung der Wirklichkeit entstanden. Es waren Zahlen, da sie – genauso wie 3 oder „Drei“ – eine kardinale Wirklichkeit aus den besonderen Bezügen herausgelöst und von diesen befreit festhielten.

Damit zeigt sich die erste Hürde gleich mit ihrer Lösung. Es geht nämlich um das Bedürfnis, Zahlen zu bilden! *Zahlen sind Werkzeuge des Geistes. Sie erlauben es, den Anzahlaspekt zu isolieren und festzuhalten.* Voraussetzung dafür ist, dass es ein entsprechendes Bedürfnis gibt. Wer sich nicht für Anzahlen interessiert, für die Tage bis Weihnachten, die Anzahl der Beine am Tisch oder die der Klöße auf dem Teller, wer die Welt vielleicht nicht einmal unter den Blickwinkel von mehr und weniger stellt, der braucht keine Zahl. Und wer keine Zahl braucht, der lernt Zahlworte und Zahlzeichen ohne inneren Bezug kennen. Wenn er sie überhaupt erlernen kann.

Am Anfang steht didaktisch die Suche nach relevanten Anlässen, sich mit „mehr und weniger“, mit „genau so viel“ zu beschäftigen. Messvorgänge, Abstimmungen in der Klasse, Rekorde oder einfach nur Beobachtungen in der Lebenswelt können solche Zählanlässe sein (Rödler 2016a, 111f.).

Und dieser erste Zugang des Bildens von Zahlen darf, wenn er kognitiv schwachen oder noch ganz auf im *„string level“* oder in einem *„unbreakeable-list-level“* der Zahlwortreihe (Fuson 1988, 45) verhafteten Kindern wirklich das Tor zur kardinalen und invarianten Zahl öffnen soll, nicht an der Zahlwortreihe ansetzen, sondern er muss den Beginn nutzen, den die Kulturgeschichte an den Anfang stellt: die konkrete Zahl in analoger Abbildung. Diese erlaubt es nämlich, dass alle Kinder – jenseits ihres Zahlwortreihenwissens – verstehen, dass Zahlen Anzahlen festhalten, dass man diese vergleichen und ordnen kann, dass man ihnen Namen geben kann, um ihrer unterschiedlichen Größe Rechnung zu tragen und dass sie invariant sind, also ihre Größe nicht durch Veränderungen in der Raum-Lage ändern.

Schließlich steht hinter der durch Abbildung entstandenen Zahl ja die unveränderliche gezählte Wirklichkeit.

Es lässt sich auch feststellen, dass die Zahl Klassen bildet. Drei Würfel können für drei Türen im Raum stehen wie für drei Pflanzen am Fenster oder drei Kinder am Tisch. Die Zahl vernichtet die konkreten Eigenschaften und zeigt, dass es viele Arten von „Dreiheiten“ gibt, die sich alle als III zeigen.

Der Einstieg des Bildens von in analoger Abbildung gefundenen konkreten Zahlen und das reflektierende Gespräch garantiert die kardinale Zahl als Ausgangspunkt der Zahlkonzeptentwicklung.

2.2 Zahl – Zahlwort – Zahlnamen

Mit der Erfahrung der konkreten Zahlbildung entsteht kultur-historisch das Bedürfnis, diese Erfahrungswelt auch begrifflich zu fassen. Erste Zahlwörter beziehen sich auf den kleinen Bereich bis 4, der die Anzahlunterschiede protoquantitativ erfahrbar macht. Erst allmählich erweitert sich die Zahlwortreihe (Menninger 1979, I 21ff., 33-37), ein Phänomen, das sich auch an Zaslavskys Analyse afrikanischer Sprachen identifizieren lässt (Zaslavsky 1999, 38ff.) und dass sich noch in unserem Zahlwort Acht aufspüren lässt, dass als Dual auf 2x4 zurückzuführen ist (vgl. https://www.dwds.de/wb/acht). Zahlen sind innere Konstruktionen, die kultur-historisch durch äußere Repräsentanten handhabbar und dann mit Zahlworten, später auch mit Zahlzeichen verbunden wurden. Diese Tatsache ernst genommen, bedeutet didaktisch gewendet eine grundlegende Änderung im Lehrgang.

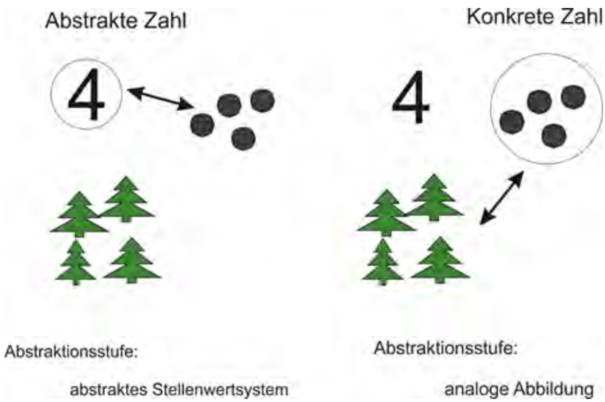

Abb. 1: Wo beginnen? Abstrakte Zahl und konkrete Zahl als didaktische Alternativen im Anfangsunterricht

Während der herkömmliche Lehrgang von der gesprochenen und geschriebenen Zahl als Zahl ausgeht und diese durch „Anschauung" semantisch zu unterlegen versucht, geht der aus der Kulturgeschichte abgeleitete Lehrgang Rechnen-durch-Handeln von der durch analoge Abbildung gewonnenen konkreten Zahl als Zahl aus. Zahlwort und Zahlzeichen werden als Kommunikationsmittel benutzt. Der Unterricht führt daher Zahlworte und Zahlzeichen als Kommunikationsmittel ein, setzt sie aber bei der Bearbeitung der mathematischen Themen nicht voraus. Dadurch erhält man einen strukturell inklusiven Arithmetik-Unterricht (Rödler 2016a).

2.3 Strukturierte Zahlen – Das Teile-Ganzes-Prinzip und die beginnende Zehner-Einer-Gliederung

Zahlwortreihen entstanden aus dem Bedürfnis, immer größere Anzahlen eindeutig festzuhalten. Kultur-historisch zeigen sich dabei typische Zählgrenzen wie 4 oder 10 und Gliederungen nach 5, 10, 12 oder 20, später auch im Dezimal- und Sexigesimalsystem. Dabei bilden die Zahlwortsysteme häufig die Struktur der konkreten Zahlen ab, die im Lebensalltag Verwendung finden. Körperzahlen, Fingergesten, aber auch Bündelungskonzepte führen zu entsprechenden Rangschwellen in den Zahlwortreihen (Menninger 1979, I).

Zaslavsky beschreibt die noch heute beobachtbare Vielfalt an sprachlichen Ordnungen und deren Verbindung mit konkreten, z.B. aus Kauri-Muscheln gebildeten

Zahlen am Beispiel afrikanischer Sprachen (Zaslavsky 1999). Sie schreibt, dass die Zahlen für 2, 3 und 4 in vielen Sprachen ähnlich und gleich sind, dass die 5 oft mit dem Wort für „Hand“ benannt wird und dass die Zahlen oberhalb der Fünf oft aus 5+, seltener auch aus 6+ oder auf 2er-Basis gebildet werden und die 8 auch als 2x4 erscheint. Wie Menninger es in der Kulturgeschichte nachweist, beschreibt Zaslavsky an den Afrikanischen Sprachen, dass Wörter, die als Rangschwellen ursprünglich „viele“ bedeuteten, später zu Wertebenen-Bausteinen für die Bildung größerer Zahlwörter werden (a.a.O., 39ff.).

Auch an frühen Schriftzeichen (Abb. 2) kann man die Grundprinzipien aufspüren, auf welchen die Entwicklung des Zahlkonzepts fußt: Erstens Ordnung, z.B. bei Mustern von Einzelelementen, die nie mehr als vier in einer Reihe zeigen. Zweitens Bündelung, welche eine bestimmte Anzahl von Elementen einer niedrigeren Wertebene zu einer neuen Wertebene verbindet.

Abb. 2: archaische Zahlzeichen aus Damerow et al. 1994, 102 — sumerische Zahlzeichen aus Menninger 1979, I 174

Die gleichen Prinzipien finden wir bei Ägyptischen Zahlzeichen und sie haben bis in die uns bekannten „Römischen Zahlen“ des Mittelalters überlebt, nur dass die Hinzunahme der Elemente für 5, 50 und 500 Musterbildungen für die schnelle Erfassbarkeit des Zahlwerts überflüssig gemacht hat.

Didaktisch bedeutet das, dass das Arbeiten mit konkreten Zahlen die Entwicklung des Zahlkonzepts vor allem unter dem Gesichtspunkt der Wahrnehmung des Handelnden befördern sollte. Das bedeutet:

1. Die Wahrnehmungsgrenze Vier muss beachtet und bewusst gemacht werden. Musterbildungen sollten daraufhin reflektiert werden.
2. Oberhalb der Vier kann die Fünf als Gliederungsgrenze eingeführt werden, wobei sie wie „Hand" eher als Bündelungsidee, also als Zusammenfassung thematisiert werden sollte und weniger im Sinne von fünf Einzelnen.
3. Der Zahlenraum bis Zehn, bis Zwölf und bis Zwanzig bildet Keimzellen möglicher Zahlraumerweiterungen. Dieser ist aber noch nach unten gegliedert, also im Blick auf kleinere Bausteine aufgebaut und weist nicht automatisch nach oben in seine Erweiterung hinein. Insbesondere lässt sich das Zehner-Einer-Konzept des Stellenwertsystems im kleinen, Zahlenraum bis Zwanzig nicht entwickeln, da dessen Zahlen als eine Folge von Ganzheiten verstanden und auch von uns empfunden werden und nicht als nach Zehner und Einer gegliedert. (Man kann dreizehnhundert Euro abheben aber nicht dreiundzwanzighundert Euro.)
4. Die Idee von Rangschwellen in der Zahlwortreihe entsteht auf der Basis von Bündelungserfahrungen und das Konzept aufbauender Wertebenen setzt die Existenz mehrerer Bündelungsebenen voraus, weshalb die Zehner-Einer-Gliederung erst im 100er-Raum verstanden werden kann und auf der Grundlage einer Arbeit mit Bündelungsobjekten besser zugänglich ist.

3. Die Entwicklung der Rechenoperationen und des Zahlsystems

Zahlen dienten am Anfang vor allem der Buchhaltung. Steuern, Abgaben, Schulden wurden festgehalten. In diesem Zusammenhang entwickelten sich auch Zeichensysteme (Menninger 1979, Bd. II). Damerow et al. (1994) zeigen archaische Tontafeln mit Rechnungsergebnissen. Man kann davon ausgehen, dass Alltagsprobleme des Handels, des Austauschs von Waren, dieses operative Moment ins Spiel brachten. Da die aus jüngeren Kulturepochen dokumentierten Rechenverfahren, wie das Rechnen am Rechenbrett oder mit dem in Osteuropa und Asien gebräuchlichen Stellenwertrahmen, durchweg in der konkret-handelnden Durchführung der Operation mit einem Rechenmittel bestanden, kann nach meiner Überzeugung davon ausgegangen werden, dass auch in früheren Epochen mit den damals vorhandenen konkreten Zahlen handelnd gerechnet wurde, so dass die festgehaltenen Rechnungen als Dokumentation verstanden werden müssen.

Dies übersetzt in die Didaktik eines Rechenlehrgangs bedeutet, dass Rechnen nicht dort beginnt, wo mit abstrakten Zahlen aufgrund abstrakter Vorstellungen im Kopf oder schriftlich gerechnet wird, sondern dass es dort beginnt, wo ein operatives Problem handelnd gelöst wird. Die Notation des Vorgangs und der Vorgang selbst sind als Teilaspekte des Geschehens zu trennen.

Das bedeutet aber, dass das Anfangsrechnen selbst entsprechend der verwendeten konkreten Zahlen auf unterschiedlichem Abstraktionsniveau stattfinden kann und dass Zahlen und Rechenvorgänge nicht einfach im Sinne Bruners nach enaktiv-ikonisch-symbolisch unterschieden werden dürfen, sondern dass vielmehr das Abstraktionsniveau der enaktiven Handlung ebenso beachtet und unterschieden werden muss, wie das der ikonischen oder symbolischen Übersetzung.

Schauen wir uns die oben abgebildeten frühen Zahlschriften an, so sehen wir, dass diese die mit dem Kerbholz entwickelte Idee der Reihung als erster Zahlzeichenidee aufgreifen und mit dem der Bündelung verbinden. Verschiedene Zeichen zeigen an, dass es sich um verschiedene Wertebenen handelt. Verschiedene kardinale Bausteine haben ein unterschiedliches Gesicht und werden entsprechend ihrer Anzahl gereiht bzw. als Muster gezeigt. Das macht diese Zahlen auch für den einfach denkenden Menschen handhabbar und erfahrbar.

Dass diese Zahlzeichen, was die Verständlichkeit angeht, den Stellenwertzahlen weit überlegen sind, zeigt sich in der Zahlwortbildung des Mittelalters, die nicht über die Tausend hinausgeht und höhere Zahlen aus Tausendern bildet. *„Zehntausend, hundert-tausend, tausend-tausend sprechen und schreiben die Rechenmeister, die sich ihrer Muttersprache bedienen“* wie auch diejenigen, welche lateinisch sprechen (Menninger 1979, Bd. I, 153). Benennbare Rangschwellen, nicht der immer gleiche Aufbau nach Zehner-Bündelungen, dominieren das Zahlkonzept. Außerdem muss die Idee der unendlichen Fortsetzung der Zahlwortreihe, die wissenschaftlich bereits im Blick ist, in der Breite der Bevölkerung erst Fuß fassen. Damit fehlen zwei wesentliche Motive zur Entwicklung und Nutzung einer Stellenwertschrift, die sich erst nach jahrhundertelangem Widerstand in Europa durchsetzt. Das Denken bleibt vom Konzept der Rangschwellen und der symbolischen Bündelung dominiert, auch wenn die Handlungspraxis am Rechenbrett bereits Stellenwerte nutzt und zeigt.

Abstraktionsstufen der Zahl

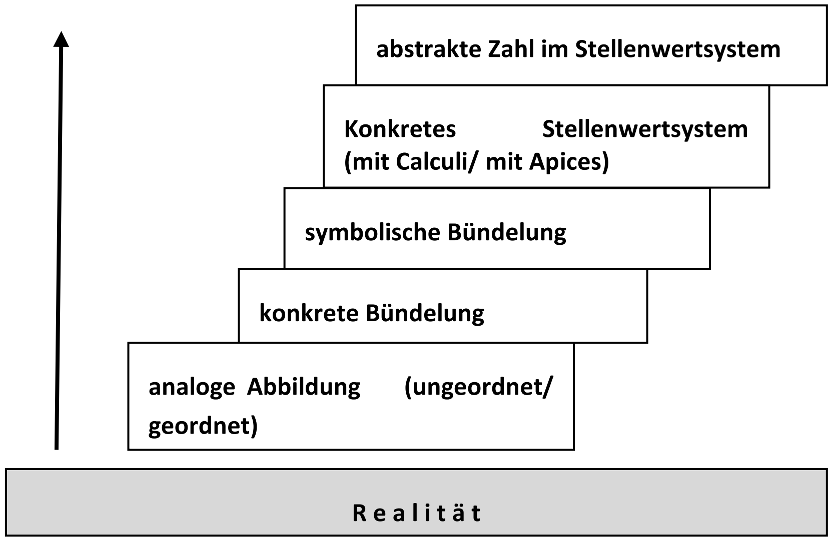

Abb. 3: Übersicht über die Abstraktionsstufen der Zahl als Grundlage des Rechnens auf unterschiedlichem Abstraktionsniveau

Versteht man jede Lösung eines Anzahl- oder Größenproblems als Rechnen, so erhält man einen inklusiven, weil alle Kulturen und alle Menschen umfassenden Rechenbegriff und zugleich eine Palette im Abstraktionsniveau gestufter Zugriffe auf Zahlen und damit auch Rechenverfahren (Abb. 3). Grundlegende Erfahrungen der Zahlbildung und des operativen Denkens können, für alle zugänglich, auf der niedrigen Abstraktionsstufe „Analoge Abbildung“ erarbeitet werden (Rödler 2016a, z.B. 74 und 138). Um das Denken in Wertbausteinen anzuregen, bedarf es dagegen des Übergangs zu (konkreten) Bündelungen. Der Aufbau der immer größer werdenden Zahlen mit der Idee eines immer weiter anwachsenden Zahlenraumes kann durch Rechnungen auf der Stufe „symbolische Bündelung“ oder durch Handlungen am Rechenbrett gegenständlich erlebt werden (Rödler 2006). So bildet das didaktische Konzept Rechnen-durch-Handeln den kultur-historischen Prozess nicht analog ab, aber es nutzt die konzeptionellen Bausteine für entsprechende Schritte in der angestrebten oder anstehenden Zahlkonzeptentwicklung (a.a.O. und Rödler 2016b).

Im kleinen Zahlenraum entsteht eine Didaktik der wahrnehmungsgesteuerten Operationen und im größeren eine der Bündelungsobjekte, die sich zum Beispiel darin vom vertrauten Lehrgangsaufbau unterscheidet, dass die Subtraktion sowohl im kleinen Zahlenraum wie auch z.B. beim Thema des Zehnerübergangs an Bedeutung gewinnt und jeweils vor der Addition behandelt wird. Im kleinen Zahlenraum deshalb, weil sie den operativen Zusammenhang von Subtraktion, Addition und Zerlegung sichtbar macht und daher früh vom zählenden Rechnen wegführt. Beim Zehnerübergang, weil das Bündelungsobjekt zur Auseinandersetzung mit der Zehnergrenze zwingt, die nicht mehr zählend überwunden werden kann (Rödler 2016a, 79, 126, 140).

4. Kulturgeschichte der Zahl in Beziehung zu Dornheims Modell der Zahlbegriffsentwicklung und Dehaenes Triple-Code-Model

Im didaktischen Konzept Rechnen-durch-Handeln (Rödler 1997, 1998, 2006, 2007/2013, 2016a) wird unterstellt, dass es hilfreich ist, wenn man die Kulturgeschichte der Zahl als Quelle didaktischen Denkens und Handelns nutzt. Hier soll abschließend gezeigt werden, dass die wissenschaftlichen Modelle zur Ontogenese der Zahlbegriffsentwicklung im Kind wesentliche Parallelitäten zur kulturgeschichtlichen Phylogenese aufweist, was das didaktische Konzept Rechnen-durch-Handeln weiter stützt.

4.1 Die Kulturgeschichte der Zahl in Beziehung zu Dornheims Modell der Zahlbegriffsentwicklung

Dornheim (2007, 86 und 126) geht bei ihrem eigenen Modell der Zahlentwicklung und Rechenleistung von drei einflussnehmenden Repräsentationssystemen aus: von Anfang an wirkt dasjenige, das räumlich-zeitliche Muster erfasst und dazu führt, dass Anzahlen annäherungsweise verglichen („analog-magnitude“) und im kleinen Zahlenraum bis 3 an den Einzelobjekten (objekt-file) orientiert präzise unterschieden werden können. Die Simultanerfassung bis Drei führt in Verbindung mit dem Repräsentationssystem Sprache, das die ersten Zahlwörter beisteuert, zu einem „ersten Anzahlkonzept für Anzahlen bis Drei“, was kultur-historisch dem Stand entspricht, den Menninger (1979, Bd. I, 17ff., 33) als Anfang der Zahlwortentwicklung beschreibt, die allerdings ergänzt werden muss durch die praktische Erfahrung mit (auch größeren) konkreten Zahlen, etwa an Kerbhölzern.

Im zweiten und dritten Schritt entwickeln sich bei Dornheim auf dieser Grundlage das flexible Anzahlkonzept bis Drei und durch Ausbau der ordinalen Zahlwortreihe bis 10 das Kardinalzahlkonzept bis 10, wobei unklar bleibt, was genau die Entwicklungen hervorbringt, die durch unterschiedlich starke Pfeile gekennzeichnet sind. Als schulischer Zusatzimpuls werden Anschauungsmaterialien angeführt, die eine Quasi-Simultanerfassung bis 10 erlauben.

Auch in der oben dargestellten Kulturgeschichte baut sich der Zahlwortbereich langsam aus. Es gibt Rangschwellen, die überschritten werden und den Zahlenraum im kleinen Bereich erweitern, was auch bei Zaslavskys Darstellung afrikanischer Zahlen nachvollzogen werden kann. Allerdings wird diese Entwicklung nicht aus der Festigung der Zahlwortreihe abgeleitet, sondern ist vom Umgang mit konkreten Zahlen motiviert. Der Kardinalzahlaspekt ist kultur-historisch eher die Wurzel der Zahlwortreihe als deren Erkenntnisergebnis. Daher bedarf es bei einer diesen Strang aufnehmenden Didaktik keiner zusätzlichen Anschauungsmittel, um das Kardinale sichtbar zu machen und mit den Zahlworten zu verbinden.

Auch der nächste Schritt, das Teile-Ganzes-Prinzip, lässt sich in Bemühungen um Gliederungen, Strukturen und Muster an Kerbhölzern, Fingerzahlen und Zahlzeichen kulturhistorisch nachweisen. Das Bedürfnis, Zahlen ein erkennbares Bild zu geben, führt ganz automatisch zu diesen Konzepten.

In Dornheims Entwicklungsmodell kommt an dieser Stelle, also im Zahlenbereich oberhalb der 10, das Repräsentationssystem der Zahlsymbole hinzu, das aufgrund unserer Stellenwertschreibweise, wieder unterstützt von entsprechenden Anschauungsmitteln, das dezimale Teile-Ganzes-Konzept hervorbringt und schließlich (ohne Angabe der weiteren Entwicklungsimpulse) zum „arithmetischen Netzwerk“ führt.

Der Blick in die Kulturgeschichte zeigt die Parallelität darin, dass sich auch hier ein Aufbau nach dezimalen Wertebenen nur allmählich durchsetzt. Allerdings gibt es wieder eine identifizierbare materielle Basis, nämlich dezimal aufgebaute Bündelungsobjekte, wie wir sie zuerst bei den Sumerern finden.

Tabelle 1: Notwendige Schritte beim Aufbau eines Stellenwertkonzepts

Stoffliche Hürde	Kernbotschaft
9. Vollständiges Stellenwertsystem	Das Prinzip der fortgesetzten Entbündelung gilt unbegrenzt, also auch beim Einer. Dies erweitert das Stellenwertsystem mit seinen reversiblen Wertebenen in den Nachkommabereich.
8. Stellenwertsystem nach oben	Verständnis dafür, dass die Position den Wert anzeigt und dass dieses Prinzip der immer weiteren Bündelung sich durch immer weitere Stellen darstellen lässt.
7. Idee der Bündelung/dezimale Wertebenen als Konzept	Verständnis dafür, dass Bündelungen keine Objekte sind, sondern eine Idee, ein fortlaufender Prozess „Immer 10“, der der Idee nach ins Unendliche führt
6. Reversibler Zehner	Verständnis, dass eine Zehn nicht nur 10 Elemente zu einer neuen Wertebene zusammenfasst und dadurch größere Zahlen strukturiert, sondern dass der Zehner reversibel ist, also wieder in Einer auflösbar. (Auch der Zehner ist eine kardinale Ganzheit.)
5. Zehner-Einer-Gliederung der zweistelligen Zahl	Verständnis der aus Zehn und Zehnerrest gebauten Zahl
4. Teile-Ganzes-Prinzip	Verständnis der Zahl als Baustein. Zahlen sind nicht nur aus Einern gebaut, sondern können auch aus anderen Zahlen gebaut werden.
3. Zahlen als kardinale Ganzheiten	Verständnis, dass Zahlen gleichzeitig ein Ganzes und aus Einern zusammengesetzt sind
2. abstrakte kardinale Zahl	Verständnis, dass Zahlen Anzahlen benennen (Zahl aus Einer-Elementen gebaut
1. Bedürfnis der Zahlbildung	Motiv Anzahlen oder Anzahl-veränderung festzuhalten. Zahlen sind Werkzeuge des Geistes: Ohne Werk, kein Zeug.

Erst auf der Grundlage einer mehrtausendjährigen praktischen Erfahrung mit entsprechenden gegenständlichen Objekten und symbolischen Zeichen wächst die Konzeption eines Zahlzeichensystems, das auf werthaltige Symbole verzichtet und auf Ziffern und Stellenwerten beruht.

Insofern wird die notwendige Entwicklung hin zum Stellenwertverständnis mit ihren Hürden und gedanklichen Konzeptentwicklungen durch den Blick in die Kulturgeschichte ähnlich erfassbar, aber sie wird nuancierter und reichhaltiger sichtbar (Tab. 1). Genau genommen geht es um die in der Tabelle benannten Stufen.

3.2 Die Kulturgeschichte der Zahl in Beziehung Dehaenes Triple-Code-Model

Dornheim nennt drei Repräsentationssysteme, das der räumlich-zeitlichen Muster, das sie weiter nach der analog-magnitude Repräsentation und der objekt-file-Repräsentation ausdifferenziert, das sprachliche Repräsentationssystem und das der Zahlsymbole (Dornheim 2007, 25.ff.). Damit greift sie Dehaenes Triple-Code-Modell auf, das die Zahlverarbeitung auf die Vernetzung von drei beteiligten, im Gehirn unterschiedlich zu lokalisierenden Repräsentations-, bzw. Verarbeitungsmechanismen zurückführt, die er als *„analog magnitude representation", „auditory verbal word frame"* und *„visual arabic number form"* bezeichnet (Aster 2005, 14 und Dehaene 1999, 201ff.). Die ausdrückliche Beziehung auf das arabische Zahlzeichensystem zeigt jedoch, ebenso wie die Tatsache, dass Dehaene seine Ergebnisse aus der Untersuchung von Zahlverarbeitungsphänomenen an Erwachsenen gewinnt, dass dieser nicht den Anspruch hat, ein kulturübergreifendes Modell zu entwerfen oder eines, das erklärt, wie die Herausbildung der drei Module und der unterstellte Zahlensinn, bzw. die abgeleitete Form der analogen Repräsentation von Zahlen entlang eines mentalen Zahlenstrahls ontogenetisch stattfindet. Dehaenes Modell ist kein dynamisches Modell. Es ist kein Entwicklungsmodell.

Wenn wir aber fachdidaktisch die Entwicklung von Rechenanfängern fördern wollen, dann stellt sich genau diese Frage nach der Genese. Es ist bedeutsam festzuhalten, dass die frühen Menschen auf die benannten Module ganz offensichtlich nicht zurückgreifen konnten und dass der Einfluss des Stellenwertsystems erst wirken konnte, nachdem sich dieses ab dem 16. Jahrhundert etabliert hatte.

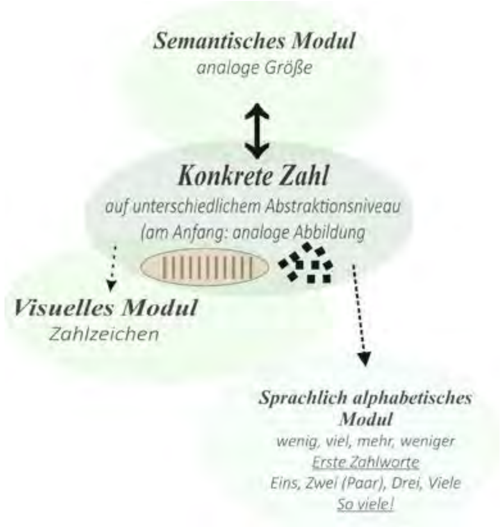

Abb. 4: Das Triple-Code-Modell, angewandt auf den kulturgeschichtlichen Ausgangspunkt der Zahlenentwicklung

Dem frühen Menschen stand neben dem analogen Modul (und dem damit verbundenen objekt-file-system) die konkrete Zahl zur Verfügung, die sowohl als analoge Größe, wie auch als Zahlzeichenidee das visuelle Modul nutzte. Daneben wurde der Zahlbegriff durch erste Zahlortbildungen unterstützt (Abb. 4).

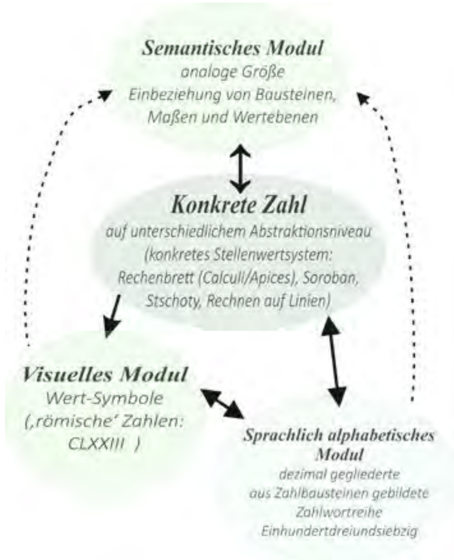

Abb. 5: Das Triple-Code-Modell, angewandt auf die Kulturstufen des konkreten Rechnens. Die konkrete Zahl dabei im Zentrum des Modells.

Erst auf dieser Grundlage, das heißt angeregt durch Anfangskonzepte im visuellen und sprachlich alphabetischen Bereich und die Praxis der semantisch erfassbaren konkreten Zahl, entstanden ausgereifte Zahlwort und Zahlzeichensysteme, die als selbständige Module nun ihrerseits auf das semantische Modul zurückwirken konnten und im Kontext mit diesem das Zahlkonzept der jeweiligen Kultur schufen. Wobei es den unterschiedlichsten Kulturen über alle Erdteile über Jahrtausende hinweg gemein ist, dass das Zahlwort- und Zahlzeichensystem im engen Zusammenhang zu den jeweils gebrauchten konkreten Zahlen steht, die bei Zähl- und Rechenanlässen benutzt werden.

Erst die Durchsetzung des Stellenwertsystems und die Verbreitung der schriftlichen Rechenverfahren und schließlich auch der Gebrauch von Rechenmaschinen brachte das Rechnen mit konkreten Zahlen zum Verschwinden. Erst an diesem Punkt wurde es notwendig, dass die kardinalen Vorstellungen beim Umgang mit Zahlen allein auf der Grundlage mentaler Konzepte entstehen müssen, denen keine konkreten Vergegenständlichungen als Modelle mehr zur Verfügung stehen. Erst jetzt lässt sich das Modell der Zahlverarbeitung auf der Grundlage Dehaenes auf die drei mentalen Module reduzieren (Abb. 6).

Die leere Mitte, um welche die drei Module in der Grafik angeordnet sind, zeigt den Bereich, der einmal der Ausgangspunkt gewesen war und der heute im schulischen Lehrgang künstlich durch Anschauungsmittel gefüllt werden muss.

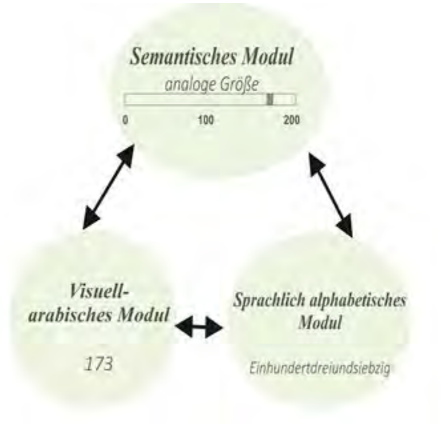

Abb. 6: Dehaenes Triple-Code-Model nach Aster 2005, 14

Zusammenfassend soll festgehalten sein, dass es der Blick in die Kulturgeschichte der Zahlen und des Rechnens erlaubt, Stolperstellen des Rechnen-lernens, Erkenntnishürden, bzw., um es mit Meyerhöfer zu sagen, zu bearbeitende stoffliche Hürden, präzise zu identifizieren. Die Erkenntnis, dass sich die Zahlen in benennbaren Stufen der Abstraktion, also in zunehmender Verschlüsselung des kardinalen Gehalts entwickelt haben, gibt das Instrumentarium an die Hand, um diese Hürden für jedes Kind in einer Weise zu bearbeiten, die seinem inneren Zahlkonzept entspricht, also einen verständigen Zugang ermöglicht. Das didaktische Konzept Rechnen-durch-Handeln ist als Versuch auf dieser Grundlage entstanden und es bietet zahlreiche Impulse, welche es erlauben, auch andere fachdidaktische Konzepte aus einem neuen Blickwinkel zu verstehen und dadurch weiter zu entwickeln.

Literatur

Aster, M.v. (2005): Wie kommen die Zahlen in den Kopf? In: Aster, M.v. & Lorenz, J.H. (Hrsg.): Rechenstörungen bei Kindern. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 15-38.

Damerow, P.; Englund, R.K. & Nissen, H.J. (1988): Die ersten Zahldarstellungen und die Entwicklung des Zahlbegriffs. In: Spektrum Wissenschaft, 3, 46-55.

Dehaene, S. (1999): Der Zahlensinn oder Warum wir rechnen können. Basel: Birkhäuser.

Dornheim, D. (2007): Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche. Berlin: Logos.

Fritz, A.; Ricken, B. & Schmidt, S. (Hrsg.) (2009): Handbuch Rechenschwäche. Weinheim: Beltz.

Fuson, K. (1988): Children's Counting and Concepts of Number. New York: Springer.

Gaidoschek, M.; Fellmann, A.; Guggenbichler, S. & Thomas, A. (2017): Empirische Befunde zum Lehren und Lernen auf Basis einer Fortbildungsmaßnahme zur Förderung nicht-zählenden Rechnens. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 1, 93-124.

Gerster, H.D. & Schultz, R. (2004): Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. URL: https://phfr.bsz-bw.de/frontdoor/deliver/index/docId/16/file/gerster.pdf [20.03.2019].

Ifrah, G. (1986): Die Universalgeschichte der Zahlen. Frankfurt: Campus.

Lorenz, J.H. (1998): Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Göttingen: Hogrefe.

Menninger, K. (1979): Zahlwort und Ziffer – Eine Kulturgeschichte der Zahl. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Meyerhöfer, W. (2011): Vom Konstrukt der Rechenschwäche zum Konstrukt der nicht bearbeiteten stofflichen Hürden (nbsH). In: Pädagogische Rundschau, 4, 401-426.

Rödler, K. (1997): Rechnen am römischen Rechenbrett. In: Grundschule, 11, 62-66.

Rödler, K. (1998): Auf fremden Wegen ins Reich der Zahlen. In: Grundschule, 5, 45-47.

Rödler, K. (2006): Erbsen, Bohnen, Rechenbrett – Rechnen durch Handeln. Velber: Kallmeyer Verlag.

Rödler, K. (2007): Die blau-roten Würfel und Fünferstangen – Rechnen durch Handeln. Frankfurt: Kallmeyer Verlag.

Rödler, K. (2013): Die blau-roten Würfel und Fünferstangen – Rechnen durch Handeln. Frankfurt: Selbstverlag.

Rödler, K. (2015): Ein Mathematikunterricht für alle! – Schulische Inklusion braucht eine inklusive Fachdidaktik. In: Behindertenpädagogik, 4, 399-412.

Rödler, K. (2016a): Mathe inklusiv: Ratgeber für die 1./ 2. Klasse mit 5 Materialbänden. Hamburg: AOL-Verlag.

Rödler, K. (2016b): Ein Mathematikunterricht für alle! – 10 Bausteine für einen inklusiven Mathematikunterricht. In: Behinderte Menschen, 4, 37-45.

Wagenschein, M. (1970): Verstehen lehren/ genetisch-sokratisch-exemplarisch. Weinheim: Julius Beltz.

Weisshaupt, S. & Peucker, S. (2009): Entwicklung arithmetischen Vorwissens. In: Fritz, A.; Ricken, G. & Schmidt, S. (Hrsg.): Handbuch Rechenschwäche. Weinheim: Beltz, 52-76.

Zaslavsky, C. (1999): Africa Counts – Number and Patterns in African Culture. Chicago: Lawrence Hill Books.

Sachregister

Personenregister